

A MATEMATIKA I. ELŐADÁS RÉSZLETES TEMATIKÁJA

2005/6, I. félév

1. HALMAZOK ÉS RELÁCIÓK

1.1 MŰVELETEK HALMAZOKKAL

Definíciók, fogalmak: halmaz, elem, üres halmaz, halmazok egyenlősége, részhalmaz, halmazok uniója, metszete, különbsége, (Descartes-féle) szorzata, halmaz komplementere, unió és metszet halmazrendszer esetén.

Tételek, állítások: a részhalmaz reláció tulajdonságai, a halmaz műveletek tulajdonságai.

1.2 RELÁCIÓK, FÜGGVÉNYEK

Definíciók, fogalmak: binér reláció, értelmezési tartomány, értékészlet, inverz reláció. Fontos reláció típusok: ekvivalencia reláció, félig rendezés, (rendezés), függvény. Függvény értelmezési tartománya, értékészlete, injektív, szürjektív, bijektív függvény.

Tételek, állítások: ekvivalencia relációk jellemzése az alaphalmaz osztályozásával.

1.3 HALMAZOK SZÁMOSSÁGA

Definíciók, fogalmak: egyenlő számosságú halmazok, véges, végtelen, megszámlálhatóan végtelen, kontinuum számosság. Megszámlálható (=véges vagy megszámlálhatóan végtelen) és nem megszámlálható halmazok.

Tételek, állítások: ld. gyakorlat anyaga

2. VALÓS SZÁMOK

2.1 A VALÓS SZÁMOK AXIÓMARENDSZERE

Definíciók, fogalmak: művelet, test, rendezett test, teljes rendezett test. Felülről és alulról korlátos (rész)halmaz (félig rendezett halmazban), pontos alsó és felső korlát. Intervallumok, abszolút érték, távolság. Az $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ halmazok.

Tételek, állítások: $\mathbb{R}$ létezése és egyértelműsége, abszolút érték, és távolság tulajdonságai. Cantor tétel(B)

2.2 TOPOLÓGIKUS FOGALMAK, BOLZANO–WEIERSTRASS TÉTEL

Definíciók, fogalmak: környezet, $\mathbb{R}$ –beli halmaz belső, izolált, torlódási, határpontja. Nyílt és zárt halmaz.

Tételek, állítások: zárt halmazok jellemzése, Bolzano–Weierstrass tétel(B).

3. KOMPLEX SZÁMOK

3.1 DEFINÍCIÓ ÉS ALAPTULAJDONSÁGOK

Definíciók, fogalmak: komplex számtest definíciója, komplex számok alakjai (számpár, binom, trigonometrikus alak), komplex szám konjugáltja, abszolút értéke, valós és képzetes része.

Tételek, állítások: konjugálás és abszolút érték tulajdonságai (B).

3.2 A KOMPLEX SZÁMOK ÁBRÁZOLÁSA

Definíciók, fogalmak: komplex számok ábrázolása a komplex síkon, hatványozás, gyökvonás.

Tételek, állítások: az összeadás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás geometriai interpretációja.

4. SOROZATOK

4.1 KONVERGENCIA, KORLÁTOSSÁG, MONOTONITÁS

Definíciók, fogalmak: sorozat, korlátosság, monotonitás, konvergencia, divergencia.

Tételek, állítások: határérték egyértelműsége, konvergencia környezetes átfogalmazása, véges sok elem befolyása a konvergenciára. Konvergencia és korlátosság kapcsolata, monoton korlátos sorozat konvergenciája (B).

4.2 MŰVELETEK KONVERGENS SOROZATOKKAL

Definíciók, fogalmak: műveletek definíciója.

Tételek, állítások: műveletek és konvergencia, határérték kapcsolata.

4.3 KONVERGENCIA ÉS RENDEZÉS

Definíciók, fogalmak: jeltartóság.

Tételek, állítások: konvergencia és jeltartóság, monotonitás kapcsolata, rendőrtétel.

4.4 BŐVITETT VALÓS SZÁMOK, VÉGTELENHEZ TARTÓ SOROZATOK

Definíciók, fogalmak: $\mathbb{R}_b$, számolási szabályok, rendezés kapcsolata, végtelenhez tartó sorozatok, inf, sup kiterjesztése.

Tételek, állítások: műveletek és határérték kapcsolata, ha a határérték $\mathbb{R}_b$ -ben van.

4.5 NEVEZETES HATÁRÉRTÉKEK

Definíciók, fogalmak:–

Tételek, állítások: nevezetes sorozatok konvergenciája, határértékei.

5. SOROK

5.1 SZÁMSOROK, KONVERGENCIA

Definíciók, fogalmak: sor, konvergencia, összeg, divergencia, geometriai és harmónikus sor, abszolút és feltételes konvergencia.

Tételek, állítások: a konvergencia szükséges feltétele, Leibniz tétel váltakozó előjelű sorokra, abszolút konvergens sorok tulajdonságai.

5.2 POZITÍV TAGÚ SOROK

Definíciók, fogalmak: pozitív tagú sor, majorálás, minorálás.

Tételek, állítások: majoráns (minoráns) teszt, hányados (d'Alembert) és gyök (Cauchy) teszt, limeszes alakok (B).

5.3 FÜGGVÉNYSOROK, HATVÁNYSOROK

Definíciók, fogalmak: függvénysor, konvergencia, divergenciahalmoz, hatványsor.

Tételek, állítások: hatványsor konvergenciahalmaza, konvergenciasugár, és kiszámolása.

6. FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE ÉS FOLYTONOSSÁGA

6.1 FÜGGVÉNY HATÁRÉRTÉKE

Definíciók, fogalmak: függvény véges határértéke, és általánosításai: határérték a végtelenben, végtelen határérték, egyoldali határérték.

