

Gazdasági matematika II. vizsgadolgozat, elméleti rész, 2009. május 22. A csoport

Név:	Definíciók	Tételek	Feladatok	Összesen
Gyak. vezető:				

A dolgozatírásnál íróeszközön kívül más **segédeszköz nem használható**. A numerikus számolásoknál felhasználható értékek: $\ln 0,3 = -1,20$, $\ln 0,4 = -0,92$, $\sqrt[3]{0,5} = 0,71$,
 $\sqrt[3]{0,75} = 0,91$, $0,5^{2/3} = 0,68$, $0,75^{2/3} = 0,82$.

A dolgozat időtartama: 120 perc, az elméleti részt 30 perc elteltével be kell adni.

Definíciók

Definiálja az alábbi fogalmakat!

1. Valószínűségi mező. (2 pont)

Valószínűségi mező: $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ hármas, ahol

- Ω egy nemüres halmaz (az eseménytér);
- $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$ az Ω bizonyos részhalmazaiából álló σ -algebra (az események rendszere);
- $P : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ olyan leképezés, melyre
 - (1) $P(A) \in [0, 1]$ tetszőleges $A \in \mathcal{A}$ esetén,
 - (2) $P(\Omega) = 1$,
 - (3) ha $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ páronként diszjunktak, akkor

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j).$$

(Ezt a tulajdonságot **σ -additivitásnak** nevezzük).

2. Valószínűségi változó eloszlásfüggvénye. (2 pont)

Az

$$F_\xi(x) := P\{\xi < x\}$$

függvényt a $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ valószínűségi változó **(kumulatív) eloszlásfüggvényének** nevezzük.

3. (m, σ^2) paraméterű normális eloszlású valószínűségi változó. (2 pont)

Legyenek $m \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$. Valamely $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ valószínűségi változó **normális eloszlású** (m, σ^2) **paraméterekkel**, ha az

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

függvény sűrűségfüggvénye ξ -nek.

Tételek

Fogalmazza meg az alábbi tételeket!

4. Bayes-tétel. (3 pont)

Ha az $A_1, A_2, \dots$ pozitív valószínűségű események teljes eseményrendszert alkotnak és $P(B) > 0$, akkor

$$P(A_i | B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B | A_i)}{\sum_j P(B | A_j) \cdot P(A_j)}.$$

5. Eloszlásfüggvények jellemzése. (3 pont)

Egy $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ függvény akkor és csak akkor lehet eloszlásfüggvénye valamely $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ valószínűségi változónak, ha

- (1) F monoton növekvő,
- (2) F balról folytonos,
- (3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1.$

6. Valószínűségi változók összegének szórásnégyzetére vonatkozó addíciós képlet. (3 pont)

Ha ξ és η valószínűségi változók, akkor

$$\text{var}(\xi + \eta) = \text{var} \xi + 2 \text{cov}(\xi, \eta) + \text{var} \eta.$$

Gazdasági matematika II. vizsgadolgozat, gyakorlati rész, 2009. május 22. A csoport

Név:	1	2	3	4	5	6	7	Összesen
Gyak.vezető:								

Feladatok

1. Öt darab százforintost feldobunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy legfeljebb három írást kapunk?
(3 pont)

MEGOLDÁS. Az írás dobások száma $n = 5, p = 1/2$ paraméterű binomiális eloszlású, ezért

$$\begin{aligned} P(\xi \leq 3) &= 1 - P(\xi \geq 4) = 1 - P(\xi = 4) - P(\xi = 5) \\ &= 1 - \binom{5}{4} 0,5^4 \cdot 0,5 - \binom{5}{5} 0,5^5 = 1 - 6 \cdot 0,5^5 = 1 - 6/32 = 26/32 \approx 0,81. \end{aligned}$$

2. Két közgazdász hallgató megbeszéli, hogy délután 4 és 6 óra között az egyetem épülete előtt találkoznak. Megállapodnak abban, hogy 20 percet várnak egymásra, majd elmennek (ha ez letelt, vagy ha 6 óra érkezett). Mekkora valószínűséggel találkoznak, ha mindketten véletlenszerűen érkeznek 4 és 6 óra között?
(5 pont)

