

Gazdasági matematika I. vizsgadolgozat megoldása, 2014. 14 január

I. rész (minimum kérdések)

1. Függvény folytonossága egy pontban. (4 pont)

Az $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt **folytonosnak** nevezzük az $x_0 \in D$ pontban, ha bármely D -beli x_0 -hoz konvergáló $x_n \in D$ ($n \in \mathbb{N}$), $x_n \rightarrow x_0$ ($n \rightarrow \infty$) sorozat esetén a függvényértékek $f(x_n)$ ($n \in \mathbb{N}$) sorozata az x_0 pontbeli függvényértékhez tart $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$.

vagy

Az $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt értelmezési tartományának $x_0 \in D$ pontjában *folytonosnak* nevezzük, ha bármely $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $\delta(\varepsilon) > 0$, hogy

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{ha} \quad |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \text{ és } x \in D \text{ teljesül.}$$

2. Primitív függvény. (4 pont)

Legyen $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ adott függvény ($I \subset \mathbb{R}$ egy intervallum). A $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt a f függvény *primitív függvényének* nevezzük I -n, ha

F differenciálható I -n,

$$F'(x) = f(x) \quad (x \in I).$$

3. A területmérő függvény tulajdonságai. (4 pont)

Ha $f \in \mathcal{R}[a, b]$ és T az f területmérő függvénye, akkor

(1) T folytonos $[a, b]$ -n,

(2) ha f folytonos $x_0 \in [a, b]$ -ben, akkor T differenciálható x_0 -ban, és $T'(x_0) = f(x_0)$.

4. Deriválja az $f(x) = \operatorname{arctg}(2x + 3) + \operatorname{ctg} x$, $g(x) = \frac{\sin(x^2 + 5) + x + 9}{\ln x - 7}$ függvényeket! (8 pont)

$$f'(x) = \frac{2}{1 + (2x + 3)^2} - \frac{1}{\sin^2 x},$$

$$g'(x) = \frac{(\cos(x^2 + 5) \cdot 2x + 1)(\ln x - 7) - (\sin(x^2 + 5) + x + 9) \frac{1}{x}}{(\ln x - 7)^2}$$

5. Határozza meg az $\int \frac{3}{\sqrt{x^2 + 9}} dx$, $\int (x - 5) \cos x dx$ integrálokat! (10 pont)

$$\int \frac{3}{\sqrt{x^2 + 9}} dx = \int \frac{3}{\sqrt{x^2 + 3^2}} dx = 3 \ln |x + \sqrt{x^2 + 3^2}| + C,$$

$$\int (x - 5) \cos x dx = (x - 5) \sin x - \int 1 \cdot \sin x dx = (x - 5) \sin x + \cos x + C$$

Az első integráláshoz a fóliák 100. oldalán további alapintegrálok c. alatt található képletet kell alkalmazni, a második integrált $f'(x) = \cos x$, $g(x) = x - 5$ szereposztással parciális integrálással kell kiszámítani.

II. rész

1. Számhalmaz pontos felső határa.

(4 pont)

Az $s \in \mathbb{R}$ számot az A halmaz *pontos felső korlátjának* (vagy *suprémumának*) nevezzük, ha

- s az A felső korlátja
- A bármely s' felső korlátjára $s \leq s'$.

Jelölés $s = \sup A$.

2. Egy $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény határértéke az $x_0 \in D'$ pontban.

(4 pont)

Legyen $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és legyen $x_0 \in D'$. Azt mondjuk, hogy f -nek van **(véges, vagy végtelen) határértéke az x_0 pontban**, ha van olyan $a \in \mathbb{R}_b$ bővített valós szám, hogy bármely olyan D -beli $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatra, melyre $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ és $x_n \neq x_0$, teljesül a $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$ egyenlőség.

(a -t az f függvény x_0 pontbeli határértékének nevezzük, és $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ -val, vagy $f(x) \rightarrow a$ ($x \rightarrow x_0$)-al jelöljük.)

