

Gazdasági matematika I. vizsgadolgozat, levelező képzés, 2010. december 30. Megoldás

A dolgozatírásnál íróeszközön számológépen kívül más **segédeszköz nem használható.**

A dolgozat időtartama 90 perc.

Definiálja az alábbi fogalmakat!

1. Sorozat konvergenciája és határértéke. (4 pont)

Az (a_n) sorozatot *konvergensnek* nevezzük, ha van olyan $a \in \mathbb{R}$ szám, hogy bármely $\varepsilon > 0$ -hoz létezik olyan $N(\varepsilon) \in \mathbb{R}$ szám, hogy

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{ha} \quad n > N(\varepsilon).$$

A a számot a sorozat *határértékének* (limeszének) nevezzük.

2. Egy $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ (I egy (nem elfajult) intervallum) függvény differenciálhatósága és deriváltja. (4 pont)

Az $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ($I \subset \mathbb{R}$ egy nem elfajult intervallum) függvényt *differenciálhatónak* nevezzük az $x_0 \in I$ pontban, ha létezik a

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

(véges) határérték.

E határértéket az f függvény x_0 pontbeli *differenciálhányadosának vagy deriváltjának* nevezzük,

és $\frac{df}{dx}(x_0)$ -al, vagy $f'(x_0)$ -lel jelöljük.

3. Területmérő függvény. (4 pont)

Legyen $f \in \mathcal{R}[a, b]$ (Riemann integrálható az $[a, b]$ -n), akkor a

$$T(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (x \in [a, b])$$

függvényt f *területmérő függvényének* nevezzük.

Fogalmazza meg az alábbi tételeket!

4. A lokális szélsőérték n -edrendű elegendő feltétele. (4 pont)

Tegyük fel, hogy $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ n -szer folytonosan differenciálható az $x_0 \in I^\circ$ belső pont egy környezetében (azaz $f^{(n)}$ folytonos e környezetben), és

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad \text{de} \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

- Ha n páros, akkor f -nek **szigorú lokális szélsőértéke van** x_0 -ban, **maximum**, ha $f^{(n)}(x_0) < 0$, **minimum**, ha $f^{(n)}(x_0) > 0$.
- Ha n páratlan, akkor f -nek **nincs szélsőértéke** x_0 -ban.

5. Newton–Leibniz tétel (határozott integrál kiszámítására). (4 pont)

Tegyük fel, hogy $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos $[a, b]$ -n, és $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ az f egy primitív függvénye $[a, b]$ -n, akkor

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b := F(b) - F(a).$$

(Összesen elérhető: 20 pont)

Oldja meg az alábbi feladatokat!

1. Számítsa ki a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 2n^2 - 5n}{-n^4 + 2n + 5}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 - 12n + 2010} - n}$ határértékeket! (10 pont)

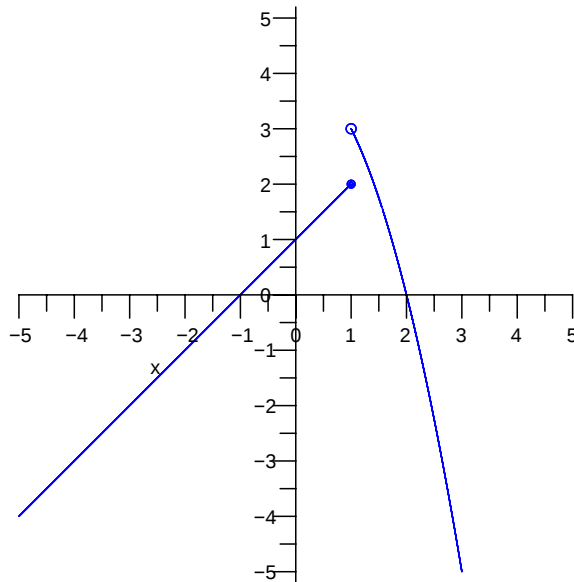
Megoldás:

$$\frac{n^4 + 2n^2 - 5n}{-n^4 + 2n + 5} = \frac{1 + \frac{2}{n^2} - \frac{5}{n^3}}{-1 + \frac{2}{n^3} + \frac{5}{n^4}} \rightarrow \frac{1}{-1} = -1,$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n^2 - 12n + 2010} - n} &= \frac{1}{\sqrt{n^2 - 12n + 2010} - n} \cdot \frac{\sqrt{n^2 - 12n + 2010} + n}{\sqrt{n^2 - 12n + 2010} + n} \\ &= \frac{\sqrt{n^2 - 12n + 2010} + n}{n^2 - 12n + 2010 - n^2} = \frac{\sqrt{1 - \frac{12}{n} + \frac{2010}{n^2}} + 1}{-12 + \frac{2010}{n}} \rightarrow \frac{2}{-12} = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

