

13. LINEÁRIS TRANSZFORMÁCIÓK

13.1 LINEÁRIS LEKÉPEZÉS ÉS MÁTRIXA

DEFINÍCIÓ. A $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ leképezést *lineáris leképezésnek* nevezzük, ha bármely $x, y \in \mathbb{R}^n$ és bármely $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}\varphi(x+y) &= \varphi(x) + \varphi(y) && (\text{azaz } \varphi \text{ additív}), \\ \varphi(\lambda x) &= \lambda \varphi(x) && (\text{azaz } \varphi \text{ homogén}).\end{aligned}$$

□

Használjuk a lineáris operátor, és a lineáris transzformáció elnevezéseket is.

Hogyan lehet megadni egy lineáris leképezést? Legyen $b_1, \dots, b_n$ az $\mathbb{R}^n$ egy bázisa, akkor tetszőleges $x \in \mathbb{R}^n$ -t véve, az $y = \varphi(x) \in \mathbb{R}^n$ előállíthatók

$$y = y_1 b_1 + \dots + y_n b_n = \sum_{i=1}^n y_i b_i$$

$$x = x_1 b_1 + \dots + x_n b_n = \sum_{j=1}^n x_j b_j$$

alakban, így φ linearitása miatt

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n y_i b_i = y = \varphi(x) = \varphi\left(\sum_{j=1}^n x_j b_j\right) = \sum_{j=1}^n x_j \varphi(b_j) = \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^n a_{ij} b_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j\right) b_i$$

ahol felhasználtuk azt, hogy minden $j = 1, \dots, n$ -re $\varphi(b_j)$ a $b_1, \dots, b_n$ báziselemek lineáris kombinációja, azaz

$$\varphi(b_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} b_i.$$

Összehasonlítva a b_i vektorok együtthatóit (1)-ben kapjuk, hogy

$$(2) \quad y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \quad (i = 1, \dots, n).$$

Az $x, \varphi(x) = y \in \mathbb{R}^n$ vektorokat oszlopvektorként kezelve, az

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad A_\varphi := \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

jelölésekkel a (2) összefüggést

$$y = A_\varphi x$$

alakba írhatjuk, ahol a jobboldalon mátrixszorzás áll.

DEFINÍCIÓ. A (2)-vel megadott $A_\varphi = (a_{ij})$ (n -edrendű kvadratikus) mátrixot a φ *lineáris leképezés mátrixának* nevezzük. □

(2)-ből látható, hogy az A_φ mátrix j -edik oszlopában a $\varphi(b_j)$ képvektornak a $b_1, \dots, b_n$ bázisra vonatkozó koordinátái állnak.

Világos, hogy az összes $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineáris leképezések és a hozzájuk rendelt $A_\varphi \in \mathcal{M}_{n \times n}$ mátrixok közötti

$$(3) \quad \varphi \rightarrow A_\varphi \quad (A_\varphi = (a_{ij}), \text{ ahol } \varphi(b_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} b_i)$$

leképezés bijektív, minden φ lineáris leképezéshez egyetlen n -edrendű A_φ mátrix tartozik, és minden ilyen mátrix egyetlen lineáris leképezést határoz meg. Sőt, ez a bijektív leképezés megőrzi a mátrixműveleteket is.

Ha $\varphi, \psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineáris leképezések, úgy összegüket, számszorosukat és kompozíciójukat az alábbi módon értelmezzük:

$$\begin{aligned}(\varphi + \psi)(x) &:= \varphi(x) + \psi(x) & (x \in \mathbb{R}^n), \\ (\lambda\varphi)(x) &:= \lambda\varphi(x) & (\lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n), \\ (\varphi \circ \psi)(x) &:= \varphi(\psi(x)) & (x \in \mathbb{R}^n).\end{aligned}$$

TÉTEL. [a (3) leképezés tulajdonságai] *Rögzített bázis és tetszőleges $\varphi, \psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineáris leképezések esetén*

$$\begin{aligned}A_{\varphi+\psi} &= A_\varphi + A_\psi & a \text{ (3) leképezés megtartja az összeadást,} \\ A_{\lambda\varphi} &= \lambda A_\varphi & a \text{ (3) leképezés megtartja az számmal való szorzást,} \\ A_{\varphi \circ \psi} &= A_\varphi A_\psi & a \text{ (3) leképezés a kompozíciót szorzatba viszi át.}\end{aligned}$$

Továbbá $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ akkor és csak akkor bijektív, ha A_φ invertálható.

