

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.1 Véletlen kísérletek, eseményalgebrák

Véletlen események

Valószínűsége **véletlen eseményeknek** van,

- melyekről nem tudjuk előre megmondani, hogy bekövetkeznek-e, vagy sem;
- és amelyek
 - vagy **véletlen jelenségek** megfigyelésével kapcsolatosak (amikor a körülményeket nem tudjuk befolyásolni),
 - vagy pedig **véletlen kimenetelű kísérletekkel** kapcsolatosak (amikor befolyásolni tudjuk a körülményeket).

Példák:

- Minőségellenőrzés: n termékből kiválasztunk m darabot ($m \leq n$), és megszámloljuk, hogy hány selejtes van;
lehetséges kimenetek: az $\Omega := \{0, 1, 2, \dots, m\}$ halmaz elemei;
- Hagyományos lottó: megjelölünk 5 számot 90-ből, és megszámloljuk, hogy hány találatunk van;
lehetséges kimenetek: az $\Omega := \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ halmaz elemei;
- Ragályos fertőzés terjedése, csapadékmennyiség alakulása, szeizmográf mozgása, sorhosszúság alakulása pénztáraknál, szerencsejátékok, tőzsdei áringadozások.

14.1 Véletlen kísérletek, eseményalgebrák

- **Elemi események:** a kísérlet/megfigyelés lehetséges kimenetelei.
- **Eseménytér:** az elemi események halmaza; jelölés: Ω .
- **Esemény:** az eseménytér bizonyos $A \subset \Omega$ részhalmaza, amit úgy értünk, hogy ha az $\omega \in \Omega$ elemi esemény következik be, akkor
 - $\omega \in A$ esetén bekövetkezik az A esemény is,
 - $\omega \notin A$ esetén az A esemény nem következik be.
- **Biztos esemény:** amely mindig bekövetkezik; be lehet azonosítani az $\Omega \subset \Omega$ részhalmazzal.
- **Lehetetlen esemény:** amely sohasem következik be; be lehet azonosítani az $\emptyset \subset \Omega$ üres részhalmazzal.

Logikai műveletek eseményekkel

- Minden A eseménnyel kapcsolatban tekinthetjük az A **ellentett (komplementer) eseményét**: ez pontosan akkor következik be, amikor az A esemény nem következik be; jelölése: $\bar{A}$.
- Az A és B események **összege (uniója)** az az esemény, amely pontosan akkor következik be, amikor az A és B események közül legalább az egyik bekövetkezik; jelölése: $A + B$ vagy $A \cup B$.
- Az A és B események **szorzata (metszete)** az az esemény, amely pontosan akkor következik be, amikor az A és B események mindegyike bekövetkezik; jelölése: $A \cdot B$ vagy $A \cap B$.
- Az A és B események **különbsége** az az esemény, mely pontosan akkor következik be, amikor az A esemény bekövetkezik, a B esemény pedig nem; jelölése: $A - B$ vagy $A \setminus B$.

A logikai műveletek tulajdonságai

- kommutativitás: $A + B = B + A,$
 $A \cdot B = B \cdot A.$
- asszociativitás: $A + (B + C) = (A + B) + C,$
 $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C.$
- idempotencia: $A + A = A,$
 $A \cdot A = A.$
- disztributivitás: $A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C),$
 $A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C).$
- de Morgan-féle azonosságok: $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B},$
 $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}.$
- különbség: $A - B = A \cdot \overline{B}.$

Diszjunkt események

Azt mondjuk, hogy az A és B események **diszjunktak (kizárják egymást)**, ha egyszerre nem következhetnek be.

Az A és B események akkor és csak akkor diszjunktak, ha $A \cdot B = \emptyset$.

$\Rightarrow$

Azt mondjuk, hogy az A esemény **maga után vonja** a B eseményt, ha az A esemény bekövetkezése esetén mindig bekövetkezik a B esemény is; jelölése: $A \Rightarrow B$.

A következő állítások ekvivalensek:

- $A \Rightarrow B$;
- $A \subset B$;
- $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$.

Eseményalgebra

Egy Ω eseménytér bizonyos eseményeiből álló $\mathcal{A}$ rendszert **eseményalgebrának** nevezünk, ha tartalmazza a biztos eseményt, és zárt a komplementerképzésre és a véges unióképzésre.

Például Ω összes részhalmazainak $\mathcal{A} := 2^\Omega$ rendszere

σ -algebra

Egy eseményalgebrát **σ -algebrának** nevezünk, ha zárt a megszámlálható unióképzésre.

Példák:

- 1 Egy pénzdarab feldobása esetén

$$\Omega = \{\text{fej}, \text{írás}\}.$$

De lehet a fejhez a 0, az íráshoz pedig az 1 számot hozzárendelni, és így

$$\Omega = \{0, 1\}.$$

Nyilván

$$\mathcal{A} = 2^{\Omega} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \Omega\}.$$

Ekkor az elemi események száma: $|\Omega| = 2$, az összes események száma pedig $|2^{\Omega}| = 4$.

2 n -szer **egymás után dobva** egy pénzdarabbal:

$$\Omega = \{ \omega = (a_1, a_2, \dots, a_n) : a_1, a_2, \dots, a_n \in \{0, 1\} \}.$$

Ekkor $|\Omega| = 2^n$, $|2^\Omega| = 2^{2^n}$.

Ha n darab egyforma pénzdarabot **egyidőben dobunk fel**, akkor is lehet ugyanezt az eseményteret tekinteni, hiszen a kísérlet kimenetelét nem változtatja meg, ha megszámozzuk a pénzdarabokat. De lehet csak a megkülönböztethető kimenetekre szorítkozni: ezek száma $n + 1$. Az első eseménytér általában alkalmasabb, mert például szabályos pénzdarab esetén az elemi események egyforma esélyűek!

- ③ Egy zsákban n különböző színű golyó van. Kihúzunk ezek közül k darabot; négy lehetőség van aszerint, hogy **visszatevéssel** vagy **visszatevés nélkül** húzunk (az utóbbi esetben $k \leq n$ szükséges), és aszerint, hogy a **sorrend számít** vagy a **sorrend nem számít**.

Ez a kísérlet ekvivalens azzal a kísérlettel, amikor n rekeszbe helyezünk el k tárgyat; az előbbi négy lehetőség annak felel meg, hogy egy rekeszbe több tárgy is kerülhet vagy csak egy, illetve a tárgyak meg vannak különböztetve, vagy nem.

14.1 Véletlen kísérletek, eseményalgebrák

	sorrend számít (variáció)	sorrend nem számít (kombináció)	
visszatevés nélkül (ismétlés nélkül)	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$	egy rekeszbe legfeljebb egy tárgy kerülhet
visszatevéssel (ismétléses)	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$	egy rekeszbe több tárgy is kerülhet
	a tárgyak különbözőek	a tárgyak nem különböznek	

14.1 Véletlen kísérletek, eseményalgebrák

- Ha n különböző elem közül húzunk visszatevés nélkül úgy, hogy a sorrend számít, és kihúzzuk az összes n elemet (ami azzal ekvivalens, hogy n elemet sorbaállítunk; ezeket **permutációknak** nevezzük), akkor a lehetőségek száma

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n,$$

hiszen az első húzásnál még n lehetőség van, a másodiknál $n - 1$, stb., és ezek szorzata adja az eredményt.

- Ha n különböző elem közül k elemet húzunk visszatevés nélkül (ahol $k \leq n$) úgy, hogy a sorrend számít (ezeket **ismétlés nélküli variációknak** nevezzük), akkor a lehetőségek száma

$$n(n-1) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!},$$

amit az előzőhöz hasonló gondolatmenettel bizonyíthatunk.

14.1 Véletlen kísérletek, eseményalgebrák

- Ha n különböző elem közül k elemet húzunk visszatevéssel úgy, hogy a sorrend számít (ezeket **ismétléses variációknak** nevezzük), akkor a lehetőségek száma

$$n^k,$$

hiszen minden húzásnál n lehetőség van.

- Ha n különböző elem közül k elemet húzunk visszatevés nélkül (ahol $k \leq n$) úgy, hogy a sorrend nem számít (ezeket **ismétlés nélküli kombinációknak** nevezzük), akkor a lehetőségek száma

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!},$$

hiszen a megfelelő ismétlés nélküli variációkat úgy lehet megkapni, hogy a kihúzott k elemet az összes lehetséges módon sorbarakjuk; ezek száma pedig mindig $k!$.

