

Gazdasági matematika II. vizsgadolgozat megoldása, 2014. június 10

A dolgozatírásnál íróeszközön kívül más **segédeszköz nem használható.**

A dolgozat időtartama: 90 perc.

Ha a dolgozat első részéből szerzett pontok száma kisebb mint 15, akkor a dolgozat jegye elégtelen, a második részt nem javítjuk ki.

I. rész (minimum kérdések)

1. (m, σ^2) paraméterű normális eloszlás sűrűségfüggvénye. (4 pont)

MEGOLDÁS: Az (m, σ^2) paraméterű normális eloszlás sűrűségfüggvénye

$$f_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

2. Diszkrét valószínűségi változó várható értékének definíciója. (4 pont)

MEGOLDÁS: Ha a $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ diszkrét valószínűségi változó lehetséges értékei $x_1, x_2, \dots$, akkor ξ **várható értéke**

$$E\xi := \sum_k x_k \cdot P\{\xi = x_k\},$$

amennyiben ez a sor abszolút konvergens.

3. $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ **kétváltozós** függvény szélsőértékének másodrendű elegendő feltétele (**determinánsok segítségével**). (4 pont)

MEGOLDÁS: Tegyük fel, hogy az $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ összes második parciális deriváltjai folytonosak az $x_0 \in D$ belső pont egy környezetében, továbbá

$$\partial_1 f(x_0) = \partial_2 f(x_0) = 0,$$

azaz x_0 *stacionárius pontja* f -nek. Legyen

$$\Delta_1(x_0) : = \partial_1 \partial_1 f(x_0)$$

$$\Delta_2(x_0) : = \begin{vmatrix} \partial_1 \partial_1 f(x_0) & \partial_1 \partial_2 f(x_0) \\ \partial_2 \partial_1 f(x_0) & \partial_2 \partial_2 f(x_0) \end{vmatrix}.$$

- I. Ha $\Delta_1(x_0) > 0$, $\Delta_2(x_0) > 0$ akkor f -nek **szigorú lokális minimuma** van x_0 -ban,
II. ha $\Delta_1(x_0) < 0$, $\Delta_2(x_0) > 0$ akkor f -nek **szigorú lokális maximuma** van x_0 -ban,
III. ha $\Delta_2(x_0) < 0$ akkor f -nek **nincs szélsőértéke** x_0 -ban.

4. Számítsa ki a $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}$ parciális deriváltakat, ha $f(x, y) := \frac{\operatorname{tg}(x^2 + y^2)}{\ln(7x^3 + e^x + 10)}$ $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. (8 pont)

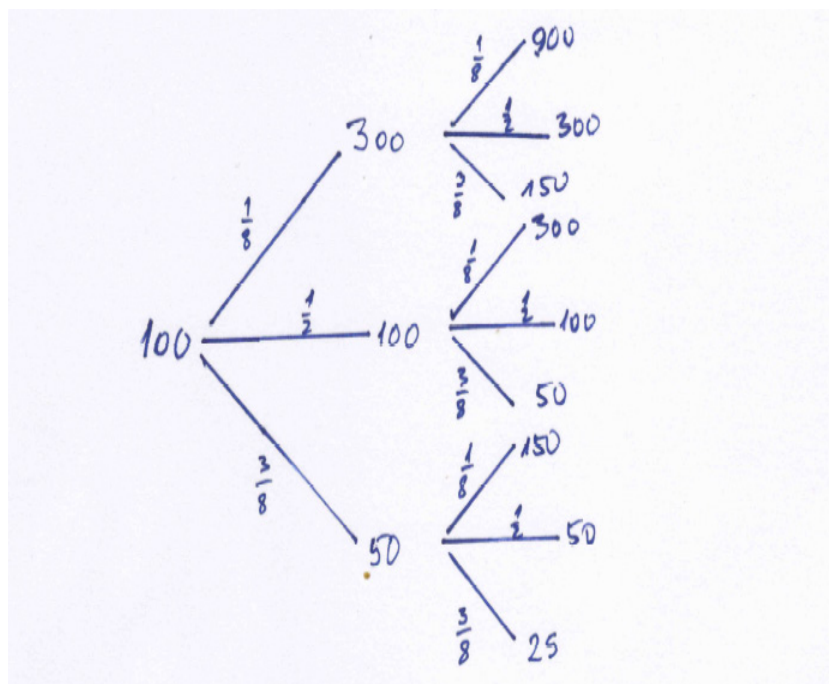
MEGOLDÁS:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\frac{2y}{\cos^2(x^2 + y^2)}}{\ln(7x^3 + e^x + 10)} = \frac{2y}{\cos^2(x^2 + y^2) \cdot \ln(7x^3 + e^x + 10)},$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{-2y(2\cos^2(x^2 + y^2))(-\sin(x^2 + y^2))2x \cdot \ln(7x^3 + e^x + 10) + \cos^2(x^2 + y^2) \frac{21x^2 + e^x}{7x^3 + e^x + 10}}{\cos^4(x^2 + y^2) \cdot \ln^2(7x^3 + e^x + 10)}.$$