3. Lagrange-féle középértéktétel.

(4 pont)

Legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos $[a, b]$ -n, differenciálható $]a, b[$ -n, akkor van olyan $\xi \in]a, b[$, melyre

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

4. Az integrálszámítás középértéktétele.

(4 pont)

$$\text{Ha } f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \in \mathcal{R}[a, b], \quad \text{akkor } m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a), \quad \text{ahol}$$
$$m := \inf_{x \in [a, b]} f(x), \quad M := \sup_{x \in [a, b]} f(x).$$

$$(\text{Ha } f \text{ folytonos } [a, b]\text{-n, akkor } \exists \xi \in [a, b], \text{ melyre } f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f.)$$

5. Számítsa ki a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\sqrt{3n^2 + 12n} - \sqrt{2n^2 - 2}}$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n + 2^{3n}}{2 \cdot 8^n + 2^n + 10^5}$ határértékeket!

(10 pont)

Megoldás:

$$\frac{2n}{\sqrt{3n^2 + 12n} - \sqrt{2n^2 - 2}} = \frac{2}{\sqrt{3 + 12/n} - \sqrt{2 - 2/(n^2)}} \rightarrow \frac{2}{\sqrt{3} - \sqrt{2}},$$

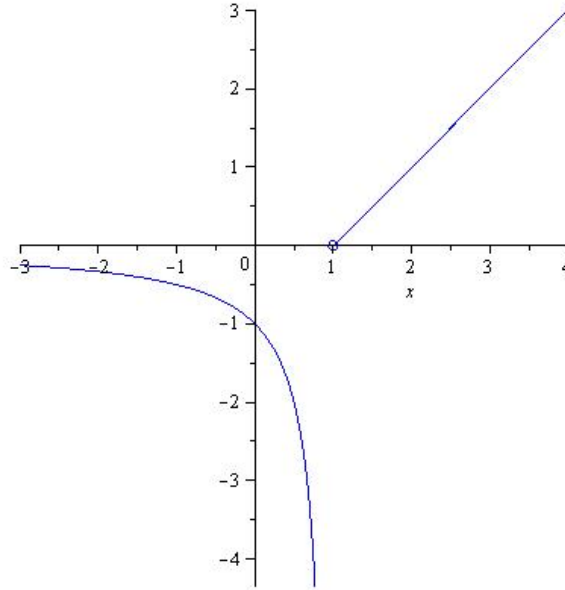
$$\frac{4^n + 2^{3n}}{2 \cdot 8^n + 2^n + 10^5} = \frac{(4/8)^n + 1}{2 + (2/8)^n + 10^5/(8^n)} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

Az első határérték úgy is kiszámítható, hogy a törtet a nevezőben lévő két gyök összegével bővítjük, majd n^2 -tel való egyszerűsítés után vesszük a határértéket, ekkor eredményként $2(\sqrt{3} + \sqrt{2})$ -t kapunk, ami az előzővel azonos, (az előzőből a nevező gyöktelenítésével kapható meg).

6. Vázolja az $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1}, & \text{ha } x \leq 1, \\ x-1, & \text{ha } x > 1, \end{cases}$ függvény gráfját, és ennek segítségével állapítsa meg értelmezési tartományát, értékkészletét, szakadási pontjait, jobb- és baloldali határértékét a szakadási pontokban és a végtelenekben (ha léteznek)!

(9 pont)

Megoldás: f gráfja:



$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}, \mathcal{R}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ szakadási pont $x_0 = 1$,

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0.$$

MEGJEGYZÉS. A definíció szerint a függvény $1/(x-1)$ ha $x \leq 1$, de ez a képlet $x = 1$ -nél értelmetlen, így a függvény ebben a pontban nincs definiálva!