14.1 Véletlen kísérletek, eseményalgebrák

- Ha n különböző elem közül k elemet húzunk visszatevéssel úgy, hogy a sorrend nem számít (ezeket **ismétléses kombinációknak** nevezzük), akkor a lehetőségek száma

$$\binom{n+k-1}{k}.$$

Ezt úgy lehet belátni, hogy a kísérlet kimeneteleihez egyértelműen hozzá lehet rendelni egy olyan sorozatot, mely $n-1$ darab egyesből és k darab nullából áll, mégpedig úgy, hogy az első egyes elé írt nullák száma (ami 0 is lehet) jelenti az első fajta elemből húzottak számát, az első és második egyes közé írt nullák száma jelenti a második fajta elemből húzottak számát, stb., az $(n-1)$ -edik egyes után írt nullák száma jelenti az n -edik fajta elemből húzottak számát; az ilyen nulla–egy sorozatok száma pedig nyilván $\binom{n+k-1}{k}$, hiszen azt kell megmondani, hogy az $n+k-1$ hely közül melyik k helyre kerüljön nulla.

14.1 Véletlen kísérletek, eseményalgebrák

- 4 Adva van n kártya; ezeket osztjuk szét k játékos között úgy, hogy sorban $n_1, n_2, \dots, n_k$ kártyát kapjanak, ahol $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$, és az egy játékoshoz kerülő lapok sorrendje nem számít (ezeket **ismétléses permutációknak** nevezzük). Ekkor az eseménytér elemeinek száma

$$|\Omega| = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!},$$

hiszen a kártyák $n!$ számú permutációit úgy lehet ezekből a leosztásokból megkapni, hogy az egy játékoshoz került $n_1, n_2, \dots, n_k$ kártyát tetszőleges sorrendbe helyezzük.

- 5 Addig dobálunk egy érmével, míg az első fejet sikerül elérni. Ekkor

$$\Omega = \{f, if, iif, iiif, \dots, i_\infty\},$$

ahol i_∞ azt a lehetséges kimenetelt jelöli, amikor csak írást dobunk a végtelenségig.

Gyakoriság, relatív gyakoriság

Ha egy A eseménnyel kapcsolatban n darab véletlen, független kísérletet hajtunk végre, akkor A **gyakorisága** az a szám, ahányszor A bekövetkezik; ez egy **véletlen mennyiség**, melynek lehetséges értékei: $0, 1, \dots, n$; jelölése: $k_n(A)$.

Az A esemény **relatív gyakorisága**: $r_n(A) := \frac{k_n(A)}{n}$.

Tapasztalat:

ha n -et növeljük, azaz egyre több kísérletet hajtunk végre, akkor az A esemény relatív gyakorisága egyre kisebb kilengésekkel ingadozik egy $P(A)$ szám körül; ezt nevezzük A **valószínűségének**.

Relatív gyakoriság tulajdonságai

- $0 \leq r_n(A) \leq 1$ tetszőleges A esemény esetén.
- $r_n(\emptyset) = 0$, $r_n(\Omega) = 1$.
- ha A és B egymást kizáró események, akkor

$$r_n(A \cup B) = r_n(A) + r_n(B).$$

- ha $A_1, A_2, \dots$ páronként egymást kizáró események, akkor

$$r_n\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} r_n(A_j).$$

- $r_n(\bar{A}) = 1 - r_n(A)$ tetszőleges A esemény esetén.
- ha $A \subset B$ események, akkor $r_n(A) \leq r_n(B)$.

Valószínűségi mező

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ hármas, ahol

- Ω egy nemüres halmaz (az eseménytér);
- $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$ az Ω bizonyos részhalmazából álló σ -algebra (az események rendszere);
- $P : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ olyan leképezés, melyre
 - 1 $P(A) \in [0, 1]$ tetszőleges $A \in \mathcal{A}$ esetén,
 - 2 $P(\Omega) = 1$,
 - 3 ha $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ páronként diszjunktak, akkor

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j).$$

(Ezt a tulajdonságot **σ -additivitásnak** nevezzük).

Egy A esemény esetén a $P(A)$ számot az A **valószínűségének**, a $P : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ leképezést pedig **valószínűségeloszlásnak** nevezzük.

A valószínűségeloszlások tulajdonságai

- $P(\emptyset) = 0$. (Hiszen ha $P(\emptyset) > 0$ volna, akkor a σ -additivásban $A_1 = A_2 = \dots = \emptyset$ választással ellentmondásra jutnánk.)
- Ha $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ páronként diszjunktak, akkor

$$P\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = \sum_{j=1}^n P(A_j).$$

(Használjuk a σ -additivitást $A_{n+1} = A_{n+2} = \dots = \emptyset$ esetére, és alkalmazzuk azt, hogy $P(\emptyset) = 0$.)

Ezt a tulajdonságot **véges additivitásnak** nevezzük.

- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
(Hiszen $\Omega = A \cup \bar{A}$ diszjunkt felbontás, így a véges additivitással $1 = P(\Omega) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$.)

A valószínűségeloszlások tulajdonságai

- Ha $A \Rightarrow B$, azaz $A \subset B$, akkor

$$P(A) \leq P(B), \quad P(B \setminus A) = P(B) - P(A).$$

(Hiszen $A \subset B$ esetén $B = A \cup (B \setminus A)$ diszjunkt felbontás, ezért $P(B) = P(A) + P(B \setminus A) \geq P(A)$.)

Ezt a tulajdonságot **monotonitásnak** nevezzük.

- Tetszőleges $A, B \in \mathcal{A}$ esetén

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B),$$

hiszen

$$A \cup B = [A \setminus (A \cap B)] \cup [B \setminus (A \cap B)] \cup (A \cap B)$$

diszjunkt felbontás, ezért $A \cap B \subset A$ és $A \cap B \subset B$ miatt

$$P(A \cup B) = [P(A) - P(A \cap B)] + [P(B) - P(A \cap B)] + P(A \cap B).$$

A valószínűségeloszlások tulajdonságai

- Tetszőleges $A, B, C \in \mathcal{A}$ esetén

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) \\ &\quad - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) \\ &\quad + P(A \cap B \cap C), \end{aligned}$$

hiszen

$$P((A \cup B) \cup C) = P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C)$$

és

$$\begin{aligned} P((A \cup B) \cap C) &= P((A \cap C) \cup (B \cap C)) \\ &= P(A \cap C) + P(B \cap C) - P((A \cap C) \cap (B \cap C)), \end{aligned}$$

ahol $(A \cap C) \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$.

Diszkrét valószínűségi mező

Ω véges vagy megszámlálhatóan végtelen, azaz

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$$

vagy

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$$

alakú, és $\mathcal{A} = 2^\Omega$.

Valószínűségek kiszámolása diszkrét valószínűségi mezőben

Tetszőleges $A \in \mathcal{A}$ esemény előáll az

$$A = \bigcup_{i: \omega_i \in A} \{\omega_i\}$$

diszjunkt felbontás alakjában, így

$$P(A) = \sum_{i: \omega_i \in A} P(\{\omega_i\}).$$

Ezért diszkrét valószínűségi mezőben elég megadni az elemi események valószínűségeit, a

$$p_i := P(\{\omega_i\}), \quad i = 1, 2, \dots$$

számokat ahhoz, hogy tetszőleges esemény valószínűségét ki tudjuk számolni.

Nyilván szükséges az, hogy ezek a $\{p_1, p_2, \dots\}$ számok nemnegatívak legyenek és összegük 1 legyen, hiszen

$$\sum_i p_i = \sum_i P(\{\omega_i\}) = P\left(\bigcup_i \{\omega_i\}\right) = P(\Omega) = 1.$$

Ekkor azt mondjuk, hogy a $\{p_1, p_2, \dots\}$ számok **eloszlást** alkotnak.

Egyenletes eloszlás véges halmazon

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\},$$

és az elemi események egyenlő esélyűek, azaz

$$P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = \dots = P(\{\omega_N\}) = \frac{1}{N}$$

Valószínűségek véges halmazon egyenletes eloszlás esetén

$$P(A) = \sum_{i: \omega_i \in A} P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{N} \sum_{i: \omega_i \in A} 1 = \frac{|A|}{N},$$

vagyis

$$P(A) = \frac{\text{kedvező kimenetek száma}}{\text{összes kimenetek száma}}.$$

Ez a **valószínűség kiszámításának klasszikus képlete**.

Példák:

- ❶ *Két érmét feldobva mennyi annak a valószínűsége, hogy egy fej és egy írás legyen az eredmény?*

Ekkor a két érmét megkülönböztetve az

$$\Omega = \{ff, fi, if, ii\}$$

eseményteret kapjuk, amelyben a kimenetek egyforma valószínűségűek, így az

$$A = \{fi, if\}$$

esemény valószínűsége

$$P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Példák:

- 2 Mennyi a valószínűsége, hogy egy n tagú társaságban van legalább két olyan személy, akiknek ugyanakkor van a születésnapja? (Feltesszük, hogy a szökőnap nem lehet.)

Nyilván $n > 365$ esetén (a „skatulya-elv” miatt) ez a biztos esemény, így ekkor a valószínűség 1.

