

Kérdések és feladatok a Haladó módszertani ismeretek c. tárgyhöz

Gazdaságtudományi Kar, M.Sc. 2014/15 első félév

Témakörök

- (1) **Komplex számok.** Komplex számok binom, trigonometrikus és exponenciális alakja. Műveletek komplex számokkal, komplex számok ábrázolása, a műveletek geometriai jelentése.
- (2) **Differenciálegyenletek.** (Picard-Lindelöf) egzisztencia és unicitás tétel (elsőrendű explicit differenciálegyenletekre). Integrálással megoldható egyenletek: szeparábilis, homogén fokszerű, lineáris, Bernoulli-féle egyenletek. Másodrendű egyenletek. Másodrendű lineáris egyenletek, egzisztencia és unicitás tételük. Konstansvariálás. Konstans együtthatós lineáris egyenletek. Az inhomogén egyenletek megoldása a határozatlan együtthatók módszerével.
- (3) **Differencia egyenletek.** Egzisztencia és unicitás tétel első és másodrendű differencia egyenletekre. Konstans együtthatós lineáris differencia egyenletek megoldása. Az inhomogén egyenletek megoldása a határozatlan együtthatók módszerével.

Legfontosabb definíciók

- (1) **Differenciálegyenletek:** első és másodrendű explicit differenciálegyenletek általános alakja, kezdeti érték probléma. Függvények lineáris függősége és függetlensége, Wronski determináns, másodrendű konstans együtthatós lineáris homogén egyenletek karakterisztikus egyenlete.
- (2) **Differencia egyenletek:** első és másodrendű differencia egyenletek általános alakja, Casorati determináns, másodrendű konstans együtthatós lineáris homogén differencia egyenletek karakterisztikus egyenlete.

Fontos tételek

- (1) **Differenciálegyenletek: Picard Lindelöf tétel,** másodrendű lineáris egyenletekre vonatkozó egzisztencia és unicitás tétel. Lineáris függetlenség és Wronski determináns kapcsolata.
- (2) **Differencia egyenletek:** egzisztencia és unicitás tétel első és másodrendű differencia egyenletekre.

Gyakorló feladatok

- (1) Legyen $z_1 = 2 - 8i$, $z_2 = 2 - 2i$, $z_3 = 5 + 3i$, $z_4 = -8i$, $z_5 = 1 + i$, $z_6 = 3 - 8i$. Számolja ki $z_1 + z_3$, $z_2 - 3iz_2$, z_3z_4 , z_2/z_6 , $\bar{z}_3$, $|z_6|$ komplex számokat. Ábrázolja a komplex síkon z_2 , z_4 , z_5 , z_6 -ot! Írja át a z_2 , z_4 , z_5 számokat trigonometrikus és exponenciális alakba! Számolja ki z_5^{20} -t! Számolja ki és ábrázolja a $\sqrt[3]{z_2}$, $\sqrt[4]{z_4}$, $\sqrt[3]{z_5}$ gyökök összes értékét!
- (2) Oldja meg az alábbi szeparábilis egyenleteket!

- (a) $y'(x) = y(x)$, $y(1) = 1$,
- (b) $y'(x) = xy(x)$
- (c) $y'(x) = 4x\sqrt{y(x)}$, $y(1) = 1$
- (d) $y'(x) = e^{y(x)-x}$
- (e) $y'(x) = 2xy(x)$

(3) Használja az $u(x) = \frac{y(x)}{x}$ helyettesítést a megoldáshoz!

$$(a) \ y'(x) = \frac{y(x) + x}{x} \quad (b) \ y'(x) = \frac{y(x)}{y(x) + x} \quad (c) \ y'(x) = \frac{y(x) + x}{y(x) + 3x}.$$

(4) Alkalmas helyettesítéssel (pl. lineáris helyettesítés) oldja meg az alábbi egyenleteket!

$$\begin{aligned} (a) \quad & y'(x) = 2y(x) + x + 1 \quad (u(x) = 2y(x) + x + 1) \\ (b) \quad & y'(x) = -2(2x + 3y(x))^2 \\ (c) \quad & y'(x) = \sqrt{y(x) - 2x} \\ (d) \quad & y'(x) = x + e^{y(x)} \quad (u(x) = e^{y(x)}). \end{aligned}$$

(5) Oldja meg az alábbi lineáris egyenleteket!

$$(a) \ y'(x) - xy(x) = x^3 \quad (b) \ y'(x) + y(x) = e^{-x} \quad (c) \ xy'(x) + 2y(x) = 3x, \ y(1) = 0.$$

(6) Határozza meg az általános megoldást, vagy a kezdeti érték probléma megoldását, az inhomogén egyenleteknél használja a határozatlan együtthatók módszerét!

$$\begin{aligned} (a) \quad & y''(x) - y'(x) - 2y(x) = 0, \quad y(0) = 0, y(1) = 1, \\ (b) \quad & y''(x) - 4y'(x) + 5y(x) = 0 \\ (c) \quad & y''(x) + 6y'(x) + 9y(x) = 2x \\ (d) \quad & y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = e^{3x} \\ (e) \quad & y''(x) - y'(x) - 2y(x) = \sin 2x, \\ (f) \quad & y''(x) - y'(x) = 2e^x + x^2, \\ (g) \quad & y''(x) - y'(x) = x^2, \quad y(0) = 0, y(1) = -1. \end{aligned}$$

(7) Határozza meg az általános megoldást, vagy a kezdeti érték probléma megoldását!

$$\begin{aligned} (a) \quad & y(n+2) - 6y(n+1) + 8y(n) = 0, \\ (b) \quad & y(n+2) - 6y(n+1) + 8y(n) = 0, \quad y(0) = 0, y(1) = 1, \\ (c) \quad & y(n+2) + 2y(n+1) + 3y(n) = 0, \\ (d) \quad & y(n+2) - 8y(n+1) + 16y(n) = 0, \\ (e) \quad & y(n+2) - 8y(n+1) + 16y(n) = 2 \cdot 4^n + 2n - 3, \\ (f) \quad & 3y(n+2) + 2y(n) = 4, \\ (g) \quad & y(n+2) + 2y(n+1) + y(n) = 9 \cdot 2^n, \\ (h) \quad & y(n+1) + 2y(n) = 5, \quad y(0) = 0, y(1) = 1, \\ (k) \quad & y(n+2) - 6y(n+1) + 8y(n) = 5 \cdot 3^n + 2n^2 - 1, \\ (l) \quad & 3y(n+2) + 2y(n) = 4n + 6, \\ (m) \quad & y(n+1) + 2y(n) = 5^n, \\ (n) \quad & y(n+3) + y(n+2) - y(n+1) - y(n) = 0. \end{aligned}$$