Gazdasági matematika I. felmérő dolgozat megoldása, 2012. szeptember 19, A csoport

Név: ....

A dolgozat időtartama: 60 perc. A dolgozatírásnál csak íróeszköz használható. Minden helyes válasz 8 pont, válasz nélküli kérdés 0 pont, hibás válasz -2 pont. A kérdés sorszámához írja be a helyes válasz betűjelét (ha tudja)!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

(1) Az x pozitív szám x %-a 4. Mivel egyenlő x?

(A) 2 **(B)** 4 **(C)** 10 **(D)** 20 **(E)** 40

Megoldás: $x\frac{x}{100} = 4$, amiből $x^2 = 400$, $x = 20$. A helyes válasz **D**.

(2) A tanév kezdetén Aliz azt a célt tűzte ki maga elé, hogy a tanévben megírandó 50 tesztjének legalább 80 %-át 5-ösre írja meg. Az első 30 tesztjéből 22 sikerült 5-ösre. Ha el akarja érni a célját, a hátralévő tesztek közül legfeljebb hányat írhat meg 5-ösnél gyengébb eredménnyel?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** 5

Megoldás: $50 \cdot 0,8 = 40$ dolgozatot kell jelesre megírni, az első 30-ból 22 sikerült jelesre így még 18 tesztet kell jelesre megírni, ezért a maradék 20-ból 2 lehet gyengébb. A helyes válasz **B**.

(3) A k paraméter milyen értéke mellett van az $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x+k}$ másodfokú egyenletnek két különböző valós gyöke?

(A) $-0,5$ **(B)** 0 **(C)** $0,5$ **(D)** 1 **(E)** $1,01$

Megoldás: A törtet eltávolítva $(x+1)(x+k) + (x-1)(x+k) = (x+1)(x-1)$ amiből $x^2 + 2kx + 1 = 0$. Ennek diszkriminánsa $D = 4k^2 - 4 = 4(k^2 - 1) > 1$, $|k| > 1$ csak $k = 1,01$ teljesíti ezt a feltételt. A helyes válasz **E**.

(4) Az ABC háromszögben $AC = BC = 7$ és $AB = 2$. Tekintsük az AB egyenesen azt a D pontot, amire a B pont az A és D pontok közé esik és $CD = 8$. Milyen hosszú a BD szakasz?

(A) 3 **(B)** $2\sqrt{3}$ **(C)** 4 **(D)** 5 **(E)** $4\sqrt{2}$

Megoldás: Jelölje C_1 az AB szakasz felezőpontját, m az ABC háromszög C ből induló magasságát, x a keresett BD szakasz hosszát, akkor Pithagorasz tételét a CC_1B és CC_1D háromszögekre felírva $m^2 = 7^2 - 1^2 = 48$ és $m^2 + (x+1)^2 = 8^2$, $(x+1)^2 = 64 - 48 = 16, x = 3$. A helyes válasz **A**.

(5) Mekkora területet határol az $|3x| + |4y| = 12$ egyenletű grafikon?

(A) 6 **(B)** 12 **(C)** 16 **(D)** 24 **(E)** 25

Megoldás: Egyenletünk négy egyenest határoz meg: $\pm 3x \pm 4y = 12$. Ezen egyenesek a koordináta tengelyeket rendre az $(0,3), (4,0)$ pontokban ($++$ előjelkombinációnál), $(0,-3), (4,0)$ pontokban ($+-$ előjelkombinációnál), $(0,3), (-4,0)$ pontokban ($-+$ előjelkombinációnál), $(0,-3), (-4,0)$ pontokban ($--$ előjelkombinációnál) metszik. Ezek a pontok egy rombuszt alkotnak melynek területe $T = 3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$. A helyes válasz **D**.

(6) Az a paraméter hány lehetséges értékére teljesül, hogy az $y = x+a$ egyenletű egyenes átmegy a $y = x^2 + a^2$ egyenletű parabola csúcspontján?