7. Határozza meg az $\int \frac{e^{2x}}{2+e^x} dx$, $\int_5^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ integrálokat! (12 pont)

Megoldás: Az első integrált pl. az $2+e^x = t$ helyettesítéssel számolhatjuk ki. Ekkor $e^x = t-2$, $x = \ln(t-2)$, $dx = \frac{dt}{t-2}$ így

$$\int \frac{e^{2x}}{2+e^x} dx = \int \frac{(t-2)^2 \frac{1}{t-2} dt}{t} = \int \frac{t-2}{t} dt = \int \left(1 - \frac{2}{t}\right) dt = t - 2 \ln |t| + C = 2 + e^x + 2 \ln(2 + e^x) + C,$$

$$\int_5^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_5^t \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} (\arctg t - \arctg 5) = \pi/2 - \arctg 5.$$

8. Határozza meg az $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x$, ($x \in \mathbb{R}$) függvény zérushelyeit, lokális szélsőérték-helyeit (és azok típusát), konvex, konkáv szakaszait, inflexiók helyeit, és ábrázolja a függvényt ($\sqrt{105} \approx 10,24$)! (13 pont)

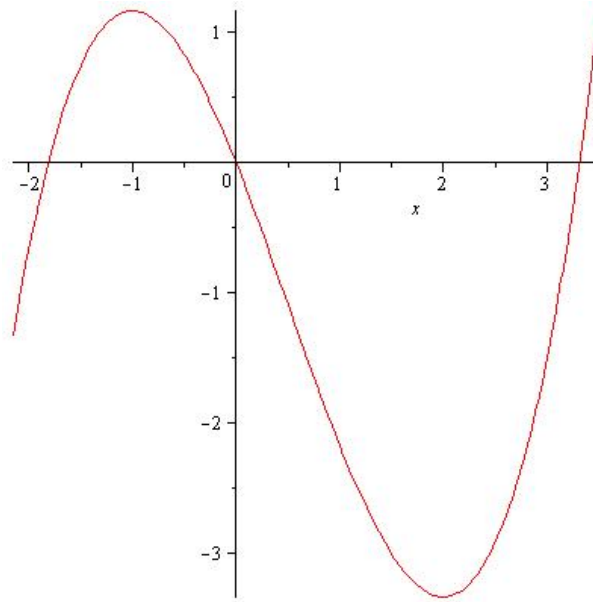
Megoldás: $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x = \frac{x}{6}(2x^2 - 3x - 12)$, az $\frac{x}{6}(2x^2 - 3x - 12) = 0$ egyenletből f zérushelyei $x_0 = 0, x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+96}}{4} \approx \frac{3 \pm 10,2}{4}$ $x_1 \approx 3,3, x_2 \approx -1,8$.

$f'(x) = x^2 - x - 2$, f stacionárius pontjai az $x^2 - x - 2 = 0$ egyenletből $x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$, $x_3 = 2$, $x_4 = -1$.

$f''(x) = 2x - 1$, így f inflexiós helye a $2x - 1 = 0$ egyenletből $x_5 = \frac{1}{2}$. Mivel $f''(x_3) > 0$, az x_3 pontban szigorú lokális minimuma van f -nek, $f''(x_4) < 0$ miatt az x_4 pontban szigorú lokális maximuma van f -nek.

f konvex ha $x \geq 1/2$, konkáv, ha $x \leq 1/2$.

A függvény gráfját az alábbi ábra mutatja.



9. Számolja ki az $\iint_D (y \cos x - 3y^2) dx dy$ kettős integrált ha $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq 2\}$! (10 pont)

Megoldás:

$$\begin{aligned} \iint_D (y \cos x - 3y^2) dx dy &= \int_0^\pi \left[\int_0^2 (y \cos x - 3y^2) dy \right] dx = \int_0^\pi \left[\frac{y^2}{2} \cos x - y^3 \right]_{y=0}^{y=2} dx \\ &= \int_0^\pi (2 \cos x - 8) dx = [2 \sin x - 8x]_0^\pi = 2 \sin \pi - 8\pi - (2 \sin 0 - 8 \cdot 0) = -8\pi, \end{aligned}$$