

Vizsgafeladatok a Matematika II. tárgyhoz

1. $\int (2x - 3)^{10} dx$
2. $\int \frac{1}{\sqrt{2-5x}} dx$
3. $\int \frac{1}{5+2x^2} dx$
4. $\int \frac{x+1}{x^2+2x-1} dx$
5. $\int \frac{1}{x \ln x} dx$
6. $\int \operatorname{tg} x dx$
7. $\int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}} dx$
8. $\int \frac{2x}{1+x^2} dx$
9. $\int x e^{-x^2} dx \quad (-x^2 = t)$
10. $\int \sin^3 x \cos x dx \quad (\sin x = t)$
11. $\int (2x+1)e^x dx$
12. $\int x^2 \sin x dx$
13. $\int x \ln x dx$
14. $\int e^x \cos x dx$
15. $\int (x^2+1) \ln x dx$
16. $\int \arctg x dx$
17. $\int \frac{5}{(x-2)(x+5)} dx$
18. $\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} dx$
19. $\int \frac{2x}{1+x} dx$
20. $\int \sqrt{e^x-1} dx \quad (e^x-1 = t^2)$
21. $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx \quad (1+\sqrt{x} = t)$
22. $\int_0^{2\pi} \sin 3x dx$
23. $\int_1^{100} \frac{1}{x} dx$
24. $\int_2^3 \left(e^x + x^2 + \frac{1}{x} \right) dx$
25. $\int_0^3 x e^{2x} dx$
26. $\int_{+\infty}^0 e^{-x} dx$
27. $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2} dx$
28. $\int_0^2 \int_0^1 xy dx dy$
29. $\int_0^1 \int_0^2 e^{x+y} dy dx$

30.

$$\iint_A (x^2 + y^2) dx dy \quad A = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$$

31.

$$\iint_A \cos(x + y) dx dy \quad A = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq \pi\}$$

32. Határozza meg a

$$\iint_A (x^2 + 2y) dx dy$$

kettős integrál értéket, ahol A az $x = 0$, $y = 0$ és az $x + 2y = 2$ egyenletű egyenesek által határolt háromszög!

33. $y' = e^x \sin x$

34. $(1 + e^x)y' = e^x$

35. $(1 - x)y' + y^2 = 0$

36. $(1 + e^x)yy' = e^x \quad (y(1) = 1)$

37. $y' = y - x$

38. $y' + 3y - 3e^{-2x} = 0$

39. $y' - y - e^x = 0$

40. Alteret alkot-e a valós $\mathbb{R}^5$ vektortérben az

$$L = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0\}$$

részhalmaz? Ha igen, akkor hány dimenziósat?

41. Lineárisan független-e

a $\mathbb{C}^3$ komplex vektortérben az $a = (1, 0, 1)$, $b = (i, 1, 0)$ $c = (i, 2, 1 + i)$. vektorrendszer?

42. Igazoljuk, hogy

$$e_1 = (1, 1, 1), \quad e_2 = (1, 1, 2), \quad e_3 = (1, 2, 3)$$

bázis $\mathbb{R}^3$ -ban, s adjuk meg az $x = (6, 9, 14)$ vektor koordinátáit ebben a bázisban.

43.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

44.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

45. Határozzuk meg az $A = (a_{ij}) = \max(i, j)$ ($n \times n$ -típusú) mátrix determinánsát.

46. Az x mely értékeinél lesz

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n-x \end{vmatrix} = 0.$$

47. Számítsuk ki az AB , BA , AC , ADF , DF mátrixokat, ha

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

48. Invertálhatók-e az alábbi mátrixok? Ha igen, akkor határozzuk meg az inverzüket!

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 5 & 11 & -16 \end{pmatrix},$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad \text{d) } \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

49. Milyen λ értékek mellett invertálhatók az alábbi mátrixok

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -12 \\ -2 & -3 & \lambda \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

50. Oldjuk meg Cramer szabállyal

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

51. Határozzuk meg a Cramer szabállyal x_1 -et, ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}$$

52. Tekintsük a következő lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{array}{rrcr} 2x_1 & +3x_2 & -x_3 & = 2 \\ 3x_1 & +\lambda x_2 & +4x_3 & = 5 \\ 7x_1 & +4x_2 & +2x_3 & = k \end{array}$$

a) Legyen $k = 8$. λ milyen értékei esetén nincs megoldása az egyenletrendszernek?

b) Most legyen $\lambda = -2$. Milyen k esetén oldható meg az egyenletrendszer?

