

1. Házi feladat megoldása, 2014/2015 tanév, II. félév

- (1) Igazoljuk, hogy az a_1, a_2, a_3 vektorok bázist alkotnak $\mathbb{R}^3$ -ban. Számoljuk ki az x vektor koordinátáit ebben a bázisban, ha

$$a_1 = (1, 4, -2), a_2 = (2, -1, 3), a_3 = (-1, 0, 2), x = (1, -1, 0).$$

Megoldás. Az a_1, a_2, a_3 vektorok pontosan akkor alkotnak bázist $\mathbb{R}^3$ -ban, ha lineárisan függetlenek, azaz ha a

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = 0$$

lineáris homogén egyenletrendszernek a $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ismeretlenekre csak triviális megoldása van. Ennek a szükséges és elegendő feltétele az, hogy a rendszer determinánsa ne legyen nulla. Kiírva a fenti egyenletrendszert koordinátáinként, látjuk, hogy a rendszer A mátrixa az a_1^T, a_2^T, a_3^T oszlopvektorokból áll. Mivel $|A| = -28 \neq 0$ így az a_1, a_2, a_3 vektorok lineárisan függetlenek ezért bázist alkotnak $\mathbb{R}^3$ -ban. Az x vektor koordinátáit ebben a bázisban a

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = x$$

egyenletrendszer $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ megoldásai adják. E megoldásokat a Cramer szabály szerint kiszámolva:

$$\lambda_1 = \frac{A_1}{|A|} = \frac{1}{-28} \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \frac{-5}{-28}, \quad \lambda_2 = \frac{A_2}{|A|} = \frac{8}{-28}, \quad \lambda_3 = \frac{A_3}{|A|} = \frac{-17}{-28}.$$

- (2) Határozzuk meg a következő vektorok által generált altér egy bázisát és dimenzióját

$$\begin{aligned} a_1 &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \\ a_2 &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \\ a_3 &= \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ a_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Megoldás. A vektorokból, mint sorvektorokból alkotott A mátrix determinánsa

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(a második sort adjuk hozzá a többi sorhoz, majd az utolsó oszlop szerint fejtsük ki a determinánst). Hasonlóan számolva, mátrixunk **jobb felső** harmadrendű determinánsa $12 \neq 0$ ezért A rangja 3, és a_1, a_2, a_3 lineárisan függetlenek, és a négy vektor által generált altér egy bázisát alkotják.

- (3) Mennyi az

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & -1 & 6 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

mátrix rangja? Adja meg a sorvektorai által generált altér egy bázisát!

Megoldás. Mivel $|A| = 0$ és az A mátrix bal felső másodrendű sarokdeterminánsa $-39 \neq 0$ így A rangja 2, és az első két sorvektor bázist alkot a sorvektorok által generált altérben (látható, hogy a második sorvektor éppen az első sorvektor plusz a harmadik sorvektor háromszorosa).

- (4) Számítsa ki a $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \\ 8 & 5 & 9 & 3 \\ 11 & 7 & 7 & 4 \end{vmatrix}$ determinánst!

Megoldás. Az utolsó oszlop alkalmas többszöröseit az előző oszlopokhoz hozzáadva elérhetjük, hogy az első sorban csak az utolsó elem legyen nemzérus, ezután az első sor szerint fejtjük ki a determinánst, melynek értéke nulla.

- (5) Számítsa ki az AB , BA , AC , BD mátrixokat, ha

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 6 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Megoldás.

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 24 & 2 \\ -4 & 33 & -6 \\ 4 & 11 & 4 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 19 & 34 & -18 \\ -1 & 11 & 7 \end{pmatrix}, \quad AC = \begin{pmatrix} 2 & -15 \\ 3 & -29 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad BD = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- (6) Határozza meg a

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

mátrix inverzét, ha az létezik!

Megoldás. Az inverz mátrix létezik és

$$\frac{1}{60} \begin{pmatrix} 6 & 6 & 12 \\ 11 & 1 & -18 \\ 1 & 11 & -18 \end{pmatrix}$$

- (7) A b szám milyen értéke mellett nem alkalmazható a Cramer szabály a

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \\ 3 & b & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

lineáris egyenletrendszerre? Ha $b = 4$ akkor határozza meg x_3 -at!

Megoldás. A rendszer determinánsa $= -11b - 16 \neq 0$ a Cramer szabály alkalmazhatóságának feltétele. Ha $b = 4$, akkor ez teljesül, és

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{93}{-60} = -\frac{31}{20}.$$

- (8) Adja meg a következő lineáris egyenletrendszer összes megoldását (tudjuk, hogy a rendszer mátrixának és a bővített mátrixnak is 3 a rangja, vegye a bal felső harmadrendű sarokdeterminánst rangmeghatározónak)!

