

Gazd. mat.I. január 14-i vizsgadolgozat megoldása, és tanácsok a vizsgára való felkészüléshez

Tanácsok a felkészüléshez:

- A január 14-i vizsgán a hallgatók több mint fele elégtelent kapott. Ennek fő oka az, hogy nagyon sokan készületlenül jöttek el vizsgázni, kb 15-en kevesebb mint 30 perc elteltével beadták a (lényegében üres) dolgozatukat, a bukások többsége a minimum kérdések nem teljesítése miatt történt.
- A minimum kérdésekből nagyon nehéz elérni az 50%-ot, ha az elméleti kérdésekre 0 pontot kap valaki, a legfontosabb elméleti kérdéseket most ♣♣ jelöli a definíciók és tételek kigyűjtésében. Először ezeket kellene megtanulni, megérteni. Ha valaki megértette a definíciót, tételt, akkor sokkal könnyebben megjegyzi.
- A vizsga alapkövetelménye a differenciál- és integrálszámítás és alkalmazásaik. A minimum kérdések feladat része differenciálás és integrálás, már ezekkel is teljesíthető az 50% de csak akkor, ha ezekre közel hibátlan a válasz. Az eddigi vizsgakérdéseknél 54% -ot lehetett elérni az előbb említett alapkövetelmény teljesítésével, 24%-ot elméleti résszel, 22%-ot határértékek kiszámításával, függvényábrázolással.
- Elemi függvények differenciálása, egyszerű parciális integrálás és egyszerű helyettesítéses integrálás (főleg azokat melyekre képlet is van) alapkövetelmény. A differenciálási szabályok, alapintegrálok (és az alapintegrálok bővített (egy a paramétert tartalmazó integrálok) változata) megtanulása nélkül nincs sok esély a sikeres vizsgára.
- A további dolgozatok felépítése, pontozása az eddigiekhez hasonló lesz, a kérdések természetesen változnak.
- Az idén az elméleti rész és a kérdések száma és nehézsége is csökkent a tavalyihoz képest kb 10%-kal, ennek ellenére a bukások száma nem csökkent a korábbiakhoz képest. Ebben a félévben tapasztalom először, hogy a vizsgakurzusos hallgatók egy része jobban felkészült, mint a friss elsőévesek, pedig ez a múltban fordítva volt.
- A vizsgaanyag megtanulható, de idő kell hozzá, aki a félév során nem tanult, annak több időt kell szánnia a felkészülésre.
- Ajánlom a január 14-i megoldások áttanulmányozását is, amit az alábbiakban találnak meg.

I. rész (minimum kérdések)

1. Definíció: Valós számhalmaz torlódási pontja.

(4 pont)

Az $a \in \mathbb{R}$ pontot az A halmaz *torlódási pontjának* nevezzük, ha a **bármely** környezetében van a -tól különböző A -beli pont.

2. Definíció: Függvény határértéke egy pontban.

(4 pont)

Azt mondjuk, hogy f -nek van **(véges, vagy végtelen) határértéke az x_0 pontban**, ha van olyan $a \in \mathbb{R}_b$ bővített valós szám, hogy bármely olyan D -beli $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatra, melyre $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ és $x_n \neq x_0$, teljesül a $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$ egyenlőség. a -t az f függvény x_0 pontbeli határértékének nevezzük, és $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ -val, vagy $f(x) \rightarrow a$ ($x \rightarrow x_0$)-al jelöljük.

3. A határozott integrál tulajdonságai (legalább 4 tulajdonság).

(4 pont)

Ha $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$, akkor bármely $c \in \mathbb{R}$ és bármely $a < d < b$ mellett

$$f + g \in \mathcal{R}[a, b], \quad \text{és} \quad \int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g,$$

$$c \cdot f \in \mathcal{R}[a, b], \quad \text{és} \quad \int_a^b (c \cdot f) = c \cdot \int_a^b f,$$

$$f \in \mathcal{R}[a, d], \quad f \in \mathcal{R}[d, b], \quad \text{és} \quad \int_a^b f = \int_a^d f + \int_d^b f,$$

$$\text{Ha } f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f, g \in \mathcal{R}[a, b] \quad \text{és} \quad f(x) \leq g(x) \quad (x \in [a, b]), \quad \text{akkor} \quad \int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

4. Deriválja az $f(x) = \arctan(\sqrt{x} + x^2) + 2^{-2x+23}$, $g(x) = (\cos x)^{2 \sin x}$ függvényeket!

(8 pont)

$$f'(x) = \frac{1}{1 + (\sqrt{x} + x^2)^2} \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}} + 2x \right) + 2^{-2x+23}(-2) \ln(2),$$

$$g'(x) = (e^{2 \sin x \cdot \ln(\cos x)})' = e^{2 \sin x \cdot \ln(\cos x)} \left(2 \cos x \cdot \ln(\cos x) + 2 \sin x \frac{-\sin x}{\cos x} \right).$$