Tételek, állítások: határérték egyértelműsége (B), átviteli elv (B), környezetes átfogalmazás. Műveletek, monotonitás és határérték kapcsolata, rendőrtétel. Összetett függvény határértéke.

6.2 FÜGGVÉNYEK FOLYTONOSSÁGA

Definíciók, fogalmak: folytonosság egy pontban, átviteli elv, a definíció környezetes átfogalmazása.

Tételek, állítások: folytonos függvények összegének számszorosának, szorzatának, hanyadosának folytonossága, összetett függvény folytonossága.

6.3 KORLÁTOS ZÁRT INTERVALLUMON FOLYTONOS FÜGGVÉNYEK

Definíciók, fogalmak: függvény korlátossága, monotonitása, lokális és globális (szigorú) minimuma, maximuma (szélsőértéke), egyenletes folytonosság egy halmazon.

Tételek, állítások: folytonos függvény jeltartó (B), korlátos zárt intervallumon folytonos függvény korlátos (B), felveszi a függvényértékek $\sup$, $\inf$ -jét (van maximum, minimum) (B), egyenletesen folytonos. Egy intervallumon folytonos függvény felvesz minden közbenső értéket (B), ha szigorúan monoton is, akkor injektív, és inverze is folytonos, szigorúan monoton.

6.4 ELEMI FÜGGVÉNYEK FOLYTONOSSÁGA

Definíciók, fogalmak: elemi függvény, $\ln x$, a^x , $\log_a x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctg x$, $\operatorname{arctg} x$ definíciója.

Tételek, állítások: az elemi függvények folytonosak.

6.5 NEVEZETES FÜGGVÉNYHATÁRÉRTÉKEK

Definíciók, fogalmak:–

Tételek, állítások:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}.$$

7. DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS

7.1 DIFFERENCIÁLHATÓSÁG, DIFFERENCIÁLÁSI SZABÁLYOK

Definíciók, fogalmak: differenciálhatóság, derivált.

Tételek, állítások: a derivált geometriai, fizikai jelentése, differenciálhatóságból következik a folytonosság. Differenciálási szabályok, összeg, szorzat, tört, összetett függvény, inverz függvény differenciálhatósága, differenciálhatóság és lineáris approximálhatóság ekvivalenciája.

7.2 AZ ELEMI FÜGGVÉNYEK DERIVÁLTJAI

Definíciók, fogalmak:–

Tételek, állítások: az e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\ln x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, a^x , x^α , $\log_a x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctg x$, $\operatorname{arccctg} x$ függvények differenciálhatósága és deriváltjaik.

7.3 KÖZÉPÉRTÉKTÉTELEK, L'HOSPITAL SZABÁLY

Definíciók, fogalmak:–

Tételek, állítások: differenciálható függvény szélsőértékének szükséges feltétele belső pontban. Cauchy-féle középértéktétel, és következményei: Lagrange és Rolle tételei. A monotonitás jellemzése deriváltakkal. A L'Hospital szabály (B csak spec. esetben)

7.4 MAGASABBRENDŰ DERIVÁLTAK, KONVEXITÁS

Definíciók, fogalmak: magasabbrendű deriváltak, konvex és konkáv függvény, inflexiós pont.

Tételek, állítások: egyszer ill. kétszer differenciálható konvex és konkáv függvények jellemzése.

7.5 TAYLOR TÉTEL, SZÉLSŐÉRTÉKSZÁMÍTÁS

Definíciók, fogalmak: Taylor polinom, maradéktag, Taylor sor.

Tételek, állítások: Taylor tétele, a szélsőérték szükséges feltétele, a szélsőérték elegendő feltétele.

8. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK

8.1 METRIKA ÉS TOPOLÓGIA $\mathbb{R}^n$ -BEN

Definíciók, fogalmak: műveletek, belső szorzat, norma, távolság, környezet, topológikus fogalmak az n -dimenziós térben. Vektorértékű sorozat konvergenciája.

Tételek, állítások: Schwarz egyenlőtlenség, a norma tulajdonságai (B), vektorértékű sorozat konvergenciájának jellemzése a komponensek segítségével (B).

8.2 HATÁRÉRTÉK ÉS FOLYTONOSSÁG

Definíciók, fogalmak: $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ típusú függvények határértéke és folytonossága.

Tételek, állítások: mint egy változónál.

8.2 DIFFERENCIÁLHATÓSÁG

Definíciók, fogalmak: totális, iránymenti és parciális differenciálhatóság és derivált.

Tételek, állítások: iránymenti derivált kiszámítása ha a függvény (totálisan) differenciálható, (totálisan) differenciálhatóság és folytonosság kapcsolata, (totálisan) differenciálhatóság és parciális differenciálhatóság kapcsolata.

8.3 MAGASABBRENDŰ PARCIÁLIS DERIVÁLTAK

Definíciók, fogalmak: magasabbrendű parciális deriváltak.

Tételek, állítások: a vegyes parciális deriváltak függetlensége a differenciálás sorrendjétől.

8.4 TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK SZÉLSŐÉRTÉKSZÁMÍTÁSA

Definíciók, fogalmak: $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ típusú függvények szélsőértéke.

Tételek, állítások: a szélsőérték szükséges feltétele, a szélsőérték elegendő feltétele.

8.5 FELTÉTELES SZÉLSŐÉRTÉK, LAGRANGE MULTIPLIKÁTOROK

Definíciók, fogalmak: feltételes szélsőérték.

Tételek, állítások: szükséges feltétel a feltételes szélsőértékre, Lagrange multiplikátorok módszere.