Ha pedig $n \leq 365$, akkor az ellentett eseménnyel számolva

$$P(A) = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdots (365 - n + 1)}{365^n}$$

$$= 1 - \frac{365!}{(365 - n)! \cdot 365^n} \approx \begin{cases} 0.284 & \text{ha } n = 16 \\ 0.476 & \text{ha } n = 22 \\ 0.507 & \text{ha } n = 23 \\ 0.891 & \text{ha } n = 40 \end{cases}$$

Egyenletes eloszlás $\mathbb{R}^k$ véges mértékű részalmazain

$\Omega \subset \mathbb{R}^k$ véges mértékű, és „minden pont egyenlő esélyű”, azaz egy $A \subset \Omega$ részalmaz valószínűsége A mértékével arányos, vagyis

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)},$$

ahol μ az illető halmaz mértékét jelöli:

- $k = 1$ esetén összhossz,
- $k = 2$ esetén terület,
- $k = 3$ esetén térfogat.

Ez a **valószínűségek geometriai kiszámítási módja**.

14.2 Valószínűség

Példa: Egy egységnyi hosszúságú szakaszt két, találomra kiválasztott ponttal három szakaszra bontunk fel. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a három szakaszból háromszöget lehet szerkeszteni?

Az eredmény a $[0, 1] \times [0, 1]$ négyzet azon részhalmazának területe, melynek pontjaira fennállnak a következő egyenlőtlenségek:

$$\begin{cases} 0 < x < y < 1, \\ 1 - y < x, \\ x < 1 - x, \\ y - x < 1 - y + x, \end{cases} \quad \text{vagy} \quad \begin{cases} 0 < y < x < 1, \\ 1 - x < y, \\ y < 1 - y, \\ x - y < 1 - x + y, \end{cases}$$

azaz

$$\begin{cases} 0 < x < \frac{1}{2} < y < 1, \\ y - x < \frac{1}{2}, \end{cases} \quad \text{vagy} \quad \begin{cases} 0 < y < \frac{1}{2} < x < 1, \\ x - y < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Ezért a keresett valószínűség $1/4$.

Feltételes relatív gyakoriság

Ha n független kísérletet végzünk, akkor az A esemény **feltételes relatív gyakorisága azon feltétel mellett, hogy a B esemény bekövetkezett**

$$r_n(A | B) := \frac{k_n(A \cap B)}{k_n(B)} = \frac{r_n(A \cap B)}{r_n(B)}.$$

Feltételes valószínűség

Az A esemény **feltételes valószínűsége** a B feltétel mellett (azaz ha tudjuk, hogy a B esemény bekövetkezett)

$$P(A | B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

hacsak $P(B) > 0$.

Példák:

- ① *Mennyi a valószínűsége, hogy egy kétgyermekes családban mindkét gyerek fiú, ha feltételezzük, hogy egy gyerek egyenlő valószínűséggel lehet fiú vagy lány, és tudjuk, hogy*
- *az idősebb gyerek fiú;*
 - *legalább az egyik gyerek fiú ?*

Ekkor az eseménytér

$$\Omega = \{FF, FL, LF, LL\},$$

melynek elemei egyformán $1/4$ valószínűségűek. Legyen

$$A := \{\text{mindkét gyerek fiú}\} = \{FF\},$$

$$B_1 := \{\text{az idősebb gyerek fiú}\} = \{FF, FL\},$$

$$B_2 := \{\text{legalább az egyik gyerek fiú}\} = \{FF, FL, LF\}.$$

Nilván $A \cap B_1 = A \cap B_2 = \{FF\}$, így

$$P(A \mid B_1) = 1/2, \quad P(A \mid B_2) = 1/3.$$

14.3 Feltételes valószínűség

- 2 *Bridzsnél osztáskor 2 ászt kapott valaki. Mennyi a valószínűsége, hogy a másik 2 ász a partnerénél van?*

Az összes leosztások száma $\frac{52!}{(13!)^4}$,

ezek egyforma valószínűségűek. Ezekből $\binom{4}{2} \cdot \binom{48}{11} \cdot \frac{39!}{(13!)^3}$

olyan leosztás van, melynél az első játékos 2 ászt kap, és ezek között pedig

$$\binom{4}{2} \cdot \binom{48}{11} \cdot \binom{37}{11} \cdot \frac{26!}{(13!)^2}$$

olyan leosztás van, melynél a másik 2 ász a partnerénél van.

Tehát a keresett feltételes valószínűség

$$\frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{48}{11} \cdot \binom{37}{11} \cdot \frac{26!}{(13!)^2}}{\binom{4}{2} \cdot \binom{48}{11} \cdot \frac{39!}{(13!)^3}} = \frac{2}{19}.$$

Láncszabály

$$\begin{aligned} & P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \\ &= P(A_1) P(A_2 \mid A_1) P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n \mid A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}), \\ & \text{hacsak } P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0. \end{aligned}$$

A jobb oldal

$$P(A_1) \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{P(A_1 \cap A_2)} \cdots \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1} \cap A_n)}{P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1})}$$

14.3 Feltételes valószínűség

Példa: *Húzzunk ki a 32 lapos magyar kártyából hármat visszatevés nélkül. Mennyi a valószínűsége, hogy az első és a harmadik kihúzott lap piros, a második pedig nem az?*

Jelölje $i = 1, 2, 3$ esetén A_i azt az eseményt, hogy az i -edik húzás eredménye piros. Ekkor

$$P(A_1) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}, \quad P(\bar{A}_2 | A_1) = \frac{24}{31}, \quad P(A_3 | A_1 \cap \bar{A}_2) = \frac{7}{30},$$

így

$$P(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) = \frac{1}{4} \cdot \frac{24}{31} \cdot \frac{7}{30} = \frac{7}{155}.$$

Persze lehetne használni azt az eseményteret is, amely az első három kihúzott lapból áll a sorrendet is figyelembe véve; ekkor $|\Omega| = 32 \cdot 31 \cdot 30$, és a kimenetek egyenlő valószínűségűek. Mivel a kedvező esetek száma $8 \cdot 24 \cdot 7$, így a keresett valószínűség $\frac{8 \cdot 24 \cdot 7}{32 \cdot 31 \cdot 30} = \frac{7}{155}$.

Teljes eseményrendszer

Az eseménytér megszámlálható diszjunkt felbontása, azaz események $A_1, A_2, \dots$ véges vagy végtelen sorozata, melyek egymást páronként kizárják, és uniójuk az egész eseménytér, vagyis

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad \text{ha} \quad i \neq j, \quad \text{és} \quad \bigcup_i A_i = \Omega.$$

Egy teljes eseményrendszer eseményei közül mindig pontosan egy következik be, és

$$\sum_i P(A_i) = 1.$$

Teljes valószínűség tétele

Ha az $A_1, A_2, \dots$ pozitív valószínűségű események teljes eseményrendszert alkotnak, akkor tetszőleges B eseményre

$$P(B) = \sum_i P(B \mid A_i) \cdot P(A_i).$$

Bizonyítás. Nyilván $B = \bigcup_i (B \cap A_i)$ diszjunkt felbontás, hiszen

$$B = B \cap \Omega = B \cap \left(\bigcup_k A_k \right) = \bigcup_k (B \cap A_k),$$

és $i \neq j$ esetén

$$(B \cap A_i) \cap (B \cap A_j) = B \cap A_i \cap A_j = \emptyset,$$

ugyanis $A_i \cap A_j = \emptyset$. Ezért

$$P(B) = \sum_i P(B \cap A_i) = \sum_i P(B \mid A_i) \cdot P(A_i).$$

Példa: Három gép csavarokat gyárt. A selejt aránya az első gépnél 1 %, a másodiknál 2 %, a harmadiknál 3 %. Az össztermék 50 %-át az első gép, 30 %-át a második, 20 %-át pedig a harmadik állítja elő. Mi a valószínűsége annak, hogy az össztermékből véletlenszerűen választott csavar selejtes?

Jelölje B azt az eseményt, hogy selejtet húzunk, $i = 1, 2, 3$ esetén pedig A_i azt, hogy a kihúzott csavar az i -edik gépen készült. Ekkor

$$\begin{aligned} P(B|A_1) &= 0.01, & P(B|A_2) &= 0.02, & P(B|A_3) &= 0.03, \\ P(A_1) &= 0.5, & P(A_2) &= 0.3, & P(A_3) &= 0.2, \end{aligned}$$

így

$$P(B) = 0.01 \cdot 0.5 + 0.02 \cdot 0.3 + 0.03 \cdot 0.2 = 0.017.$$

Bayes-formula

Ha A és B pozitív valószínűségű események, akkor

$$P(A | B) = \frac{P(A) \cdot P(B | A)}{P(B)}.$$

Bizonyítás: $P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ és $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B | A)$.