MEGOLDÁS. Legyenek x, y a hallgatók érkezési időpontjai, akkor az (x, y) pont egyenletes eloszlású a $[4, 6] \times [4, 6]$ négyzeten (rajzoljon ábrát). A találkozás feltétele az, hogy $|y - x| \leq 1/2, x, y \in [4, 6]$ ezért a keresett valószínűség:

$$P = \frac{2^2 - \left(\frac{5}{3}\right)^2}{2^2} = \frac{4 - \frac{25}{9}}{4} = \frac{11}{36} \approx 0,30.$$

3. Egy szabályos kockával háromszor dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy legalább egyszer 6-ost dobunk? Mennyi a valószínűsége, hogy legalább egyszer 6-ost dobtunk, feltéve, hogy a mindhárom dobott szám páros?
(5 pont)

MEGOLDÁS. A hatos dobások száma $n = 3, p = 1/6$ paraméterű binomiális eloszlású, ezért

$$P(\xi \geq 1) = 1 - P(\xi = 0) = 1 - \binom{3}{0} \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{91}{216} \approx 0,42$$

Legyen B az az esemény, hogy mindhárom dobott szám páros, akkor

$$P(\xi \geq 1 | B) = \frac{P(\xi \geq 1 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(\xi = 0 \cap B)}{P(B)} = \frac{\left(\frac{3}{6}\right)^3 - \left(\frac{2}{6}\right)^3}{\left(\frac{3}{6}\right)^3} = \frac{19}{27} \approx 0,70$$

4. Annak valószínűsége, hogy egy benzinkútnál a tankolásra 4 percnél többet kell várni, a tapasztalatok szerint 0,3. A várakozási idő hossza exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Mennyi a valószínűsége, hogy véletlenszerűen a benzinkúthoz érkezve 2 percnél belül sorra kerülünk? Mennyi a várakozási idő várható értéke?
(5 pont)

MEGOLDÁS. Tudjuk, hogy

$$0,3 = P(\xi > 4) = 1 - P(\xi \leq 4) = 1 - (1 - e^{-4\lambda})$$

azaz $e^{-4\lambda} = 0,3$, vagy $-4\lambda = \ln 0,3 \approx -1,2, \lambda \approx 0,3$. Továbbá

$$P(\xi < 2) = 1 - e^{-2\lambda} = 1 - \sqrt{e^{-4\lambda}} = 1 - \sqrt{0,3} \approx 1 - 0,54 = 0,46$$

és a várható érték

$$E\xi = \frac{1}{\lambda} \approx 3,3.$$

5. Legyen a ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f_{\xi}(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{ha } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$ Határozzuk meg ξ eloszlásfüggvényét, várható értékét, varianciáját, mediánját és interkvartilisát! Mennyi annak a valószínűsége, hogy ξ -nek az 1-től való eltérése kisebb mint 0,2 ? (5 pont)

MEGOLDÁS. Az eloszlásfüggvény:

$$F_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^x f_{\xi}(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0 \\ x^3 & \text{ha } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{ha } 1 < x. \end{cases}$$

A várható érték és variancia:

$$E\xi = \int_0^1 x \cdot 3x^2 dx = \left[\frac{3x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{3}{4}$$

$$E\xi^2 = \int_0^1 x^2 \cdot 3x^2 dx = \left[\frac{3x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{3}{5}$$

$$\text{var } \xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \frac{3}{5} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{80}$$

A q -kvantilis, a $c_q^3 = q$ egyenletből $c_q = \sqrt[3]{q}$, így a

$$\text{medián } c_{1/2} = \sqrt[3]{0,5} \approx 0,71$$

$$\text{interkvartilis } c_{3/4} - c_{1/4} = \sqrt[3]{0,75} - \sqrt[3]{0,25} \approx 0,28.$$

Továbbá

$$P(|\xi - 1| < 0,2) = P(0,8 < \xi < 1,2) = F_{\xi}(1,2) - F_{\xi}(0,8) = 1 - 0,8^3 \approx 0,488$$

6. Valaki egy sürgős telefonhívást vár. A hívás időpontja egy délelőtti 8 órakor kezdődő, ismeretlen hosszúságú intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó. A hívást váró fél tudja, hogy a hívás 80% valószínűséggel 8 és 9 óra között befut.