5. Egy részvény kiinduló ára száz forint. Egy év múlva vagy háromszorosára növekszik az ára, vagy felére csökken, vagy pedig változatlan marad. A növekedés valószínűsége harmad akkora, mint a csökkenése, és $1/2$ annak valószínűsége, hogy az ár változatlan marad. A következő évben ugyanez történik, az első évi változástól függetlenül. Mi lesz két év múlva a részvényár eloszlása? (Azaz milyen értékeket vehet fel milyen valószínűséggel?) Mennyi két év múlva a részvényár várható értéke? (10 pont)

MEGOLDÁS: Ha a csökkenés valószínűsége x akkor a feladat feltétele szerint $x + x/3 = 1/2$, amiből $x = 3/8$. A növekedés valószínűsége pedig $x/3 = 1/8$. A részvényárak változását az alábbi fa mutatja:



Látható, hogy 2 év múlva a lehetséges részvényárak, vagyis a ξ értékei 900, 300, 150, 100, 50, 25 a megfelelő valószínűségek pedig rendre $\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8}$, $2 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2}$, $2 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{8}$, $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$, $2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8}$, $\frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8}$. Ezért ξ várható értéke

$$E\xi = 900 \cdot \frac{1}{64} + 300 \cdot \frac{8}{64} + 150 \cdot \frac{6}{64} + 100 \cdot \frac{16}{64} + 50 \cdot \frac{24}{64} + 25 \cdot \frac{9}{64} = \frac{7225}{64} \approx 112,8.$$

II. rész

1. Függvény iránymenti deriváltjának definíciója.

(4 pont)

MEGOLDÁS: Az $f : D \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ függvény $x_0 \in D$ belső pontban az e (ahol e egy $\mathbb{R}^k$ -beli egységvektor) irány menti deriváltján a

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + te) - f(x_0)}{t}$$

(véges) határértéket értjük.

2. Determináns definíciója.

(4 pont)

MEGOLDÁS: Legyen $A = (a_{ij})$ egy n -edrendű kvadratikus mátrix. Az A mátrix *determinánsán* az

$$|A| := \sum_{\alpha \in S_n} (-1)^{I(\alpha)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n}$$

számot értjük, ahol az összegezés kiterjed az $1, 2, \dots, n$ számok összes $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ permutációjára, és $I(\alpha)$ az α permutáció inverzióinak számát (az inverzióban álló párok számát) jelöli.

3. Általános lineáris egyenletrendszer megoldhatóságának kritériuma.

(4 pont)

MEGOLDÁS: Az

$$Ax = b \quad (A \in \mathbb{R}^{k \times n}, x \in \mathbb{R}^{n \times 1}, b \in \mathbb{R}^{k \times 1})$$

lineáris egyenletrendszer akkor is csakis akkor oldható meg, ha a

$$\text{rang } A = \text{rang } (A | b)$$

rangfeltétel teljesül, ahol A a rendszer mátrixa, $(A | b)$ a bővített mátrix, melyet az A mátrixból úgy kapunk, hogy az A mátrixhoz $n + 1$ -edik oszlopként hozzáírjuk a szabad tagok b oszlopvektorát.

4. Fogalmazza meg a teljes valószínűség tételét!

(4 pont)

MEGOLDÁS:

5. Írja fel az $\{1, 2, 3, 4\}$ elemek (a) összes másodosztályú ismétlés nélküli variációját, (b) ugyanezen elemek összes másodosztályú ismétléses kombinációját!