Bayes-tétel

Ha az $A_1, A_2, \dots$ pozitív valószínűségű események teljes eseményrendszert alkotnak és $P(B) > 0$, akkor

$$P(A_i | B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B | A_i)}{\sum_j P(B | A_j) \cdot P(A_j)}.$$

Bizonyítás: A Bayes-formulával $P(A_i | B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B | A_i)}{P(B)}$. A teljes valószínűség tételével $P(B) = \sum_j P(B | A_j) \cdot P(A_j)$.

Példa: *Mennyi a feltételes valószínűsége az előző példában annak, hogy az első, második, illetve harmadik gépen gyártották a kiválasztott csavart azon feltétel mellett, hogy az selejtesnek bizonyult?*

$$P(A_1 | B) = \frac{0.01 \cdot 0.5}{0.017} = \frac{5}{17}, \quad P(A_2 | B) = \frac{6}{17}, \quad P(A_3 | B) = \frac{6}{17}.$$

Független események

Azt mondjuk, hogy az A és B események **függetlenek**, ha

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Ha A és B pozitív valószínűségű események, akkor a következő állítások ekvivalensek:

- A és B függetlenek;
- $P(A|B) = P(A)$;
- $P(B|A) = P(B)$.

Ha $P(A) = 0$ vagy $P(A) = 1$, akkor A tetszőleges B eseménytől független.

14.4. Független események

Páronként független események

Azt mondjuk, hogy az $A_1, A_2, \dots$ események **páronként függetlenek**, ha közülük bármely két esemény független.

(Teljesen) független események

Azt mondjuk, hogy az $A_1, A_2, \dots$ események **(teljesen) függetlenek**, ha tetszőleges $i_1, i_2, \dots, i_k$ **különböző** indexekre

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_k}).$$

Lehetséges, hogy például három esemény páronként függetlenek, de nem (teljesen) függetlenek.

Valószínűségi változó / véletlen mennyiség, eloszlásfüggvény

Ha $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező, akkor a $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ leképezés **valószínűségi változó / véletlen mennyiség**, ha tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén $\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{A}$. Ekkor az $F_\xi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$,

$$F_\xi(x) := P\{\xi < x\}$$

függvényt ξ **(kumulatív) eloszlásfüggvényének** nevezzük.

Eloszlásfüggvény

Egy $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ függvény akkor és csak akkor lehet eloszlásfüggvénye valamely $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ valószínűségi változónak, ha

- ❶ F monoton növekvő,
- ❷ F balról folytonos,
- ❸ $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1.$

Diszkrét valószínűségi változó

A $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ valószínűségi változó **diszkrét**, ha lehetséges értékeinek halmaza, a $\{\xi(\omega) : \omega \in \Omega\}$ értékkészlet megszámlálható.

A ξ diszkrét valószínűségi változó **eloszlása** az a P_ξ valószínűségi mérték a ξ lehetséges értékeinek $X := \{x_1, x_2, \dots\}$ halmazán, melyre $P_\xi(\{x_i\}) = P(\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) = x_i\})$, $x_i \in X$.

Diszkrét valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

Egy ξ diszkrét valószínűségi változó eloszlásfüggvénye olyan lépcsős függvény, mely a lehetséges értékeknél ugrik, és az ugrás nagysága az illető érték valószínűsége. Ha a ξ lehetséges értékeinek halmaza $X := \{x_1, x_2, \dots\}$, akkor

$$F_\xi(x) = \sum_{\{i : x_i < x\}} P_\xi(\{x_i\}), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Példák:

- ① *Két kockát dobva a dobott számok összegét jelölje ξ . Határozzuk meg ξ eloszlását!*

Ekkor ξ diszkrét valószínűségi változó; lehetséges értékeinek halmaza:

$$X = \{2, 3, \dots, 12\},$$

eloszlása:

$$P\{\xi = k\} = \begin{cases} \frac{k-1}{36} & \text{ha } 2 \leq k \leq 7, \\ \frac{13-k}{36} & \text{ha } 7 \leq k \leq 12. \end{cases}$$

2 Binomiális eloszlás.

n független kísérlet

A esemény, $p := P(A)$

A gyakorisága: $\xi := k_n(A)$

diszkrét valószínűségi változó;

lehetséges értékeinek halmaza:

$$X = \{0, 1, 2, \dots, n\},$$

eloszlása

$$P\{\xi = k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

melyet (n, p) **paraméterű binomiális eloszlásnak** nevezünk.

3 Elsőrendű negatív binomiális eloszlás.

A esemény, $p := P(A)$

Addig végzünk független kísérleteket, míg A először bekövetkezik.

$\xi :=$ az ehhez szükséges kísérletek száma;

lehetséges értékeinek halmaza:

$$X = \{1, 2, \dots, \infty\},$$

eloszlása: $k = 1, 2, \dots$ esetén

$$P\{\xi = k\} = p \cdot (1 - p)^{k-1},$$

így

$$P\{\xi = \infty\} = 1 - P\{\xi < \infty\} = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} P\{\xi = k\} = 1 - p \sum_{k=1}^{\infty} (1 - p)^{k-1} = 0.$$

Ekkor ξ eloszlását **elsőrendű p paraméterű negatív binomiális eloszlásnak** (vagy geometriai eloszlásnak) nevezzük.

4 Hipergeometrikus eloszlás.

Egy dobozban M piros és $N - M$ fekete golyó van ($M < N$).
Visszatevés nélkül húzunk ki n golyót ($n \leq N$).

$\xi :=$ a kihúzott piros golyók száma;

lehetséges értékeinek halmaza: olyan k értékek, melyekre
teljesül $0 \leq k \leq n$, $k \leq M$, és $n - k \leq N - M$,
eloszlása:

$$P\{\xi = k\} = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Ekkor ξ eloszlását $(n, M, N - M)$ **paraméterű hipergeometrikus eloszlásnak** nevezzük.

5 Poisson eloszlás.

Mazsolás kalácsot sütünk; 1000 gramm tésztába $n = 50$ darab mazsolát teszünk. Egy szelet súlya 25 gramm, tehát $N = 40$ szelet készül. Minden mazsola egyforma valószínűséggel kerülhet bele bármely szeletbe, és a mazsolák egymástól függetlenül „mozognak”. Jelölje ξ egy kiválasztott szeletbe kerülő mazsolák számát. Lehetséges értékeinek halmaza $X = \{0, 1, \dots, 50\}$, eloszlása

$$P\{\xi = k\} = \binom{50}{k} \left(\frac{1}{40}\right)^k \left(1 - \frac{1}{40}\right)^{50-k},$$

tehát ξ eloszlása n -edrendű $1/N$ paraméterű binomiális eloszlás.

Mi történik, ha növeljük a tészta mennyiségét?

14.5 Valószínűségi változók

Ha n mazsolát használunk fel $20 \cdot n$ gramm tésztába, akkor $N = 20 \cdot n/25$ szelet készül, így a binomiális eloszlás paramétere $p_n := 1/N = \lambda/n$, ahol $\lambda := 5/4$ az egy szeletre átlagosan jutó mazsolák száma. Ekkor

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}. \end{aligned}$$

Ha egy η valószínűségi változó lehetséges értékei a nemnegatív egész számok és $k = 0, 1, \dots$ esetén

$$P(\eta = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

ahol $\lambda > 0$, akkor azt mondjuk, hogy η eloszlása λ **paraméterű Poisson-eloszlás**.

Valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

Ha $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező, $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ valószínűségi változó és létezik olyan $f_\xi : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ függvény, melyre

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^x f_\xi(t) dt, \quad x \in \mathbb{R},$$

akkor az f_ξ függvényt a ξ **sűrűségfüggvényének** nevezzük.
(Nem egyértelműen definiált!)

Valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

Ha $a < b$, akkor

$$P\{a \leq \xi < b\} = F_\xi(b) - F_\xi(a) = \int_a^b f_\xi(t) dt.$$

Ha az f_ξ sűrűségfüggvény folytonos az $x \in \mathbb{R}$ pontban, akkor

$$F'_\xi(x) = f_\xi(x).$$

Egy $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ függvény akkor és csak akkor lehet sűrűségfüggvénye valamely $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ valószínűségi változónak, ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 1.$$

Egyenletes eloszlás az $[a, b]$ intervallumon

Ha az $[a, b]$ intervallumon választunk véletlenszerűen egy ξ pontot úgy, hogy egy $A \subset [a, b]$ részhalmazba esés valószínűsége az illető részhalmaz mértékével arányos, akkor ξ eloszlásfüggvénye nyilván

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{ha } a < x \leq b, \\ 1 & \text{ha } x > b. \end{cases}$$

Ekkor a ξ valószínűségi változót **egyenletes eloszlásúnak** nevezzük a $[a, b]$ intervallumon. Továbbá

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{ha } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

függvény sűrűségfüggvénye ξ -nek.

Normális eloszlás

Ha a ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

alakú, ahol $m \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, akkor azt mondjuk, hogy ξ **normális eloszlású** (m, σ^2) **paraméterekkel**.