(a) Állapítsuk meg, mekkora annak valószínűsége, hogy a hívás 1/2 9 és 9 óra között érkezik.

(b) A hívás 1/2 9-ig nem jött be. Mennyi a valószínűsége, hogy 1/2 9 és 9 óra között még befut?

(6 pont)

MEGOLDÁS. Az eloszlásfüggvény: (az intervallum végpontját b vel jelölve)

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 8 \\ \frac{x-8}{b-8} & \text{ha } 8 < x \leq b \\ 1 & \text{ha } b < x. \end{cases}$$

A $0,8 = P(8 < \xi < 9) = F_{\xi}(9) - F_{\xi}(8)$ feltételből

$$\frac{9-8}{b-8} - 0 = 0,8, \quad \text{amiből} \quad b = 8 + \frac{1}{0,8} = 9,25.$$

A kért valószínűségek

$$P(8,5 < \xi < 9) = F_{\xi}(9) - F_{\xi}(8,5) = \frac{0,5}{1,25} \approx 0,4,$$

$$\begin{aligned} P(8,5 < \xi < 9 | \xi > 8,5) &= \frac{P(8,5 < \xi < 9 \cap \xi > 8,5)}{P(\xi > 8,5)} \\ &= \frac{P(8,5 < \xi < 9)}{1 - P(\xi \leq 8,5)} = \frac{0,5}{1,25 - 0,5} = \frac{0,5}{0,75} \approx 0,67. \end{aligned}$$

7. A (ξ, η) kétdimenziós valószínűségi vektorváltozó együttes eloszlását a következő kontingencia táblázat tartalmazza:

$\xi \backslash \eta$	0	1
0	$2p$	p
1	p	$2p$
2	p	$3p$

- (a) Mennyi p értéke?
 (b) Adjuk meg a peremeloszlásokat (ξ és η eloszlását)!
 (c) Független-e ξ és η ?
 (d) Számítsuk ki ξ és η várható értékét, varianciájukat, továbbá a $\text{cov}(\xi, \eta)$, $\text{corr}(\xi, \eta)$ értékeket!
 (6 pont)

MEGOLDÁS. (a) $10p = 1, p = 1/10$.

(b) A peremeloszlások

$$P(\xi = 0) = 3p = 0,3, P(\xi = 1) = 3p = 0,3, P(\xi = 2) = 4p = 0,4,$$

$$P(\eta = 0) = 4p = 0,4, P(\eta = 1) = 6p = 0,6.$$

(c) Mivel $P(\xi = 0, \eta = 0) = 0,2 \neq P(\xi = 0)P(\eta = 0) = 0,3 \cdot 0,4$ ezért ξ és η nem függetlenek.

(d) A várható értékek és varianciák:

$$E\xi = 1 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,4 = 1,1$$

$$E\xi^2 = 1^2 \cdot 0,3 + 2^2 \cdot 0,4 = 1,9$$

$$\text{var } \xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = 1,9 - 1,1^2 = 0,69,$$

$$E\eta = 1 \cdot 0,6 = 0,6$$

$$E\eta^2 = 1^2 \cdot 0,6 = 0,6$$

$$\text{var } \eta = E\eta^2 - (E\eta)^2 = 0,6 - 0,6^2 = 0,24.$$

Legyen $\zeta = \xi \cdot \eta$ akkor ζ lehetséges értékei: 0, 1, 2 és

$$P(\zeta = 0) = P(\xi = 0, \eta = 0) + P(\xi = 0, \eta = 1) + P(\xi = 1, \eta = 0) + P(\xi = 2, \eta = 0) = 0,5,$$

$$P(\zeta = 1) = P(\xi = 1, \eta = 1) = 0,2,$$

$$P(\zeta = 2) = P(\xi = 2, \eta = 1) = 0,3,$$

ezért

$$E(\xi \cdot \eta) = E\zeta = 1 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,3 = 0,8$$

$$\text{cov}(\xi, \eta) = E(\xi \cdot \eta) - E\xi \cdot E\eta = 0,8 - 1,1 \cdot 0,6 = 0,14,$$

$$\text{corr}(\xi, \eta) = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{\text{var } \xi \cdot \text{var } \eta}} = \frac{0,14}{\sqrt{0,69 \cdot 0,25}} \approx 0,34.$$