Bizonyítás. A megfelelő tulajdonságok ellenőrzése. □

Hogyan változik egy lineáris leképezés mátrixa egy új bázisra való áttéréskor?

TÉTEL. *Legyen $b_1, \dots, b_n$ és $b'_1, \dots, b'_n$ az $\mathbb{R}^n$ tér két bázisa, és*

$$A_\varphi = (a_{ij}), \quad \text{ahol} \quad \varphi(b_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} b_i$$

$$A'_\varphi = (a'_{ij}), \quad \text{ahol} \quad \varphi(b'_j) = \sum_{i=1}^n a'_{ij} b'_i$$

a $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineáris leképezés mátrixai. Akkor van olyan $S = (s_{ij}) \in \mathcal{M}_{n \times n}$ invertálható mátrix, hogy

$$(4) \quad A'_\varphi = S^{-1} A_\varphi S.$$

Bizonyítás. Mivel $b_1, \dots, b_n$ bázis így

$$(5) \quad b'_j = \sum_{i=1}^n s_{ij} b_i \quad (j = 1, \dots, n)$$

alkalmas s_{ij} ($i, j = 1, \dots, n$) együtthatókkal. A b_i vektorok is egyértelműen kombinálhatók a $b'_1, \dots, b'_n$ báziselemekből, így a (5) lineáris egyenletrendszer egyértelműen megoldható b_i -kre, ezért a Cramer szabály miatt az $S := (s_{ij})$ mátrix determinánsa nem nulla, S invertálható. (Vigyázat, most (5)-ben b_i, b'_j vektorok, de a Cramer szabály most is alkalmazható!)

φ linearitása és (5) miatt

$$\varphi(b'_j) = \sum_{i=1}^n s_{ij} \varphi(b_i) = \sum_{i=1}^n s_{ij} \left(\sum_{k=1}^n a_{ki} b_k \right) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ki} s_{ij} \right) b_k,$$

másrészt a'_{ij} definícióját és (5)-öt használva

$$\varphi(b'_j) = \sum_{i=1}^n a'_{ij} b'_i = \sum_{i=1}^n a'_{ij} \left(\sum_{k=1}^n s_{ki} b_k \right) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n s_{ki} a'_{ij} \right) b_k.$$

Összehasonlítva b_k együtthatóit a két kifejezésben kapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^n a_{ki} s_{ij} = \sum_{i=1}^n s_{ki} a'_{ij} \quad (j, k = 1, \dots, n)$$

amit $A_\varphi S = S A'_\varphi$ vagy

$$A'_\varphi = S^{-1} A_\varphi S$$

amint állítottuk. □

13.2 SAJÁTÉRTÉKEK ÉS SAJÁTVEKTOROK

DEFINÍCIÓ. Legyen A egy $n \times n$ -es mátrix. A $\lambda \in \mathbb{R}$ számot A *sajátértékének* nevezzük, ha van olyan nullától különböző $x \in \mathbb{R}^n$ vektor, melyre

$$(6) \quad Ax = \lambda x$$

teljesül. Az x vektort A (λ sajátértékhez tartozó) *sajátvektorának* nevezzük. $\square$

Megjegyezzük, hogy a definícióban az $x \neq 0$ megszorítás azért kell, mert $0 = A0 = \lambda 0$ minden $\lambda \in \mathbb{R}$ mellett teljesül. A (6) egyenletet az A *mátrix sajátérték-egyenletének* nevezzük.

Írjuk át a sajátérték-egyenletet

$$(7) \quad (A - \lambda E)x = 0$$

alakba, ahol E az $n \times n$ -es egységmátrix. Egy lineáris homogén egyenletrendszert kaptunk, melynek az x sajátvektor nemtriviális megoldása. Ilyen nemtriviális megoldás pontosan akkor van, ha a rendszer együttható mátrixának determinánsa zérus, azaz, ha

$$(8) \quad |A - \lambda E| = 0.$$

A (8) egyenletet az A mátrix *karakterisztikus egyenletének* (vagy sajátérték-egyenletének) nevezzük. Az $|A - \lambda E|$ determinánst kifejtve egy λ -ben n -edfokú polinomot kapunk. Ennek zérushelyei (azaz a (8) egyenlet megoldásai) adják A sajátértékeit.