(7 pont)

MEGOLDÁS:

(a) 1,2; 1,3; 1,4; 2,1; 3,1; 4,1; 2,3; 2,4; 3,2; 4,2; 3,4; 4,3

(b) 1,1; 1,2; 1,3; 1,4; 2,2; 2,3; 2,4; 3,3; 3,4; 4,4

6. Határozza meg az $f(x, y) = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$, $((x, y) \in \mathbb{R}^2)$ függvény stacionárius pontjait, lokális szélsőérték helyeit, és azok típusát.

(13 pont)

MEGOLDÁS:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 8x^3 - 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4y^3 - 4y,$$

a stacionárius pontokat a

$$\begin{aligned} 8x^3 - 2x &= 0 \\ 4y^3 - 4y &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszerből lehet meghatározni. Az első egyenletből $2x(4x^2 - 1) = 0$, amiből a megoldások $x = 0$, $x = 1/2$, $x = -1/2$. A második egyenletet $4y(y^2 - 1) = 0$ alakba írva kapjuk, hogy a megoldások $y = 0$, $y = 1$, $y = -1$. Mivel a két egyenlet független így az első egyenlet megoldásai a második egyenlet minden megoldásával párosodnak, ezért 9 stacionárius pont van

$P_1(0, 0)$, $P_2(0, 1)$, $P_3(0, -1)$, $P_4(1/2, 0)$, $P_5(1/2, 1)$, $P_6(1/2, -1)$, $P_7(-1/2, 0)$, $P_8(-1/2, 1)$, $P_9(-1/2, -1)$.

Annak eldöntéséhez, hogy a stacionárius pontokban van-e szélsőérték, és ha igen akkor milyen, ki kell számolnunk a második parciális deriváltakat és a Δ_1, Δ_2 determinánsokat (elég az előjelüket tudni) a stacionárius pontokban.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 24x^2 - 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 12y^2 - 4,$$

és

$$\Delta_1(x, y) = 2(12x^2 - 1), \quad \Delta_2(x, y) = \begin{vmatrix} 2(12x^2 - 1) & 0 \\ 0 & 4(3y^2 - 1) \end{vmatrix} = 8(12x^2 - 1)(3y^2 - 1).$$

A megoldás

Stac. pont	Δ_1	Δ_2	Következtetés
P_1	–	+	szig.lok. maximum
P_2	–	–	nyeregpont, nincs szélsőérték
P_3	–	–	nyeregpont, nincs szélsőérték
P_4	+	–	nyeregpont, nincs szélsőérték
P_5	+	+	szig. lok. minimum
P_6	+	+	szig. lok. minimum
P_7	+	–	nyeregpont, nincs szélsőérték
P_8	+	+	szig. lok. minimum
P_9	+	+	szig. lok. minimum

7. A debreceni Auchan áruház pénztárainál a várakozási idő exponenciális eloszlású. Annak a valószínűsége, hogy egy pénztárnál 2 percnél többet kell várni, a tapasztalatok szerint 0,3. Mennyi a valószínűsége annak, hogy véletlenszerűen ehhez a pénztárhoz érkezve 6 percen belül fizethetünk? (A numerikus értéket nem kell kiszámolni!) (9 pont)

MEGOLDÁS: Jelölje ξ a várakozási időt percekben mérve, akkor feladat szerint

$$0,3 = P(\xi > 2) = 1 - P(\xi \leq 2) = 1 - F_\xi(2) = 1 - (1 - e^{-2\lambda}) = e^{-2\lambda}$$

amiből $-2\lambda = \ln 0,3$, $\lambda = 1/2 \ln 0,3$.

A kérdéses valószínűség

$$P(\xi < 6) = 1 - e^{-6\lambda} = 1 - e^{3 \ln 0,3} = 1 - 0,3^3 = 1 - 0,027 = 0,973.$$

8. Egy ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f(x) = \begin{cases} a(\sin x + 1) & \text{ha } |x| \leq \pi/2, \\ 0 & \text{ha } |x| > \pi/2. \end{cases}$ Határozza meg az a együttható értékét, határozza meg ξ eloszlásfüggvényét és várható értékét is! (12 pont)