2. Vázolja az $f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{ha } x \leq 1, \\ 4 - x^2, & \text{ha } x > 1, \end{cases}$ függvény gráfját, és ennek segítségével állapítsa meg f értelmezési tartományát, értékkészletét, szakadási pontjait, jobb- és baloldali határértékét a szakadási pontokban! (12 pont)

Megoldás: A gráfot az alábbi ábra mutatja:



f egyetlen szakadási pontja az $x_0 = 1$ pont.

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R},$$

$$\mathcal{R}_f =] - \infty, 3[,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = 3, \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = 2.$$

3. Deriválja az

$$f(x) = 2^x + \operatorname{arctg}(4x), \quad g(x) = (x^4 + \cos x)(e^{3x} - 2x), \quad h(x) = \frac{5x^3}{\cos x}, \quad l(x) = \sin(x^6 + \cos(3x))$$

függvényeket!

(16 pont)

Megoldás:

$$f'(x) = 2^x \ln 2 + \frac{1}{1 + (4x)^2} \cdot 4,$$

$$g'(x) = (4x^3 - \sin x)(e^{3x} - 2x) + (x^4 + \cos x)(3e^{3x} - 2)$$

$$h'(x) = \frac{15x^2 \cos x + \sin x \cdot 5x^3}{\cos^2 x}$$

$$l'(x) = \cos(x^6 + \cos(3x)) \cdot (6x^5 - 3 \sin(3x))$$

4. Határozza meg az $f(x) = \frac{x^3}{3} + 2x^2 - 5x$ ($x \in \mathbb{R}$) függvény zérushelyeit, lokális szélsőérték-helyeit (és azok típusát), inflexiós helyeit, és ábrázolja a függvényt! (15 pont)

Megoldás: A zérushelyek:

$$f(x) = \frac{x}{3} (x^2 + 6x - 15) = 0$$

-ből $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 60}}{2} = -3 \pm \sqrt{24} \approx -3 \pm 4,9$, $x_2 \approx -7,9$, $x_3 \approx 1,9$ mindhárom zérushely egyszeres, a gráf átmetszi e pontoknál az x tengelyt.
A stacionárius pontok: az

$$f'(x) = x^2 + 4x - 5 = (x - 1)(x + 5), \quad (x - 1)(x + 5) = 0$$

egyenletből $x_4 = 1$, $x_5 = -5$.