53. Számítsuk ki az alábbi vektorok összegét, belső szorzatát, normáját és szögét:

$$a = (5, 1, 3, 4), \quad b = (10, 2, 6, 8)$$

54. Mekkora az a és b vektorok által bezárt szög, ha $a = s + t$, $b = s - t$, ahol s és t egyenlő normájú.

55. Számítsa ki az $x = (1, 3, 5)$ vektornak az $e = (-1, 2, -3)$ vektor irányába eső merőleges vetületét!

56. Számítsa ki az $x = (1, 3, -1)$ vektornak az $L = \mathcal{L}((-1, 0, 1), (0, 1, 2))$ generált altérre eső merőleges vetületét!

57. A Gram-Schmidt eljárással ortogonalizáljuk az

$$a_1 = (1, 0, 1), \quad a_2 = (2, 1, 0), \quad a_3 = (0, 1, 1)$$

bázist.

58. Határozzunk meg $\mathbb{R}^3$ -ben olyan ortogonális bázist, melynek egyik vektora $b_1 = (1, 2, 1)$.

59. Legyen $a = (1, 2, 3, 0)$ és $b = (1, -1, 3, 1)$. Állapítsuk meg, hogy milyen $\lambda \in \mathbb{R}$ szám esetén lesz minimális az $a - \lambda b$ vektor normája!

60. Vannak-e olyan nullától különböző α, β, γ valós számok, melyekre a

$$b_1 = (\alpha, \beta, \gamma, 0), \quad b_2 = (0, \alpha, \beta, \gamma), \quad b_3 = (\gamma, 0, \alpha, \beta), \quad b_4 = (\beta, \gamma, 0, \alpha)$$

vektorok ortogonális vektorrendszert alkotnak?

61. Legyen a $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineáris transzformáció mátrixa (a természetes bázisra vonatkozóan)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Határozzuk meg az $x = (1, 1, 2)$ vektor képét!

b) Határozzuk meg azt az x vektort, melynek képvektora az $y = (-2, -5, -5)$ vektor!

62. $\mathbb{R}^3$ -ban tekintsük az $y = x$ síkra vonatkozó tükrözést! Írjuk fel a transzformáció mátrixát a természetes bázisban!

63. Az $\mathbb{R}^3$ -beli lineáris transzformációk természetes bázisra vonatkozó mátrixa

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Határozzuk meg a transzformációk nullterét, defektusát és rangját!

64. Határozzuk meg a következő lineáris transzformáció karakterisztikus polinomját, sajátértékeit, sajátvektorait.

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (\alpha, \beta, \gamma) \mapsto (\alpha - 2\gamma, 0, 2\alpha + 4\gamma)$$

65. Legyen adott az $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ transzformáció mátrixával:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Mutassuk ki, hogy a képvektorok tere kétdimenziós! Eleme-e a képvektorok terének az $y = (1, -4, 6)$ vektor?

66. Határozzuk meg az

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

mátrixszal adott lineáris transzformáció sajátértékeit és sajátvektorait!

67. Tekintsük $\mathbb{R}^3$ -ban az $y = x$ síkra vonatkozó tükrözést. Írjuk fel e transzformáció mátrixát! Szimmetrikus, illetve ortogonális-e ez a transzformáció?

68. Határozzunk meg az

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

mátrixszal adott szimmetrikus transzformációhoz egy sajátvektorokból álló ortonormált bázist!

69. Kvadratikus forma-e $\mathbb{R}^3$ -an

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad \varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + 3x_2 + 5x_3)$$

Ha igen akkor írja fel a mátrixát!

70. Határozzunk meg a következő kvadratikus formák kanonikus alakját és adjuk meg a hozzájuk tartozó kanonikus bázist is!

$$2x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_1x_2, \quad 9x_1^2 + 16x_2^2 + 24x_1x_2.$$