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & -3 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & -8 & 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Megoldás. Az utolsó egyenletet elhagyhatjuk, mert az lineárisan kombinálható az előzőekből. Az első három egyenletet írjuk át

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 + x_4 - x_5 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= -x_4 + 2x_5 \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 2 - 3x_4 - 4x_5 \end{aligned}$$

alakba, és alkalmazzuk erre a Cramer szabályt, akkor tetszőleges x_4, x_5 mellett

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1+x_4-x_5 & 1 & 1 \\ -x_4+2x_5 & -1 & 1 \\ 2-3x_4-4x_5 & 3 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{-12x_4+4x_5+4}{12} = -x_4 + \frac{1}{3}x_5 + \frac{1}{3},$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1+x_4-x_5 & 1 \\ 1 & -x_4+2x_5 & 1 \\ 3 & 2-3x_4-4x_5 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{18x_4-20x_5+4}{12} = \frac{3}{2}x_4 - \frac{5}{3}x_5 + \frac{1}{3},$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1+x_4-x_5 \\ 1 & -1 & -x_4+2x_5 \\ 3 & 3 & 2-3x_4-4x_5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{18x_4}{12} = \frac{3}{2}x_4.$$

- (9) Legyen $a = (1, -2, 2, 7)$ és $b = (0, -3, 2, -1)$. Állapítsuk meg, hogy milyen $\lambda \in \mathbb{R}$ szám esetén lesz minimális az $a - \lambda b$ vektor normája!

Megoldás. ELSŐ MEGOLDÁS. Tekintsük a

$$Q(\lambda) = \|a - \lambda b\|^2 = \langle a - \lambda b, a - \lambda b \rangle = \|a\|^2 - 2\lambda \langle a, b \rangle + \lambda^2 \|b\|^2 \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

másodfokú függvényt. Világos, hogy Q -nak ugyanott van minimuma mint $\|a - \lambda b\|$ -nek. A középiskolából ismeretes, hogy a Q másodfokú függvénynek a $\lambda = \frac{2\langle a, b \rangle}{2\|b\|^2} = \frac{\langle a, b \rangle}{\|b\|^2} = \frac{3}{14}$ helyen van minimuma, így ez feladatunk megoldása.

MÁSODIK MEGOLDÁS. A $\|a - \lambda b\|$ minimális, ha $a - \lambda b$ ortogonális b -re (rajzoljon ábrát), ebből $\langle a - \lambda b, b \rangle = 0$, $\langle a, b \rangle - \lambda \langle b, b \rangle = 0$, $\lambda = \frac{\langle a, b \rangle}{\|b\|^2} = \frac{3}{14}$.

- (10) Határozza meg az

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

mátrix sajátértékeit és a $\lambda = 2$ sajátértékhez tartozó sajátvektorait! Diagonalizálható-e az A mátrix?

Megoldás. A sajátértékegyenlet

$$|A - \lambda E| = (3 - \lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = 0, \text{ megoldásai } \lambda_{1,2} = 3, \text{ kétszeres gyök } \lambda_3 = 2,$$

a $\lambda_3 = 2$ sajátértékhez tartozó x sajátvektorok pedig az $(A - \lambda_3 E)x = 0$ lineáris egyenletrendszer x megoldásaként számolható, esetünkben

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t \end{pmatrix}$$

ahol $t \neq 0$ tetszőleges. A $\lambda_{1,2} = 3$ sajátértékhez tartozó x sajátvektorok pedig az $(A - \lambda_{1,2} E)x = 0$ lineáris egyenletrendszer x megoldásaként számolható, ez az

$$-x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$$

egyenletbe megy át. Megoldása $x_2 = s, x_3 = t, x_1 = -2s + t$ ahol s, t tetszőlegesen, azaz

$$x = \begin{pmatrix} -2s + t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Mivel az utóbbi összeg tagjai a $\lambda_{1,2} = 3$ sajátértékhez tartozó lineárisan független sajátvektorok ezért az A mátrix diagonalizálható, ugyanis **van 3 lineárisan független sajátvektora**.

- (11) Határozza meg a $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2 - 4x_2x_3 - 2x_1x_3$ kvadratikus forma kanonikus alakját (redukálja négyzetösszegekre), és ennek segítségével döntse el, hogy Q pozitív/negatív definit/szemidefinit, vagy indefinit-e?

Megoldás.

$$Q(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_2 - x_3)^2 + 2x_2^2 - x_3^2 - 8x_2x_3 = (x_1 - 2x_2 - x_3)^2 + 2(x_2 - 2x_3)^2 - 9x_3^2$$

vagy $Q(x_1, x_2, x_3) = y_1^2 + 2y_2^2 - 5y_3^2$ ahol $y_1 = x_1 - 2x_2 - x_3, y_2 = x_2 - 2x_3, y_3 = x_3$. Látható, hogy Q indefinit.