MEGOLDÁS: A a paraméter kiszámolása:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = a \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin x + 1) dx = a [-\cos x + x]_{-\pi/2}^{\pi/2} = a\pi$$

amiből $a = 1/\pi$. A F eloszlásfüggvényre

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq -\pi/2 \\ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^x (\sin t + 1) dt = \frac{1}{\pi} (\pi/2 + x - \cos x) & \text{ha } -\pi/2 < x \leq \pi/2 \\ 1 & \text{ha } \pi/2 < x. \end{cases}$$

$$E\xi = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x(\sin x + 1) dx = \frac{1}{\pi} \left[x(-\cos x + x) - \left(-\sin x + \frac{x^2}{2} \right) \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{2}{\pi}.$$

9. A (ξ, η) valószínűségi vektorváltozó lehetséges értékeit és a megfelelő valószínűségeket az alábbi táblázatban adjuk meg:

$\xi \backslash \eta$	-1	0	2
-1	p	$3p$	p
0	$2p$	$3p$	p
2	$2p$	p	p

Határozza meg p értékét! Számítsa ki a ξ, η peremeloszlását, várható értéküket, varianciájukat. Független-e ξ és η ? Határozza meg $\zeta = \xi + \eta$ eloszlását, várható értékét, továbbá $\text{cov}(\xi, \eta)$ értékét. (13 pont)

MEGOLDÁS: A táblázatban szereplő valószínűségek összege $15p = 1$, amiből $p = \frac{1}{15}$. A peremeloszlások:

$$P(\xi = -1) = \frac{5}{15}, P(\xi = 0) = \frac{6}{15}, P(\xi = 2) = \frac{4}{15}, P(\eta = -1) = \frac{5}{15}, P(\eta = 0) = \frac{7}{15}, P(\eta = 2) = \frac{3}{15}.$$

A várható értékek:

$$\begin{aligned} E\xi &= -1 \cdot \frac{5}{15} + 2 \cdot \frac{4}{15} = \frac{3}{15}, & E\xi^2 &= (-1)^2 \cdot \frac{5}{15} + 2^2 \cdot \frac{4}{15} = \frac{21}{15}, \\ E\eta &= -1 \cdot \frac{5}{15} + 2 \cdot \frac{3}{15} = \frac{1}{15}, & E\eta^2 &= (-1)^2 \cdot \frac{5}{15} + 2^2 \cdot \frac{3}{15} = \frac{17}{15}, \end{aligned}$$

amiből

$$\text{var } \xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \frac{306}{225}, \quad \text{var } \eta = E\eta^2 - (E\eta)^2 = \frac{254}{225}.$$

ξ és η nem függetlenek, mivel

$$\frac{1}{15} = E(\xi = -1, \eta = -1) \neq E(\xi = -1) E(\eta = -1) = \frac{5}{15} \cdot \frac{5}{15}.$$

$\zeta = \xi + \eta$ értékei: $-2, -1, 1, 0, 2, 4$ a megfelelő valószínűségek rendre $\frac{1}{15}, \frac{5}{15}, \frac{3}{15}, \frac{3}{15}, \frac{2}{15}, \frac{1}{15}$ ezért

$$E\zeta = -2 \cdot \frac{1}{15} + (-1) \cdot \frac{5}{15} + 1 \cdot \frac{3}{15} + 0 \cdot \frac{3}{15} + 2 \cdot \frac{2}{15} + 4 \cdot \frac{1}{15} = \frac{4}{15},$$

$$E\zeta^2 = 4 \cdot \frac{1}{15} + 1 \cdot \frac{5}{15} + 1 \cdot \frac{3}{15} + 0 \cdot \frac{3}{15} + 4 \cdot \frac{2}{15} + 16 \cdot \frac{1}{15} = \frac{36}{15},$$

$$\text{var } \zeta = E\zeta^2 - (E\zeta)^2 = \frac{36}{15} - \frac{16}{225} = \frac{524}{225}.$$

$\text{cov}(\xi, \eta)$ értékét a $\text{cov}(\xi, \eta) = \frac{1}{2} (\text{var}(\xi + \eta) - \text{var}\xi - \text{var}\eta)$ képlettel számolva, kapjuk, hogy

$$\text{cov}(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \left(\frac{524}{225} - \frac{306}{225} - \frac{254}{225} \right) = -\frac{18}{225}.$$

Ugyanez jön ki, ha a $\text{cov}(\xi, \eta) = E(\xi \cdot \eta) - E\xi E\eta$ képletet használjuk ($E(\xi \cdot \eta) = -\frac{1}{15}$).