5. Határozza meg az $\int \frac{5}{\sqrt{8-x^2}} dx$, $\int (x-5)e^{-x} dx$ integrálokat!

(10 pont)

$$\int \frac{5}{\sqrt{8-x^2}} dx = 5 \arcsin \frac{x}{\sqrt{8}} + C$$

$$\int (x-5)e^{-x} dx = -(x-5)e^{-x} + \int e^{-x} dx = -(x-5)e^{-x} - e^{-x} + C$$

ahol az első integrálásnál az $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$ képletet alkalmaztuk, a másodikonál parciálisan integráltunk $f' = e^{-x}$, $g = x-5$ választással, $f = -e^{-x}$, $g' = 1$.

(Összesen elérhető: 30 pont)

II. rész

1. Definíció: Bijektív függvény.

(4 pont)

Az $F : A \rightarrow B$ függvényt *bijektívnek* (vagy kölcsönösen egyértelműen *B-re* képezőnek) nevezzük, ha injektív és szürjektív.

2. Definíció: Sor konvergenciája és összege.

(4 pont)

A $\sum a_n$ sort *konvergensnek* nevezzük, ha *részletösszegeinek* $s_n := a_1 + a_2 + \dots + a_n$ ($n \in \mathbb{N}$) *sorozata konvergens*, a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$$

határértéket a *sor összegének* nevezzük

3. Kétszer differenciálható konvex és konkáv függvények jellemzési tétele.

(4 pont)

Ha $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ kétszer differenciálható I -n, akkor

- f konvex I -n akkor és csakis akkor, ha $f''(x) \geq 0$ ($x \in I$);
- f konkáv I -n akkor és csakis akkor, ha $f''(x) \leq 0$ ($x \in I$);
- (f lineáris I -n akkor és csakis akkor, ha $f''(x) = 0$ ($x \in I$)).

4. Számítsa ki a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{14}{\sqrt{5n^2 + 12n} - \sqrt{5n^2 - 2}}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{e^{2x} - 1}$ határértékeket! (A második feladat függvény határértékének kiszámítása!)

(10 pont)

$$\begin{aligned} \frac{14}{\sqrt{5n^2 + 12n} - \sqrt{5n^2 - 2}} &= \frac{14}{\sqrt{5n^2 + 12n} - \sqrt{5n^2 - 2}} \cdot \frac{\sqrt{5n^2 + 12n} + \sqrt{5n^2 - 2}}{\sqrt{5n^2 + 12n} + \sqrt{5n^2 - 2}} \\ &= \frac{14 \left(\sqrt{5n^2 + 12n} + \sqrt{5n^2 - 2} \right)}{12n - 2} = \frac{14 \left(\sqrt{5 + 12/n} + \sqrt{5 - 2/n^2} \right)}{12 - 2/n} \rightarrow \frac{14 \cdot 2 \cdot \sqrt{5}}{12}, \end{aligned}$$

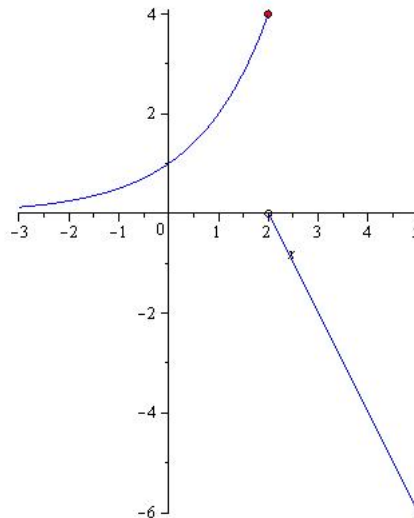
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{e^{2x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cos(3x)}{2e^{2x}} = \frac{3}{2},$$

ahol a második határérték kiszámításához a L'Hospital szabályt használtuk.

5. Vázolja az $f(x) = \begin{cases} 2^x, & \text{ha } x \leq 2, \\ 4 - 2x, & \text{ha } x > 2, \end{cases}$ függvény gráfját, és ennek segítségével állapítsa meg értelmezési tartományát, értékkészletét, szakadási pontjait, jobb- és baloldali határértékét a szakadási pontokban és a végtelenekben (ha léteznek)!