- (12) Számítsa ki az $f(x, y) = x^2 \ln(y) - 2x^6y^2 - y + 1, \quad g(x, y) = ye^{x^2+y^3-y}$ függvények első és második parciális deriváltjait!

Megoldás. Csak g deriváltjait számoljuk ki.

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = y(2x)e^{x^2+y^3-y},$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = e^{x^2+y^3-y} + y(3y^2 - 1)e^{x^2+y^3-y},$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) = 2ye^{x^2+y^3-y} + 4x^2ye^{x^2+y^3-y},$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, y) = 2xe^{x^2+y^3-y} + 2xy(3y^2 - 1)e^{x^2+y^3-y},$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) = (3y^2 - 1)e^{x^2+y^3-y} + (9y^2 - 1)e^{x^2+y^3-y} + y(3y^2 - 1)^2e^{x^2+y^3-y}$$

- (13) Határozza meg az $f(x, y) = xe^{xy} - xy$ függvény iránymenti deriváltját az $a = (2, 3)$ irány mentén (figyelem a nem egységvektor!) a $(1, 0)$ pontban!

Megoldás. $e = \frac{a}{\|a\|} = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}} \right)$ az a irányába mutató egységvektor,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^{xy} + xye^{xy} - y, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1, 0) = 1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2e^{xy} - x, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) = 0,$$

$$D_e f(1, 0) = 1 \cdot \frac{2}{\sqrt{13}} + 0 \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}}.$$

- (14) Határozza meg az $f(x, y) = 4x^4 + y^4 + x^2 - 4xy + 4y^2, (x, y \in \mathbb{R})$ függvény stacionárius pontjait és lokális szélsőérték helyeit, azok típusát és nagyságát!

Megoldás.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 16x^3 + 2x - 4y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4y^3 - 4x + 8y,$$

a stacionárius pontokat a

$$\begin{aligned} 16x^3 + 2x - 4y &= 0 \\ 4y^3 - 4x + 8y &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszerből lehet meghatározni. Az első egyenlet kétszeresét a másodikhoz hozzáadva $32x^3 + 4y^3 = 0$, vagy $(2x)^3 = -y^3$, $2x = -y$. Ezt egyenletrendszerünk első egyenletébe helyettesítve kapjuk, hogy $2x(8x^2 + 5) = 0$, innen $x_1 = 0$, amit a második egyenletbe helyettesítve $4y^3 + 8y = 0$, $4y(y^2 + 2) = 0$ $y_1 = 0$.

Egyetlen stacionárius pont van $P_1(0, 0)$.

Annak eldöntéséhez, hogy e stacionárius pontban van-e szélsőérték, és ha igen akkor milyen, ki kell számolnunk a második parciális deriváltakat és a Δ_1, Δ_2 determinánsokat (elég az előjelüket tudni) a stacionárius pontokban.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 48x^2 + 2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -4,$$

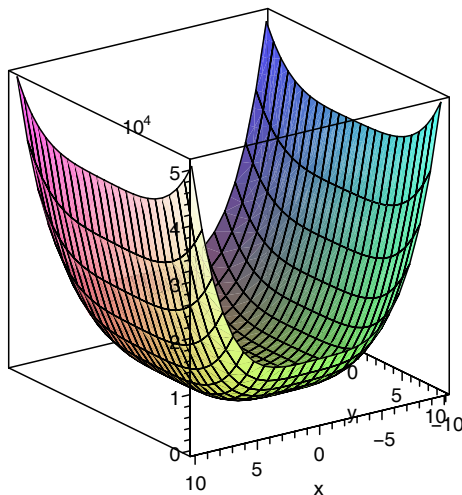
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 12y^2 + 8,$$

és

$$\Delta_1(x, y) = 48x^2 + 2,$$

$$\Delta_2(x, y) = \begin{vmatrix} 48x^2 + 2 & -4 \\ -4 & 12y^2 + 8 \end{vmatrix} = 8(24x^2 + 1)(3y^2 + 2) - 16.$$

Mivel $\Delta_1(0, 0) = 2$, $\Delta_2(0, 0) = 0$ a másodrendű teszt nem ad eredményt. A mellékelt gráfból sejthető, hogy a $(0, 0)$ pontban lokális (sőt abszolút) minimum van:



MEGJEGYZÉS. Előbbi sejtésünket számítással is igazolhatjuk. Mivel

$$f(x, y) = 4x^4 + y^4 + x^2 - 4xy + 4y^2 = 4x^4 + y^4 + (x - 2y)^2$$

látható, hogy $f(x, y) \geq 0$ és $f(x, y) = 0$ csak úgy lehet ha $x = y = 0$ ami azt jelenti, hogy a $(0, 0)$ stacionárius pontban szigorú globális minimuma van f -nek.