(Összesen elérhető: 35 pont)

Gazdasági matematika II. vizsgadolgozat, elméleti rész,
2009. május 22.
B csoport

Név:	Definíciók	Tételek	Feladatok	Összesen
Gyak.vezető:				

A dolgozatírásnál íróeszközön kívül más **segédeszköz nem használható**. A numerikus számolásoknál felhasználható értékek: $\ln 0,3 = -1,20$, $\ln 0,4 = -0,92$, $\sqrt[3]{0,5} = 0,71$,
 $\sqrt[3]{0,75} = 0,91$, $0,5^{2/3} = 0,68$, $0,75^{2/3} = 0,82$.

A dolgozat időtartama: 120 perc, az elméleti részt 30 perc elteltével be kell adni.

Definíciók

Definiálja az alábbi fogalmakat!

1. Egy eseménynek egy másik eseményre vonatkozó feltételes valószínűsége. (2 pont)
2. Valószínűségi mező. (2 pont)
3. (n, p) paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó. (2 pont)

Tételek

Fogalmazza meg az alábbi tételeket!

4. Teljes valószínűség tétele. (3 pont)
5. Sűrűségfüggvények jellemzése. (3 pont)
6. A variancia tulajdonságai. (3 pont)

(Összesen elérhető: 15 pont)

Gazdasági matematika II. vizsgadolgozat, gyakorlati rész, 2009. május 22. B csoport

Név:	1	2	3	4	5	6	7	Összesen
Gyak.vezető:								

Feladatok

- Hat darab százforintost feldobunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy legalább három írást kapunk?
(3 pont)
- Két közgazdász hallgató megbeszéli, hogy délután 5 és 6 óra között az egyetem épülete előtt találkoznak. Megállapodnak abban, hogy 15 percet várnak egymásra, majd elmennek (ha ez letelt, vagy ha 6 óra érkezett). Mekkora valószínűséggel találkoznak, ha mindketten véletlenszerűen érkeznek 5 és 6 óra között?
(5 pont)
- Egy szabályos kockával háromszor dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy legalább kétszer hármast dobunk? Mennyi a valószínűsége, hogy legalább kétszer hármast dobtunk, feltéve, hogy a mindhárom dobott három páratlan?
(5 pont)
- Annak valószínűsége, hogy egy benzinkútnál a tankolásra 2 percnél többet kell várni, a tapasztalatok szerint 0,4. A várakozási idő hossza exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Mennyi a valószínűsége, hogy véletlenszerűen a benzinkúthoz érkezve 4 percn belül sorra kerülünk? Mennyi a várakozási idő várható értéke?
(5 pont)
- Legyen a ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{3\sqrt{x}}{2} & \text{ha } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$ Határozzuk meg ξ eloszlásfüggvényét, várható értékét, varianciáját, mediánját és interkvartilisát! Mennyi annak a valószínűsége, hogy ξ -nek az 1-től való eltérése kisebb mint 0,3 ?
(5 pont)
- Valaki egy sürgős telefonhívást vár. A hívás időpontja egy délután 2 órakor kezdődő, ismeretlen hosszúságú intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó. A hívást váró fél tudja, hogy a hívás 70% valószínűséggel délután 2 és 4 óra között befut.
 - Állapítsuk meg, mekkora annak valószínűsége, hogy a hívás délután 3 és 4 óra között érkezik.
 - A hívás délután 3-ig nem jött be. Mennyi a valószínűsége, hogy délután 3 és 4 óra között még befut?
- A (ξ, η) kétdimenziós valószínűségi vektorváltozó együttes eloszlását a következő kontingencia táblázat tartalmazza:

$\xi \backslash \eta$	0	1	2
-1	$2p$	p	$3p$
1	$3p$	$2p$	p

- Mennyi p értéke?
 - Adjuk meg a peremeloszlásokat (ξ és η eloszlását)!
 - Független-e ξ és η ?
 - Számítsuk ki ξ és η várható értékét, varianciájukat, továbbá a $\text{cov}(\xi, \eta)$, $\text{corr}(\xi, \eta)$ értékeket!
- (6 pont)

(Összesen elérhető: 35 pont)