Az, hogy $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$, abból következik, hogy

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx \right)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\infty} r e^{-r^2/2} dr \right) d\varphi = 2\pi \left[-e^{-r^2/2} \right]_{r=0}^{r=\infty} = 2\pi. \end{aligned}$$

Exponenciális eloszlás

Jelölje a ξ valószínűségi változó egy radioaktív atom élettartamát. Ez rendelkezik az úgynevezett **örökifjú tulajdonsággal**: ha $t, h > 0$, akkor

$$P\{\xi \geq t + h \mid \xi \geq t\} = P\{\xi \geq h\},$$

vagyis annak ellenére, hogy tudjuk, hogy az atom már megélt t időt, a még hátralevő élettartam eloszlása éppen olyan, mint a teljes élettartam eredeti eloszlása. Mivel

$$P\{\xi \geq t + h \mid \xi \geq t\} = \frac{P\{\xi \geq t + h, \xi \geq t\}}{P\{\xi \geq t\}},$$

és $P\{\xi \geq t + h, \xi \geq t\} = P\{\xi \geq t + h\}$, ezért a $G(t) := P\{\xi \geq t\}$ **túlélési függvényre** teljesül

$$\frac{G(t + h)}{G(t)} = G(h).$$

14.5 Valószínűségi változók

Be lehet látni, hogy ha G folytonos, akkor létezik olyan $\lambda > 0$, hogy

$$G(t) = e^{-\lambda t} \quad \text{ha } t > 0.$$

Ezért ξ eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

alakú, ahol $\lambda > 0$. Ezt az eloszlást λ **paraméterű exponenciális eloszlásnak** nevezzük. Van sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{ha } x > 0. \end{cases}$$

Bomlási állandó:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} P\{t \leq \xi < t + h \mid \xi \geq t\} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (1 - e^{-\lambda h}) = \lambda.$$

Valószínűségi vektorváltozó

$$\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad \text{azaz} \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_k),$$

ahol $\xi_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, k$ valószínűségi változók

eloszlásfüggvénye: $F_\xi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$,

$$F_\xi(x_1, \dots, x_k) := P\{\xi_1 < x_1, \dots, \xi_k < x_k\}$$

Valószínűségi vektorváltozó sűrűségfüggvénye

Ha létezik olyan $f_\xi : \mathbb{R}^k \rightarrow [0, \infty)$ függvény, melyre

$$F_\xi(x_1, \dots, x_k) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_k} f_\xi(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k$$

teljesül minden $(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ pontban, akkor az f_ξ függvényt ξ **sűrűségfüggvényének** nevezzük.

Valószínűségi vektorváltozó sűrűségfüggvénye

Nyilván

$$P\{a_i \leq \xi_i \leq b_i, i = 1, \dots, k\} = \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_k}^{b_k} f_{\xi}(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k,$$

sőt tetszőleges $B \subset \mathbb{R}^k$ (Borel-halmaz) esetén

$$P\{(\xi_1, \dots, \xi_k) \in B\} = \int_B \dots \int f_{\xi}(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k,$$

továbbá ha F_{ξ} k -szor folytonosan differenciálható, akkor

$$f_{\xi}(x_1, \dots, x_k) = \frac{\partial^k F_{\xi}(x_1, \dots, x_k)}{\partial x_1 \dots \partial x_k}.$$

Diszkrét valószínűségi vektorváltozó

A $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$ valószínűségi változó **diszkrét**, ha lehetséges értékeinek halmaza, a $\{\xi(\omega) : \omega \in \Omega\}$ értékészlet megszámlálható.

Ha $(\xi, \eta) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ diszkrét, akkor ξ és η is diszkrét. Ha ξ és η lehetséges értékei $x_1, x_2, \dots$, illetve $y_1, y_2, \dots$, akkor (ξ, η) lehetséges értékeinek halmaza $\{(x_i, y_j) : i, j = 1, 2, \dots\}$.

Ha ismerjük (ξ, η) eloszlását, azaz a

$$P\{\xi = x_i, \eta = y_j\} \quad i, j = 1, 2, \dots$$

valószínűségeket, akkor ki tudjuk számolni ξ és η eloszlását is:

$$P\{\xi = x_i\} = \sum_j P\{\xi = x_i, \eta = y_j\}, \quad P\{\eta = y_j\} = \sum_i P\{\xi = x_i, \eta = y_j\}.$$

Ezek (ξ, η) **peremeloszlásai / marginális eloszlásai**.

Polinomiális eloszlás

n független kísérletet hajtunk végre egy $A_1, A_2, \dots, A_r$ teljes eseményrendszerre, $p_i := P(A_i)$ (ekkor $p_1 + p_2 + \dots + p_r = 1$). Ekkor A_i gyakorisága: $\xi_i := k_n(A_i)$, és $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r)$ diszkrét valószínűségi vektorváltozó; lehetséges értékeinek halmaza:

$$\{(k_1, k_2, \dots, k_r) \in \mathbb{Z}^r : k_i \geq 0, k_1 + k_2 + \dots + k_r = n\},$$

eloszlása

$$P\{\xi_1 = k_1, \xi_2 = k_2, \dots, \xi_r = k_r\} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_r!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r},$$

melyet $(n, p_1, p_2, \dots, p_r)$ **paraméterű polinomiális eloszlásnak** nevezünk. Peremeloszlásai binomiális eloszlások:

$$P\{\xi_i = k_i\} = \frac{n!}{k_i! (n - k_i)!} p_i^{k_i} (1 - p_i)^{n - k_i}.$$

Polihipergeometrikus eloszlás

Ha visszatevés nélkül húzunk ki n golyót ($n \leq N$), és ξ_i jelöli az i -edik színből húzott golyók számát, akkor $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r)$ olyan $(k_1, k_2, \dots, k_r)$ értékeket vehet fel, melyekre minden $i = 1, 2, \dots, r$ esetén teljesül $0 \leq k_i \leq N_i$, és $k_1 + k_2 + \dots + k_r = n$, továbbá

$$P\{\xi_1 = k_1, \xi_2 = k_2, \dots, \xi_r = k_r\} = \frac{\binom{N_1}{k_1} \binom{N_2}{k_2} \dots \binom{N_r}{k_r}}{\binom{N}{n}}.$$

Ekkor ξ eloszlását $(n, N_1, \dots, N_r)$ **paraméterű polihipergeometrikus eloszlásnak** nevezzük.

Peremeloszlásai hipergeometrikus eloszlások:

$$P\{\xi_i = k_i\} = \frac{\binom{N_i}{k_i} \binom{N-N_i}{n-k_i}}{\binom{N}{n}}.$$

14.5 Valószínűségi változók

Ha a (ξ, η) valószínűségi vektorváltozónak létezik $f_{\xi, \eta}$ sűrűségfüggvénye, akkor a ξ , illetve η valószínűségi változóknak is létezik sűrűségfüggvényük, mégpedig

$$f_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi, \eta}(x, y) dy, \quad f_{\eta}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi, \eta}(x, y) dx.$$

Ezek (ξ, η) **peremeloszlásai / marginális eloszlásai**.

Független valószínűségi változók

A ξ és η valószínűségi változókat akkor nevezzük **függetleneknek**, ha tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}$ esetén

$$P\{\xi < x, \eta < y\} = P\{\xi < x\}P\{\eta < y\},$$

azaz $F_{\xi, \eta}(x, y) = F_{\xi}(x)F_{\eta}(y)$.

Független valószínűségi változók

Ha ξ diszkrét valószínűségi változó $x_1, x_2, \dots$ lehetséges értékekkel és η diszkrét valószínűségi változó $y_1, y_2, \dots$ lehetséges értékekkel, akkor ξ és η függetlensége azzal ekvivalens, hogy

$$\forall i, j \quad P\{\xi = x_i, \eta = y_j\} = P\{\xi = x_i\}P\{\eta = y_j\}.$$

Ha létezik (ξ, η) -nak $f_{\xi, \eta}$ sűrűségfüggvénye, akkor ξ és η függetlensége azzal ekvivalens, hogy

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad f_{\xi, \eta}(x, y) = f_{\xi}(x)f_{\eta}(y).$$

Valószínűségeloszlások konvolúciója

Ha a ξ és η valószínűségi változók függetlenek, akkor azt mondjuk, hogy $\xi + \eta$ eloszlása a ξ és η **eloszlásának konvolúciója**.