(**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) 2 (**D**) 10 (**E**) végtelen sok

Megoldás: A parabola csúcspontja $(0, a^2)$, az egyenes az y tengelyt a $(0, a)$ pontban metszi, a metszés feltétele $a^2 = a$, amiből $a = 0$ vagy $a = 1$, így két megoldás van. A helyes válasz **C**.

(7) Egy sorozat első tagja 2005 . Minden további tagot úgy kapunk, hogy összeadjuk az előző tag számjegyeinek köbeit. Mi lesz a sorozat 2005-ödik tagja?

(**A**) 29 (**B**) 55 (**C**) 85 (**D**) 133 (**E**) 250

Megoldás: $a_1 = 2005, a_2 = 2^3 + 5^3 = 133, a_3 = 1^3 + 3^3 + 3^3 = 55, a_4 = 5^3 + 5^3 = 250, a_5 = 2^3 + 5^3 = 133, a_6 = 1^3 + 3^3 + 3^3 = 55, \ldots$ amiből leolvasható, hogy a második elemtől kezdve minden harmadik elem ugyanaz. Mivel $2005 = 3 \cdot 667 + 4$ így $a_{2005} = a_4 = 250$. A helyes válasz **E**.

(8) Az $x^2+mx+n = 0$ másodfokú egyenlet gyökei kétszeresei az $x^2+px+m = 0$ egyenlet gyökeinek, továbbá m , n és p egyike sem nulla. Mennyi n/p értéke?

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 4 (**D**) 8 (**E**) 16

Megoldás: A gyökök és együtthatók összefüggése szerint $2x_1+2x_2 = -m, 4x_1x_2 = n$ (az első egyenletre) és $x_1 + x_2 = -p, x_1x_2 = m$ (a második egyenletre), így

$$\frac{n}{p} = \frac{4x_1x_2}{-(x_1 + x_2)} = \frac{4m}{\frac{m}{2}} = 8.$$

A helyes válasz **D**.

(9) Ha $4^{x_1} = 5\,,\ 5^{x_2} = 6\,,\ 6^{x_3} = 7\,,\ \ldots\,,\ 127^{x_{124}} = 128$, akkor mennyi $x_1x_2 \cdots x_{124}$?

(**A**) 2 (**B**) 5/2 (**C**) 3 (**D**) 7/2 (**E**) 4

Megoldás: Az egyenlőségek logaritmusát véve kapjuk, hogy

$$x_1 = \frac{\lg 5}{\lg 4}, x_2 = \frac{\lg 6}{\lg 5}, x_3 = \frac{\lg 7}{\lg 6}, \ldots x_{124} = \frac{\lg 128}{\lg 127}$$

ezért $x_1x_2x_3 \ldots x_{124} = \frac{\lg 5}{\lg 4} \frac{\lg 6}{\lg 5} \frac{\lg 7}{\lg 6} \ldots \frac{\lg 128}{\lg 127} = \frac{\lg 128}{\lg 4} = \frac{\lg 2^7}{\lg 2^2} = \frac{7}{2}$. A helyes válasz **D**.

(10) Ha $\sin x = 3 \cos x$ akkor $\sin x \cos x$ értéke:

(**A**) 1/6 (**B**) 1/5 (**C**) 2/9 (**D**) 1/4 (**E**) 3/10

Megoldás: Négyzetre emelve és a koszinuszt szinusszal kifejezve kapjuk, hogy $\sin^2 x = 9 \cos^2 x = 9(1 - \sin^2 x)$ innen $\sin^2 x = \frac{9}{10}, \cos^2 x = \frac{1}{10}$, $\sin^2 x \cos^2 x = \frac{9}{100}$, $\sin x \cos x = \pm\frac{3}{10}$. Az egyenlet mutatja, hogy $\sin x$ és $\cos x$ előjele egyezik, ezért $\sin x \cos x = \frac{3}{10}$. A helyes válasz **E**.