(10 pont)

A gráfot az alábbi ábra mutatja:



Értelmezési tartomány $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, értékkészlet $\mathcal{R}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, szakadási pont $x_0 = 2$, a határértékek:

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = 4, \quad \lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

6. Határozza meg az $\int \frac{5x}{(2+x^2)^{14}} dx$, $\int_1^{+\infty} e^{1-3x} dx$ integrálokat! (12 pont)

$$\int \frac{5x}{(2+x^2)^{14}} dx = \frac{5}{2} \int (2+x^2)' (2+x^2)^{-14} dx = \frac{5}{2} \frac{(2+x^2)^{-13}}{-13} + C$$

$$\int_1^{+\infty} e^{1-3x} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t e^{1-3x} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[-\frac{e^{1-3x}}{3} \right]_1^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(-\frac{e^{1-3t}}{3} + \frac{e^{1-3}}{3} \right) = \frac{e^{-2}}{3}.$$

7. Határozza meg az $f(x) = x^3 - 6x^2 - 36x$ ($x \in \mathbb{R}$) függvény zérushelyeit, lokális szélsőérték-helyeit (és azok típusát), konvex, konkáv szakaszait, inflexiós helyeit, és ábrázolja a függvényt ($\sqrt{180} \approx 13,4$)! (14 pont)

A zérushelyek:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 - 36x = x(x^2 - 6x - 36) = 0$$

-ből $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 144}}{2} = 3 \pm \sqrt{180}/2$, $x_2 \approx -3,7$, $x_3 \approx 9,7$ mindhárom zérushely egyszeres, a gráf átmetszi e pontoknál az x tengelyt.

A stacionárius pontok: az

$$f'(x) = 3x^2 - 12x - 36 = 3(x^2 - 4x - 12) = 0,$$

egyenletből (megoldóképlettel) $x_4 = -2$, $x_5 = 6$.

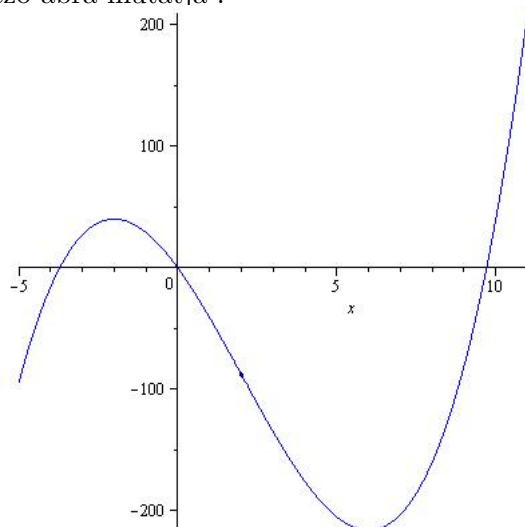
Az inflexiós hely: az

$$f''(x) = 6x - 12, \quad 6x - 12 = 0$$

egyenletből $x_6 = 2$ lehet, ez valóban inflexiós hely, mivel e pontban a második derivált előjelet vált. f konkáv a $] -\infty, 2]$ szakaszon, konvex a $[2, \infty[$ szakaszon.

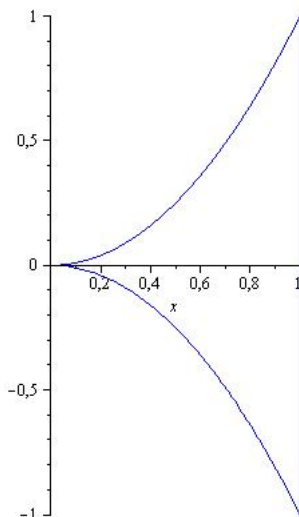
Mivel $f''(x_4) < 0$ az x_4 pontban szigorú lokális maximuma van a függvénynek, $f''(x_5) > 0$ alapján az x_5 pontban szigorú lokális minimuma van.

Az f függvény gráfját a következő ábra mutatja :



8. Vázolja a síkban az $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, -x^2 \leq y \leq x^2\}$ halmazt és számolja ki a $\iint_A (2y - 3x + 7) \, dx \, dy$ kettős integrált! (12 pont)

Az A halmazt a következő ábra mutatja:



Az A halmaz elsőfajú normál tartomány, az integrál kiszámítása:

$$\iint_A (2y - 3x + 7) \, dx \, dy = \int_0^1 \left(\int_{-x^2}^{x^2} (2y - 3x + 7) \, dy \right) dx.$$

A belső integrál

$$\int_{-x^2}^{x^2} (2y - 3x + 7) \, dy = [y^2 - 3xy + 7y]_{y=-x^2}^{y=x^2} = x^4 - 3x^3 + 7x^2 - (x^4 + 3x^3 - 7x^2) = -6x^3 + 14x^2,$$

így

$$\iint_A (2y - 3x + 7) \, dx \, dy = \int_0^1 (-6x^3 + 14x^2) \, dx = \left[\frac{-6x^4}{4} + \frac{14x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{-6}{4} + \frac{14}{3}.$$

(Összesen elérhető: 70 pont)