A λ sajátértékhez tartozó sajátvektorok az (7) lineáris homogén rendszer nemtriviális megoldásai.

PÉLDÁK. 1. Határozzuk meg az

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

mátrix valós sajátértékeit és a megfelelő sajátvektorokat.

2. Határozzuk meg egy tetszőleges diagonális mátrix sajátértékeit és sajátvektorait.

13.3 MÁTRIXOK DIAGONALIZÁCIÓJA

DEFINÍCIÓ. Egy $n \times n$ -es A mátrixot *diagonalizálhatónak* nevezünk, ha van olyan invertálható $n \times n$ -es S mátrix és egy D diagonális mátrix, melyekre

$$S^{-1}AS = D$$

teljesül. $\square$

Diagonális mátrixokra használni fogjuk a

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

jelölést is.

A diagonalizálás előnye az, hogy ekkor (az előző egyenlőséget balról S -vel majd jobbról S^{-1} -gyel szorozva kapjuk, hogy)

$$A = SDS^{-1}.$$

Innen

$$A^2 = (SDS^{-1})(SDS^{-1}) = SD(S^{-1}S)DS^{-1} = SDD S^{-1} = SD^2 S^{-1}$$

és hasonlóan folytatva, indukcióval kapjuk, hogy

$$A^k = SD^k S^{-1} \quad (k \in \mathbb{N})$$

sőt, ha $p(\lambda) = \sum_{k=1}^m a_k \lambda^k$ egy polinom, akkor

$$p(A) = \sum_{k=1}^m a_k A^k = \sum_{k=1}^m a_k S D^k S^{-1} = S \left(\sum_{k=1}^m a_k D^k \right) S^{-1} = S p(D) S^{-1}.$$

Ha $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, akkor

$$p(D) = \text{diag}(p(\lambda_1), \dots, p(\lambda_n))$$

azaz csak a diagonálisban változik a mátrix. Ennek segítségével a $p(A)$ mátrix is viszonylag egyszerűen meghatározható.

TÉTEL. Ha A, S $n \times n$ -es mátrixok, S invertálható, akkor az A és $S^{-1}AS$ mátrixok sajátértékei megegyeznek.

Bizonyítás. A két mátrix karakterisztikus polinomjai megegyeznek, ugyanis

$$|S^{-1}AS - \lambda E| = |S^{-1}AS - S^{-1}(\lambda E)S| = |S^{-1}(A - \lambda E)S| = |S^{-1}| |A - \lambda E| |S| = |A - \lambda E|.$$

□

TÉTEL.[a diagonalizálhatóság kritériuma] Egy $n \times n$ -es A mátrix akkor és csakis akkor diagonalizálható, ha van n lineárisan független sajátvektora, $x_1, \dots, x_n$. Ekkor

$$S^{-1}AS = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

ahol az S mátrix oszlopvektorai rendre $x_1, \dots, x_n$, a $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ számok pedig a hozzájuk tartozó sajátértékek.

Bizonyítás. Ld. Sydsæter –Hammond: Matematika közgazdászoknak, 455-456. □

Nem minden mátrix diagonalizálható! Nincs a diagonalizálhatóságra könnyen ellenőrizhető szükséges és elegendő feltétel.

Ha az $n \times n$ -es A mátrixnak n különböző sajátértéke van, akkor A diagonalizálható. Ez elegendő, de nem szükséges feltétel.

13.4 SZIMMETRIKUS ÉS ORTOGONÁLIS MÁTRIXOK

DEFINÍCIÓ. Egy $n \times n$ -es A mátrixot *szimmetrikusnak* nevezünk, ha $A^\top = A$, *ortogonálisnak* nevezünk, ha $A^\top A = E$. □

Egy mátrix akkor és csakis akkor szimmetrikus, ha elemei a főátlóra nézve szimmetrikusak.