Valószínűségeloszlások konvolúciója

Ha ξ és η független diszkrét valószínűségi változók, és a lehetséges értékeik nemnegatív egész számok, akkor a

$$\{\xi + \eta = k\} = \bigcup_{j=0}^k (\{\xi = j\} \cap \{\eta = k - j\})$$

diszjunkt felbontás alapján

$$P\{\xi + \eta = k\} = \sum_{j=0}^k P\{\xi = j\}P\{\eta = k - j\}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Ha a ξ és η független valószínűségi változóknak léteznek az f_ξ és f_η sűrűségfüggvényei, akkor

$$f_{\xi+\eta}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(u)f_\eta(x-u)du, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Példák:

- ❶ Ha ξ és η független binomiális eloszlásúak (n_1, p) illetve (n_2, p) paraméterekkel, akkor ezek konvolúciója ismét binomiális eloszlás, mégpedig $(n_1 + n_2, p)$ paraméterekkel:

$$\sum_{i,j: i+j=k} \binom{n_1}{i} p^i (1-p)^{n_1-i} \binom{n_2}{j} p^j (1-p)^{n_2-j} = \binom{n_1 + n_2}{k} p^k (1-p)^{n_1+n_2-k}.$$

- ❷ Ha ξ és η független normális eloszlásúak (m_1, σ_1^2) illetve (m_2, σ_2^2) paraméterekkel, akkor ezek konvolúciója ismét normális eloszlás, mégpedig $(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ paraméterekkel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(u-m_1)^2}{2\sigma_1^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(x-u-m_2)^2}{2\sigma_2^2}} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} e^{-\frac{(x-m_1-m_2)^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}}.$$

Intuíció:

Tekintsünk egy $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ diszkrét valószínűségi változót $x_1, \dots, x_N$ lehetséges értékekkel.

n független kísérletet hajtunk végre

$A_k := \{\xi = x_k\}$ relatív gyakorisága

$$r_n(A_k) \approx P(A_k) = P\{\xi = x_k\},$$

ezért az x_k értéket körülbelül $n \cdot P\{\xi = x_k\}$ esetben kapjuk, így
a megfigyelt értékek átlaga körülbelül

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^N x_k \cdot n \cdot P\{\xi = x_k\} = \sum_{k=1}^N x_k \cdot P\{\xi = x_k\}.$$

Valószínűségi változó várható értéke

Ha $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ diszkrét valószínűségi változó $x_1, x_2, \dots$ lehetséges értékekkel, akkor az

$$E \xi := \sum_k x_k \cdot P\{\xi = x_k\}$$

mennyiséget a ξ **várható értékének** nevezzük, amennyiben ez a sor abszolút konvergens, azaz $\sum_k |x_k| \cdot P\{\xi = x_k\} < \infty$.

Ha $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ egy abszolút folytonos valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvénye $f_\xi : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$, akkor az

$$E \xi := \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x) dx$$

mennyiséget a ξ **várható értékének** nevezzük, amennyiben ez az improprius integrál abszolút konvergens, azaz $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_\xi(x) dx < \infty$.

Példák:

- ❶ Ha ξ binomiális eloszlású (n, p) paraméterekkel, akkor

$$E\xi = \sum_{k=0}^n k \cdot \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = np.$$

- ❷ Ha egy egységnyi oldalú négyzetben választunk egyenletes eloszlás szerint egy pontot, és ξ jelöli a pontnak a legközelebbi oldaltól való távolságát, akkor $E\xi = \frac{1}{6}$, hiszen

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0, \\ 1 - (1 - 2x)^2 & \text{ha } x \in [0, \frac{1}{2}], \\ 1 & \text{ha } x > \frac{1}{2}, \end{cases} \quad f_{\xi}(x) = \begin{cases} 4 - 8x & \text{ha } x \in [0, \frac{1}{2}], \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$$

$$E\xi = \int_0^{1/2} x(4 - 8x) dx = \left[2x^2 - \frac{8}{3}x^3 \right]_{x=0}^{x=1/2} = \frac{1}{6}.$$

- 3 Az A és B játékosok a következő játékot játsszák. Felváltva dobnak egy szabályos érmét; A kezd, és az nyer, akinek először sikerül fejet dobnia. Az első dobásnál 2–2 forintot tesznek be, és minden dobás előtt duplázzák a tétet, azaz ha az n -edik dobásra sikerül fejet dobni és n páratlan, akkor A nyer 2^n forintot B -től, ha pedig n páros, akkor B nyer 2^n forintot A -tól. Mennyi az A illetve B játékos várható nyereménye?

Jelölje ξ az A játékos nyereményét (mely pozitív, ha A nyer, és negatív, ha A veszít). Ekkor ξ lehetséges értékei 2, -4 , 8, -16 , ... és $P\{\xi = 2\} = \frac{1}{2}$, $P\{\xi = -4\} = \frac{1}{4}$, ... Mivel

$$2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 8 \cdot \frac{1}{8} + \dots = 1 + 1 + 1 + \dots = \infty,$$

így ξ várható értéke nem létezik!

- 4 Legyen ξ olyan valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvénye $f_{\xi}(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$. Ekkor nem létezik $E\xi$, mert $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|}{\pi(1+x^2)} dx = \infty$.

Várható érték tulajdonságai

Ha ξ és η valószínűségi változók és $a, b \in \mathbb{R}$, akkor

- $E(a\xi) = a E\xi$ (homogenitás)
- $E(\xi + \eta) = E\xi + E\eta$ (additivitás)
- $E(a\xi + b\eta) = a E\xi + b E\eta$ (linearitás)
- ha ξ és η függetlenek, akkor $E(\xi\eta) = E\xi \cdot E\eta$
- ha $\xi \leq \eta$, akkor $E\xi \leq E\eta$ (monotonitás)
- ha $\xi \geq 0$, akkor $E\xi \geq 0$ (pozitivitás)
- $E|\xi| \leq |E\xi|$
- $E|\xi\eta| \leq \sqrt{E\xi^2 E\eta^2}$ (Cauchy-Schwartz egyenlőtlenség)

Valószínűségi változó függvényének várható értéke

Legyen $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Ha ξ diszkrét valószínűségi változó $x_1, x_2, \dots$ lehetséges értékekkel, akkor

$$E g(\xi) = \sum_k g(x_k) \cdot P\{\xi = x_k\},$$

amennyiben ez a sor abszolút konvergens.

Ha ξ abszolút folytonos valószínűségi változó f_ξ sűrűségfüggvénnyel, akkor

$$E g(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_\xi(x) dx,$$

amennyiben ez az improprius integrál abszolút konvergens.

Valószínűségi vektorváltozó függvényének várható értéke

Legyen $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Ha ξ és η diszkrét valószínűségi változók $x_1, x_2, \dots$, illetve $y_1, y_2, \dots$ lehetséges értékekkel, akkor

$$E g(\xi, \eta) = \sum_{k, \ell} g(x_k, y_\ell) \cdot P\{\xi = x_k, \eta = y_\ell\},$$

amennyiben ez a sor abszolút konvergens.

Ha (ξ, η) abszolút folytonos valószínűségi vektorváltozó $f_{\xi, \eta}$ sűrűségfüggvénnyel, akkor

$$E g(\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) \cdot f_{\xi, \eta}(x, y) dx dy,$$

amennyiben ez az improprius integrál abszolút konvergens.

Valószínűségi változó varianciája / szórásnégyzete

$$\text{var } \xi := D^2 \xi := E [(\xi - E \xi)^2].$$

Variancia / szórásnégyzet kiszámolása

$$\text{var } \xi = E [\xi^2 - 2\xi E \xi + (E \xi)^2] = E(\xi^2) - 2 \cdot E \xi \cdot E \xi + (E \xi)^2 = E(\xi^2) - (E \xi)^2,$$

így ha ξ diszkrét valószínűségi változó $x_1, x_2, \dots$ lehetséges értékekkel, akkor

$$\text{var } \xi = \sum_k x_k^2 \cdot P\{\xi = k\} - \left(\sum_k x_k \cdot P\{\xi = k\} \right)^2,$$

ha pedig ξ abszolút folytonos valószínűségi változó f_ξ sűrűségfüggvénnyel, akkor

$$\text{var } \xi = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_\xi(x) dx - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x) dx \right)^2.$$

Variancia / szórásnégyzet tulajdonságai

Ha ξ és η valószínűségi változók és $a \in \mathbb{R}$, akkor

- $\text{var}(\xi + a) = \text{var } \xi$ (eltolásinvariancia)
- $\text{var}(c \cdot \xi) = c^2 \cdot \text{var } \xi$ (homogenitás)
- ha ξ és η függetlenek, akkor $\text{var}(\xi + \eta) = \text{var } \xi + \text{var } \eta$ (additivitás)

Valószínűségi változók kovarianciája

$$\text{cov}(\xi, \eta) := E [(\xi - E \xi)(\eta - E \eta)]$$

Addíciós képlet

Ha ξ és η valószínűségi változók, akkor

$$\text{var}(\xi + \eta) = \text{var } \xi + 2 \text{cov}(\xi, \eta) + \text{var } \eta$$

Példa:

Legyen η **standard normális eloszlású**, azaz normális eloszlású $(0, 1)$ paraméterekkel. Ekkor

$$E\eta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot e^{-x^2/2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\substack{K \rightarrow -\infty \\ L \rightarrow +\infty}} \left[-e^{-x^2/2} \right]_{x=K}^{x=L} = 0,$$

$$\begin{aligned} E(\eta^2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2/2} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-xe^{-x^2/2} \right]_{x=-\infty}^{x=\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = 1, \end{aligned}$$

$$\text{var } \eta = E(\eta^2) - (E\eta)^2 = 1.$$

14.6 Várható érték

Ha pedig ξ normális eloszlású (m, σ^2) paraméterekkel, akkor

$$\xi = \sigma \cdot \eta + m,$$

ahol

$$\eta = \frac{\xi - m}{\sigma}$$

standard normális eloszlású, hiszen η eloszlásfüggvénye

$$F_{\eta}(x) = P\{\eta < x\} = P\left\{\frac{\xi - m}{\sigma} < x\right\} = P\{\xi < \sigma \cdot x + m\} = F_{\xi}(\sigma \cdot x + m),$$

így η sűrűségfüggvénye

$$f_{\eta}(x) = F'_{\eta}(x) = \sigma \cdot F'_{\xi}(\sigma x + m) = \sigma \cdot f_{\xi}(\sigma x + m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2},$$

ezért

$$E \xi = \sigma \cdot E \eta + m = m, \quad \text{var } \xi = \sigma^2 \cdot \text{var } \eta = \sigma^2.$$

Valószínűségi változók korrelációs együtthatója

$$\text{corr}(\xi, \eta) := \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{\text{var } \xi \cdot \text{var } \eta}}.$$

Ha $\text{corr}(\xi, \eta) = 0$ azaz $\text{cov}(\xi, \eta) = 0$, akkor azt mondjuk, hogy ξ és η **korrelálatlanok**.

Ha

$$\text{corr}(\xi, \eta) > 0 \quad \text{azaz} \quad \text{cov}(\xi, \eta) > 0,$$

akkor ξ és η **pozitívan korreláltak**, ha pedig

$$\text{corr}(\xi, \eta) < 0 \quad \text{azaz} \quad \text{cov}(\xi, \eta) < 0,$$

akkor ξ és η **negatívan korreláltak**.

Ha ξ és η függetlenek, akkor ξ és η korrelálatlanok, de ez fordítva általában nem igaz.

14.6 Várható érték

Példa: Legyen a (ξ, η) valószínűségi vektorváltozó egyenletes eloszlású a $(-1, 0)$, $(0, -1)$, $(0, 1)$ és $(1, 0)$ pontokon, azaz

$$P\{\xi = -1, \eta = 0\} = P\{\xi = 0, \eta = -1\} = P\{\xi = 0, \eta = 1\} = P\{\xi = 1, \eta = 0\} = \frac{1}{4}.$$

Ekkor $E\xi = E\eta = 0$ és $E(\xi\eta) = 0$ miatt

$$\text{cov}(\xi, \eta) = E(\xi\eta) - E\xi \cdot E\eta = 0,$$

azaz ξ és η korrelálatlanok, viszont a peremeloszlások

$$P\{\xi = -1\} = P\{\xi = 1\} = \frac{1}{4}, \quad P\{\xi = 0\} = \frac{1}{2},$$

$$P\{\eta = -1\} = P\{\eta = 1\} = \frac{1}{4}, \quad P\{\eta = 0\} = \frac{1}{2},$$

ezért ξ és η nem függetlenek, hiszen például

$$P\{\xi = 1, \eta = 0\} = \frac{1}{4}, \quad P\{\xi = 1\} \cdot P\{\eta = 0\} = \frac{1}{8}.$$

Kovariancia és korrelációs együtttható tulajdonságai

- $\text{var } \xi = \text{cov}(\xi, \xi)$
- Ha ξ és η valószínűségi változók, akkor

$$\text{cov}(\xi, \eta) = \text{cov}(\eta, \xi), \quad \text{corr}(\xi, \eta) = \text{corr}(\eta, \xi) \quad (\text{szimmetria})$$
- Ha $\xi_1, \dots, \xi_n$ és $\eta_1, \dots, \eta_m$ valószínűségi változók és $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}$, akkor

$$\text{cov} \left(\sum_{i=1}^n a_i \xi_i, \sum_{j=1}^m b_j \eta_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j \text{cov}(\xi_i, \eta_j) \quad (\text{bilinearitás})$$
- $|\text{corr}(\xi, \eta)| \leq 1$, és $|\text{corr}(\xi, \eta)| = 1$ akkor és csak akkor, ha valamely $a \neq 0$ és b valós számokkal $P\{\eta = a \cdot \xi + b\} = 1$ teljesül; itt $a > 0$ illetve $a < 0$ aszerint, hogy $\text{corr}(\xi, \eta) = 1$ illetve $\text{corr}(\xi, \eta) = -1$.

Momentumok, ferdeség, csúcsosság / lapultság

Legyen ξ valószínűségi változó, k pozitív egész. Ekkor

- **k -adik momentum:** $E(\xi^k)$
- **k -adik centrális momentum:** $E[(\xi - E\xi)^k]$
- **k -adik abszolút momentum:** $E(|\xi|^k)$
- **k -adik abszolút centrális momentum:** $E[|\xi - E\xi|^k]$
- **ferdeség:** $\frac{E[(\xi - E\xi)^3]}{(E[(\xi - E\xi)^2])^{3/2}}$
- **csúcsosság:** $\frac{E[(\xi - E\xi)^4]}{(E[(\xi - E\xi)^2])^2} - 3$

Tehát $E\xi$ az első momentum, $\text{var } \xi$ pedig a második (abszolút) centrális momentum

14.6 Várható érték

Ha $a, b \in \mathbb{R}$ és $a \neq 0$, akkor ξ és $a\xi + b$ ferdesége, illetve ξ és $a\xi + b$ csúcsossága megegyezik.

Példa: Legyen η standard normális eloszlású. Ekkor $E\eta = 0$, $\text{var } \eta = 1$,

$$E(\eta^3) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^3 e^{-x^2/2} dx = 0,$$

$$\begin{aligned} E(\eta^4) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-x^2/2} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-x^3 e^{-x^2/2} \right]_{x=-\infty}^{x=\infty} + \frac{3}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2/2} dx = 3 E(\eta^2) = 3, \end{aligned}$$

ezért η ferdesége és csúcsossága is 0.

Ha ξ normális eloszlású (m, σ^2) paraméterekkel, akkor $\xi = \sigma \eta + m$, ahol η standard normális eloszlású, ezért ξ ferdesége és csúcsossága is 0.

Valószínűségi változó kvantilisei, mediánja, interkvartilis

Legyen $q \in (0, 1)$. A $c_q \in \mathbb{R}$ szám **q -kvantilise** a ξ valószínűségi változónak, ha

$$P\{\xi < c_q\} \leq q, \quad \text{és} \quad P\{\xi > c_q\} \leq 1 - q.$$

Az $\frac{1}{2}$ -kvantilist **mediánnak** nevezzük.

Az $c_{3/4} - c_{1/4}$ különbséget **interkvartilisnek** nevezzük.

Legyen

$$a := \inf \{x \in \mathbb{R} : P\{\xi > x\} \leq 1 - q\}, \quad b := \sup \{x \in \mathbb{R} : P\{\xi < x\} \leq q\}.$$

Ekkor $a \leq b$, és egy $c \in \mathbb{R}$ szám akkor és csak akkor q -kvantilise ξ -nek, ha $a \leq c \leq b$.

Szokták csak az $\frac{a+b}{2}$ számot tekinteni a q -kvantilisnek.

Valószínűségi változó kvantilisei

- Ha az $F_\xi(x) = q$ egyenletnek van megoldása de csak egy, akkor ez az $F_\xi^{-1}(q)$ megoldás az egyetlen q -kvantilis.
- Ha az $F_\xi(x) = q$ egyenletnek nincs megoldása, akkor egyetlen q -kvantilis van, mégpedig az a szám, ahol az F_ξ függvény átugorja a q számot.
- Ha az $F_\xi(x) = q$ egyenletnek több megoldása van, akkor a megoldáshalmaz az $(a, b]$ vagy $[a, b]$ intervallum, és a q -kvantilisek éppen az $[a, b]$ intervallum pontjai.