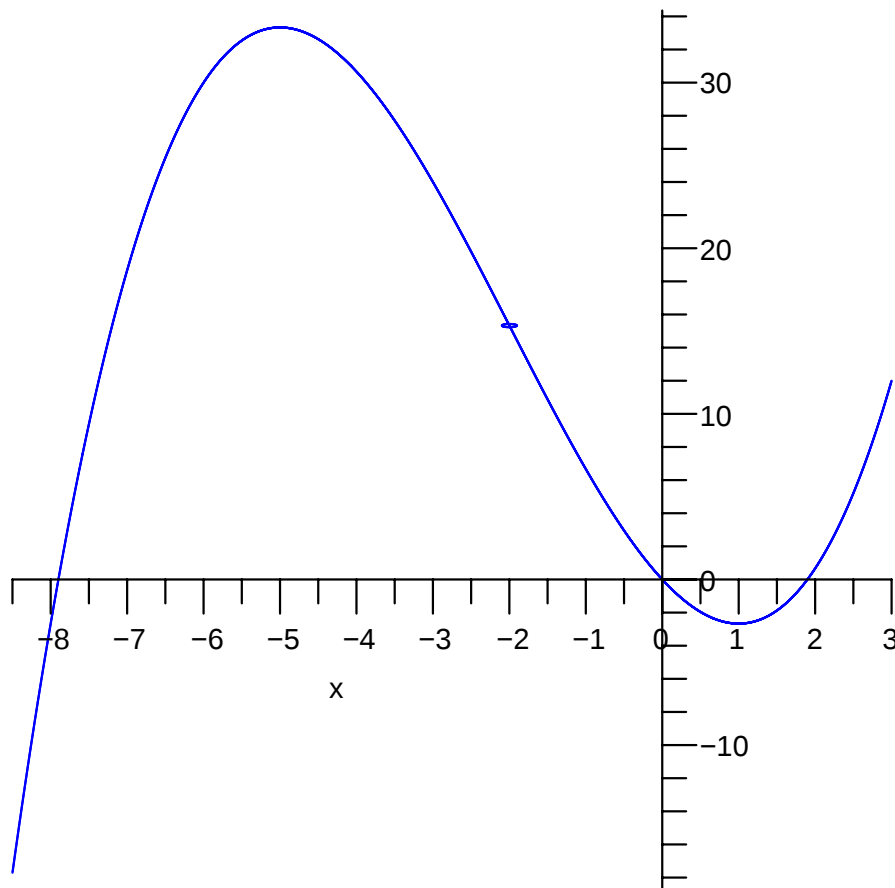
Az inflexiós hely: az

$$f''(x) = 2x + 4, \quad 2x + 4 = 0$$

egyenletből $x_6 = -2$ lehet, ez valóban inflexiós hely, mivel e pontban a második derivált előjelet vált. f konvex a $[2, \infty[$ szakaszon, konkáv a $] - \infty, 2]$ szakaszon.

Mivel $f''(x_4) > 0$ az x_4 pontban szigorú lokális minimuma van a függvénynek, $f''(x_5) < 0$ alapján az x_5 pontban szigorú lokális maximum van.

Az f függvény gráfját a következő ábra mutatja (az inflexiós pontot megjelöltük):



5. Határozza meg az

$$\int \left(\frac{4}{1+x^2} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx, \quad \int (2x-2)e^x dx, \quad \int \sqrt[3]{7x-2} dx, \quad \int_0^2 \frac{2x}{(x^2+16)^2} dx$$

integrálokat!

(20 pont)

Megoldás:

$$\int \left(\frac{4}{1+x^2} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx = 4 \arctg x - 2 \arcsin x + C,$$

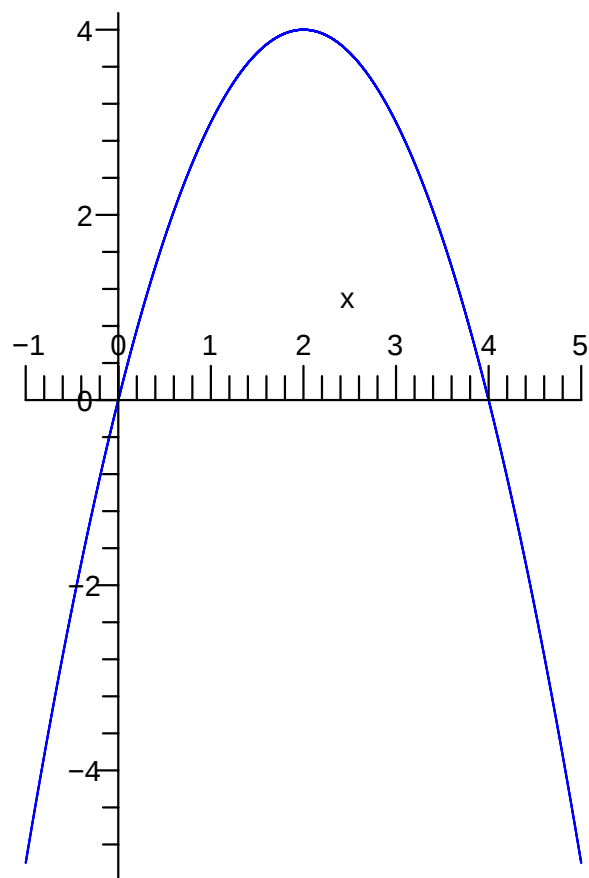
$$\int (2x-2)e^x dx = (2x-2)e^x - \int 2e^x dx = (2x-4)e^x + C, \text{ (parciális integrálással)}$$

$$\int \sqrt[3]{7x-2} dx = \frac{(7x-2)^{4/3}}{4/3} \cdot \frac{1}{7} + C = \frac{3}{28} (\sqrt[3]{7x-2})^4 + C,$$

$$= \int_0^2 (x^2+16)' (x^2+16)^{-2} dx = \left[-\frac{1}{x^2+16} \right]_0^2 = -\frac{1}{20} + \frac{1}{16} = \frac{1}{80}.$$

6. Vázolja az $f(x) = x(4-x)$ ($x \in \mathbb{R}$) parabola gráfját és számítsa ki e parabola és az x tengely által meghatározott területet! (7 pont)

Megoldás: A parabola gráfja:



A parabola alatti terület:

$$T = \int_0^4 x(4 - x) dx = \int_0^4 (4x - x^2) dx = [2x^2 - x^3]_0^4 = 32 - 64/3 = 32/3.$$