Egy mátrix akkor és csakis akkor ortogonális, ha bármelyik sor(oszlop)vektorának önmagával való belső szorzata 1 minden más sor(oszlop)vektorával való belső szorzata pedig 0. Ortogonális mátrix invertálható, és inverze a mátrix transzponáltja. Ugyanis $A^\top A = E$ -ből transzponálással

$$A^\top A = E = E^\top = (A^\top A)^\top = A^\top (A^\top)^\top = A^\top A$$

ami mutatja, hogy

$$A^{-1} = A^\top.$$

DEFINÍCIÓ. Két $(\mathbb{R}^n$ -beli) vektort akkor mondunk *ortogonálisnak*, ha belső szorzatuk zérus. □

Azaz $x, y \in \mathbb{R}^n$ ortogonálisak pontosan akkor, ha $\langle x, y \rangle = 0$.

Így azt is mondhatjuk, hogy egy mátrix akkor és csakis akkor ortogonális, ha sor(oszlop)vektorai egységvektorok és páronként ortogonálisak.

DEFINÍCIÓ. Az $\mathbb{R}^n$ tér egy bázisát *ortonormált bázisnak* nevezzük, ha vektorai páronként ortogonális egységvektorok. $\square$

Azaz a $b_1, \dots, b_n$ bázis akkor és csakis akkor ortonormált ha

$$\langle b_i, b_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{ha } i = j, \\ 0 & \text{ha } i \neq j, \end{cases} \quad (i, j = 1, \dots, n).$$

TÉTEL. Ha $b_1, \dots, b_n$ és $b'_1, \dots, b'_n$ az $\mathbb{R}^n$ tér két ortonormált bázisa, $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ egy lineáris leképezés $A_\varphi = (a_{ij})$, $A'_\varphi = (a'_{ij})$ e leképezés mátrixai a megfelelő bázisokra nézve, akkor a

$$A'_\varphi = S^{-1} A_\varphi S$$

transzformációs képletben szereplő S mátrix ortogonális.

Bizonyítás. Mivel $b'_j = \sum_{i=1}^n s_{ij} b_i$ ($j = 1, \dots, n$), így

$$\langle b'_i, b'_j \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n s_{ki} b_k, \sum_{l=1}^n s_{lj} b_l \right\rangle = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n s_{ki} s_{lj} \langle b_k, b_l \rangle = \sum_{k=1}^n s_{ki} s_{kj}.$$

Itt $(\langle b'_i, b'_j \rangle) = E$ egységmátrix, ezért eredményünk

$$E = S^\top S$$

alakba is írható, ami mutatja, hogy S ortogonális. $\square$

TÉTEL.[szimmetrikus mátrixok sajátértékei és sajátvektorai] Legyen A egy $n \times n$ -es szimmetrikus mátrix, akkor

- A sajátértékei mind valós számok,
- A különböző sajátértékeihez tartozó sajátvektorok ortogonálisak.

Bizonyítás. Az első állítás igazolása megtalálható pl. Kozma László: Matematikai alapok, 142-143-ban.

A második állítás igazolása: először igazoljuk, hogy *tetszőleges (nem feltétlenül szimmetrikus) A mátrix és $x, y \in \mathbb{R}^n$ (oszlop)vektorok esetén*

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^\top y \rangle$$

Ugyanis, ha $A = (a_{ij})$ és

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \text{akkor} \quad Ax = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj} x_j \end{pmatrix}, \quad Ay = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} y_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj} y_j \end{pmatrix},$$

így

$$\langle Ax, y \rangle = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j y_i \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j y_i,$$

és

$$\langle x, A^\top y \rangle = \sum_{i=1}^n \left(x_i \sum_{j=1}^n a_{ji} y_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ji} x_i y_j.$$

Megcserélve a második összegben az i és j indexeket, láthatjuk, hogy a fenti két összeg egyenlő.