Valószínűségi változó kvantilisei módusza

Ha ξ diszkrét valószínűségi változó $x_1, x_2, \dots$ lehetséges értékekkel, akkor az x_i szám **módusza** ξ -nek, ha x_i -t a legnagyobb valószínűséggel veszi fel, azaz

$$P\{\xi = x_i\} = \sup_k P\{\xi = x_k\}.$$

Ha ξ abszolút folytonos valószínűségi változó f_ξ sűrűségfüggvénnyel, akkor az x szám **módusza** ξ -nek, ha x globális maximumhelye a sűrűségfüggvénynek, azaz

$$f_\xi(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}} f_\xi(y).$$

p paraméterű Bernoulli–eloszlás

A esemény, $p := P(A)$

$$\xi := k_1(A) = \begin{cases} 1 & \text{ha } A \text{ bekövetkezik,} \\ 0 & \text{ha } A \text{ nem következik be} \end{cases}$$

diszkrét valószínűségi változó; lehetséges értékei: 0 és 1, eloszlása

$$P\{\xi = 1\} = p, \quad P\{\xi = 0\} = 1 - p.$$

Ezt az eloszlást **p paraméterű Bernoulli–eloszlásnak** nevezzük.

Nyilván

$$E\xi = p \cdot 1 + (1 - p) \cdot 0 = p,$$

$$E(\xi^2) = p \cdot 1^2 + (1 - p) \cdot 0^2 = p,$$

$$\text{var } \xi = E(\xi^2) - (E\xi)^2 = p - p^2 = p(1 - p).$$

(n, p) paraméterű Binomiális eloszlás

A esemény, $p := P(A)$; n független kísérlet; A gyakorisága:
 $\xi := k_n(A)$ diszkrét valószínűségi változó; lehetséges értékeinek
 halmaza: $\{0, 1, 2, \dots, n\}$, eloszlása

$$P\{\xi = k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Ha $\xi_i := \begin{cases} 1 & \text{ha } A \text{ beköv. az } i\text{-edik alkalommal,} \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$

akkor $\xi = \xi_1 + \dots + \xi_n$, és $\xi_1, \dots, \xi_n$ független, p paraméterű Bernoulli-eloszlásúak. Ezért

$$E \xi = E \xi_1 + \dots + E \xi_n = np,$$

$$\text{var } \xi = \text{var } \xi_1 + \dots + \text{var } \xi_n = np(1-p).$$

Módusza: $\lfloor (n+1)p \rfloor$, és még $\lfloor (n+1)p \rfloor - 1$ is, ha $(n+1)p$ egész.

$(n, M, N - M)$ paraméterű hipergeometrikus eloszlás

Egy dobozban M piros és $N - M$ fekete golyó van ($M < N$). Visszatevés nélkül húzunk ki n golyót ($n \leq N$), és ξ jelöli a kihúzott piros golyók számát. Ekkor ξ olyan k értékeket vehet fel, melyre teljesül $0 \leq k \leq n$, $k \leq M$, és $n - k \leq N - M$, eloszlása

$$P\{\xi = k\} = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Ha $\xi_i := \begin{cases} 1 & \text{ha az } i\text{-edik golyó piros,} \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$ akkor $\xi = \xi_1 + \dots + \xi_n$, és a

$\xi_1, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók $\frac{M}{N}$ paraméterű Bernoulli-eloszlásúak, DE NEM FÜGGETLENEK! Például $i \neq j$ esetén

$$P\{\xi_i = 1, \xi_j = 1\} = \frac{M(M-1)}{N(N-1)}, \quad P\{\xi_i = 1\} = P\{\xi_j = 1\} = \frac{M}{N}.$$

$$E \xi = E \xi_1 + \cdots + E \xi_n = n \cdot \frac{M}{N},$$

$$\begin{aligned} \text{var } \xi &= \text{cov}(\xi, \xi) = \text{cov} \left(\sum_{i=1}^n \xi_i, \sum_{j=1}^n \xi_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \text{cov}(\xi_i, \xi_j) = \sum_{i=1}^n \text{var } \xi_i + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{cov}(\xi_i, \xi_j), \end{aligned}$$

ahol

$$\text{var } \xi_i = \frac{M}{N} \left(1 - \frac{M}{N} \right), \quad \text{cov}(\xi_i, \xi_j) = \frac{M(M-N)}{N^2(N-1)},$$

így

$$\text{var } \xi = n \cdot \frac{M}{N} \cdot \left(1 - \frac{M}{N} \right) \cdot \frac{N-n}{N-1}$$

p paraméterű elsőrendű negatív binomiális eloszlás

A esemény, $p := P(A)$, melyre $0 < p < 1$. Jelölje $\xi :=$ az A első bekövetkezéséhez szükséges független kísérletek számát; lehetséges értékei: $1, 2, \dots, \infty$, eloszlása: $P\{\xi = \infty\} = 0$, és

$$P\{\xi = k\} = p \cdot (1 - p)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$E\xi = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p(1-p)^{k-1} = p \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1},$$

ahol $q := 1 - p$, és

$$\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} (q^k)' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k \right)' = \left(\frac{1}{1-q} \right)' = \frac{1}{(1-q)^2},$$

így

$$E\xi = p \cdot \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}.$$

14.7 Fontos eloszlások

$$\begin{aligned} E(\xi^2) &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot p(1-p)^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} [k + k(k-1)] \cdot p(1-p)^{k-1} \\ &= p \sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1} + pq \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) q^{k-2}, \end{aligned}$$

ahol

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) q^{k-2} = \sum_{k=1}^{\infty} (q^k)'' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k \right)'' = \left(\frac{1}{1-q} \right)'' = \frac{2}{(1-q)^3},$$

így

$$E(\xi^2) = \frac{1}{p} + pq \cdot \frac{2}{(1-q)^3} = \frac{2-p}{p^2}.$$

Végül

$$\text{var } \xi = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}.$$

λ paraméterű Poisson-eloszlás

$$P\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad \text{ahol } \lambda > 0.$$

$$E\xi = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = e^{-\lambda} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\lambda^{\ell+1}}{\ell!} = e^{-\lambda} \lambda e^{\lambda} = \lambda,$$

$$\begin{aligned} E(\xi^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} [k + k(k-1)] \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\ &= \lambda + e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-2)!} = \lambda + e^{-\lambda} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\lambda^{\ell+2}}{\ell!} = \lambda + \lambda^2, \end{aligned}$$

$$\text{var } \xi = \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = \lambda.$$

Egyenletes eloszlás az $\{1, 2, \dots, N\}$ halmazon

$$P\{\xi = k\} = \frac{1}{N}, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

$$E\xi = \sum_{k=1}^N k \cdot \frac{1}{N} = \frac{N(N+1)}{2N} = \frac{N+1}{2},$$

$$E(\xi^2) = \sum_{k=1}^N k^2 \cdot \frac{1}{N} = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6N} = \frac{(N+1)(2N+1)}{6},$$

$$\text{var } \xi = \frac{(N+1)(2N+1)}{6} - \frac{(N+1)^2}{4} = \frac{N^2 - 1}{12}.$$

Egyenletes eloszlás az $[a, b]$ intervallumon

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{ha } a < x \leq b, \\ 1 & \text{ha } x > b. \end{cases} \quad f_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{ha } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

$\xi = a + (b - a) \cdot \eta$ ahol η egyenletes eloszlású a $[0, 1]$ intervallumon, hiszen

$$P\{\eta < y\} = P\left\{\frac{\xi - a}{b - a} < y\right\} = P\{\xi < a + (b - a)y\} = \begin{cases} 0 & \text{ha } y \leq 0, \\ y & \text{ha } 0 \leq y \leq 1, \\ 1 & \text{ha } y \geq 1. \end{cases}$$

$$E\eta = \int_0^1 y \, dy = \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{2},$$

$$E(\eta^2) = \int_0^1 y^2 \, dy = \left[\frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{3},$$

$$\text{var } \eta = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12},$$

ezért

$$E\xi = a + (b - a)E\eta = a + \frac{b - a}{2} = \frac{a + b}{2},$$

$$\text{var } \xi = (b - a)^2 \text{var } \eta = \frac{(b - a)^2}{12}.$$

λ paraméterű exponenciális eloszlás

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{ha } x \geq 0, \end{cases} \quad \text{ahol } \lambda > 0.$$

$$E\xi = \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \left[-x e^{-\lambda x} \right]_{x=0}^{x=\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx = \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_{x=0}^{x=\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

$$\begin{aligned} E(\xi^2) &= \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \left[-x^2 e^{-\lambda x} \right]_{x=0}^{x=\infty} + 2 \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx \\ &= \frac{2}{\lambda} \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2}, \end{aligned}$$

$$\text{var } \xi = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

(m, σ^2) paraméterű normális eloszlás

$$f_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \text{ahol } m \in \mathbb{R}, \sigma > 0.$$

$E\xi = m$, $\text{var } \xi = \sigma^2$, ferdesége 0, csúcsossága 0.

Eloszlásfüggvénye:

$$F_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(u-m)^2}{2\sigma^2}} du, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Továbbá $\xi = \sigma \cdot \eta + m$, ahol η standard normális eloszlású, azaz paraméterei $m = 0$, $\sigma = 1$ így eloszlásfüggvénye

$$\Phi(x) := F_{\eta}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du, \quad x \in \mathbb{R},$$

melynek értékei táblázatokban megtalálhatók.