Speciálisan, *szimmetrikus A mátrix esetén*

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle \quad (x, y \in \mathbb{R}^n).$$

Ha most $Ax = \lambda x$, $Ay = \mu y$ és $x, y \neq 0$, $\lambda \neq \mu$, akkor

$$\langle Ax, y \rangle = \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle,$$

és

$$\langle x, Ay \rangle = \langle x, \mu y \rangle = \mu \langle x, y \rangle,$$

amiből

$$\lambda \langle x, y \rangle = \mu \langle x, y \rangle, \quad \text{vagy} \quad (\lambda - \mu) \langle x, y \rangle = 0$$

ezért $\langle x, y \rangle = 0$ amint állítottuk. $\square$

TÉTEL. [szimmetrikus mátrixok spektráltétele] *Legyen A egy $n \times n$ -es szimmetrikus mátrix, akkor létezik olyan ortogonális U mátrix, amelyre*

$$U^{-1}AU = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

ahol $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ az A sajátértékei, az U mátrix i -edik oszlopa pedig a λ_i -hez tartozó sajátértéke ($i = 1, \dots, n$).

Bizonyítás. Ld. Sydsæter –Hammond: Matematika közgazdászoknak, 458-459. $\square$

13.5 KVADRATIKUS FÜGGVÉNYEK

DEFINÍCIÓ. Legyen $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n \times n}$, akkor

- a $F(x, y) := \langle Ax, y \rangle$ ($x, y \in \mathbb{R}^n$) függvényt *bilineáris függvénynek* nevezzük,
- a $Q(x) := \langle Ax, x \rangle$ ($x \in \mathbb{R}^n$) függvényt *kvadratikus függvénynek* nevezzük.

$\square$

Szokás $\langle Ax, y \rangle$ -t *bilineáris formának*, $\langle Ax, x \rangle$ -et *kvadratikus formának* nevezni.

Bilineáris függvény mindkét változóban lineáris.

Korábbi számításunkat felhasználva kapjuk, hogy

$$Q(x) = Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j,$$

Mivel $x_i x_j = x_j x_i$ így feltehető, hogy A *szimmetrikus mátrix*. Emlékeztetünk arra, hogy a többváltozós szélsőértékszámításban már találkoztunk kvadratikus függvényekkel.

Azt mondtuk, hogy

- a $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ kvadratikus függvény *pozitív definit*, ha $Q(x) > 0$ minden $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$ esetén,
- a $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ kvadratikus függvény *negatív definit*, ha $Q(x) < 0$ minden $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$ esetén,
- a $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ kvadratikus függvény *indefinit*, ha $Q(x)$ felvesz pozitív és negatív értékeket is.

Most azzal foglalkozunk, hogy hogyan lehet eldönteni azt hogy $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ pozitív, negatív, vagy indefinit?

Láttuk, hogy A szimmetrikus lévén diagonalizálható, azaz

$$U^{-1}AU = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

ahol $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ az A sajátértékei, U ortogonális. Innen

$$A = UDU^{-1} = UDU^T$$

ezért $x' = U^T x$ jelöléssel

$$Q(x) = \langle Ax, x \rangle = \langle UDU^T x, x \rangle = \langle DU^T x, U^T x \rangle = \langle Dx', x' \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i (x'_i)^2.$$

Utóbbi alakot, (ahol csak az x'_i négyzetei szerepelnek), Q *kanonikus alakjának* nevezzük.

Ennek segítségével azonnal belátható a következő

TÉTEL. [kritérium kvadratikus függvény definitiségére] *A szimmetrikus $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n \times n}$ mátrixszal képezett*

$$Q(x) := \langle Ax, x \rangle \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

kvadratikus függvény akkor és csakis akkor

- pozitív definit, ha A összes sajátértéke pozitív,
- negatív definit, ha A összes sajátértéke negatív,
- indefinit, ha A -nak van pozitív és negatív sajátértéke is.

A sajátértékek kiszámítása nélkül is eldönthető Q definitisége.

TÉTEL.[kritérium kvadratikus függvény definitiségére] Legyen $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n \times n}$ szimmetrikus mátrix, és legyen Δ_k ($k = 1, \dots, n$) az A mátrix bal felső $k \times k$ -s sarokmátrixának determinánsa, azaz

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \dots \quad \Delta_n = |A|$$

(Δ_k -k az A mátrix sarokfőminorjai), akkor

$$Q(x) := \langle Ax, x \rangle \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

kvadratikus függvény akkor és csakis akkor

- pozitív definit, ha $\Delta_k > 0$ ha $k = 1, \dots, n$,
- negatív definit, ha $(-1)_k \Delta_k > 0$ ha $k = 1, \dots, n$.