

Gazdasági matematika I.

Losonczi László, Pap Gyula

Debreceni Egyetem, Közgazdaság- és Gazdaságtudományi Kar

Debrecen, 2010/11 tanév, I. félév

Félévközi kötelező házi feladatok beadási határideje:

- Az 1. házi feladatot a 2010. október 25-29 heti gyakorlaton kell beadni a gyakorlatvezetőnek.
- A 2. házi feladatot a 2010. december 13-17 heti gyakorlaton kell beadni a gyakorlatvezetőnek.

Ezek teljesítése, valamint a gyakorlatra járás (legfeljebb 3 hiányzás) szükséges a gyakorlati aláíráshoz!

Félévközi (választható) vizsgadolgozatok:

- 1. dolgozat 2010. november 3, szerda 10-12
- 2. dolgozat 2010. december 21, kedd 14-16



LOSONCZI LÁSZLÓ

Gazdasági matematika I., előadáskövető fóliák, pdf

Gazdasági matematika I., előadáskövető jegyzet, pdf

Feladatok a gazdasági matematika I. tárgyhoz, pdf

<http://www.math.klte.hu/~losi/huindex.htm>



PAP GYULA

Előadáskövető anyagok és feladatok

<http://www.inf.unideb.hu/valseg/dolgozok/papgy/>

Ajánlott irodalom:

-  KNUT SYDSÆTER és PETER HAMMOND
Matematika közgazdászoknak
Aula, 1998.
-  HATVANI LÁSZLÓ
Kalkulus közgazdászoknak
Polygon, Szeged, 2007.
-  KOZMA LÁSZLÓ
Matematikai alapok
Studium Kiadó, 1999.
-  DENKINGER GÉZA, GYURKÓ LAJOS
Analízis gyakorlatok
Nemzeti Tankönyvkiadó, 1999.

1. A HALMAZELMÉLET ALAPJAI

1.1 Halmazok

Tartalmazás jelölése

$a \in B$ (a eleme a B halmaznak)

$b \notin A$ (b nem eleme az A halmaznak)

Halmazok megadási módjai

- **felsorolás;** például $A = \{2, 3, 5, 7, 11\}$
- **ismert halmaz adott tulajdonságú elemeinek megadása;**
például $A = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ páros}\}$,
ahol $\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$ a **természetes számok** halmaza

1. A HALMAZELMÉLET ALAPJAI

1.1 Halmazok

Definíciók

- **Üres halmaz:** melynek egyetlen eleme sincs; jelölése: $\emptyset$
- Az A és B halmazok **egyenlőek**, ha elemei ugyanazok; jelölése: $A = B$; tagadása: $A \neq B$
- Az A halmaz **részhalmaza** a B halmaznak, ha A minden eleme benne van a B halmazban; jelölése: $A \subset B$, illetve $B \supset A$, amit úgy olvasunk, hogy B **tartalmazza** az A halmazt
- Az A halmaz **valódi részhalmaza** a B halmaznak, ha $A \subset B$ és $A \neq B$

1. A HALMAZELMÉLET ALAPJAI

1.1 Halmazok

Logikai alapfogalmak

- **Állítás:** olyan kijelentés, melyről egyértelműen eldönthető, hogy igaz vagy hamis.
- **Logikai műveletek:**
 - $\neg P$ (nem P , azaz P tagadása) pontosan akkor igaz, ha P hamis
 - $P \wedge Q$ (P és Q) pontosan akkor igaz, ha P és Q is igaz
 - $P \vee Q$ (P vagy Q) pontosan akkor igaz ha, P és Q legalább egyike igaz
 - $P \implies Q$ (P -ből következik Q) pontosan akkor igaz, ha P hamis vagy ha Q igaz
 - $P \iff Q$ (P ekvivalens Q -val) pontosan akkor igaz, ha P és Q vagy mindketten igazak vagy mindketten hamisak

1. A HALMAZELMÉLET ALAPJAI

1.1 Halmazok

$P \implies Q$ esetén azt mondjuk, hogy P **elegendő** Q teljesüléséhez, másképpen Q **szükséges** P teljesüléséhez

$P \iff Q$ esetén azt mondjuk, hogy P **szükséges és elegendő** Q teljesüléséhez

- $P \iff Q$ pontosan akkor igaz, ha $P \implies Q$ és $Q \implies P$ is igaz, azaz

$$(P \iff Q) \iff (P \implies Q) \wedge (Q \implies P)$$

tetszőleges P és Q állításokra igaz

- Az indirekt bizonyítás alapja:

$$(P \implies Q) \iff (\neg Q \implies \neg P)$$

tetszőleges P és Q állításokra igaz

1. A HALMAZELMÉLET ALAPJAI

1.1 Halmazok

Logikai kvantorok

- **univerzális kvantor:** $\forall x$ = minden x -re
- **egzisztenciális kvantor:** $\exists x$ = van olyan x melyre

Példák:

$$A \subset B \iff (\forall x) (x \in A \implies x \in B)$$

és

$$A = B \iff (\forall x) ((x \in A \implies x \in B) \wedge (x \in B \implies x \in A))$$

igazak tetszőleges A és B halmazokra

1. A HALMAZELMÉLET ALAPJAI

1.1 Halmazok

Műveletek egy X halmaz részhalmazáival

- A és B egyesítése = uniója:

$$A \cup B := \{x \in X : x \in A \text{ vagy } x \in B\}$$

- A és B metszete = közös része:

$$A \cap B := \{x \in X : x \in A \text{ és } x \in B\}$$

- A és B különbsége:

$$A \setminus B := \{x \in X : x \in A \text{ és } x \notin B\}$$

- A komplementere (X -re nézve):

$$\overline{A} := X \setminus A$$

1. A HALMAZELMÉLET ALAPJAI

1.1 Halmazok

Halmazműveletek tulajdonságai

• **kommutativitás:** $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$

• **asszociativitás:**

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

• **disztributivitás:**

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

• **idempotencia:** $A \cup A = A$, $A \cap A = A$

• **de Morgan azonosságok:** $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

1. A HALMAZELMÉLET ALAPJAI

1.1 Halmazok

Halmazrendszer

Olyan (nemüres) halmaz, melynek elemei halmazok

- Ha I egy (nemüres) halmaz és minden $i \in I$ elemhez meg van adva egy A_i -vel jelölt halmaz, akkor az $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$ halmazrendszert I -vel **indexelt halmazrendszernek** nevezzük, I neve **indexhalmaz**

- Egy $\mathcal{R}$ **halmazrendszer uniója és metszete:**

$$\bigcup \mathcal{R} := \{x : (\exists A \in \mathcal{R}) x \in A\}, \quad \bigcap \mathcal{R} := \{x : (\forall A \in \mathcal{R}) x \in A\}$$

- Ha $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$ egy I -vel indexelt halmazrendszer, akkor

$$\bigcup_{i \in I} A_i := \bigcup \mathcal{A}, \quad \bigcap_{i \in I} A_i := \bigcap \mathcal{A}$$

1. A HALMAZELMÉLET ALAPJAI

1.2 Relációk

Két halmaz Descartes szorzata

Az A és B halmazok **Descartes szorzata** (vagy direkt szorzata) a halmazok elemeiből képezett összes (a, b) *rendezett párok* halmaza, ahol $a \in A$, $b \in B$. Jelölése: $A \times B := \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$. További jelölés: $A^2 := A \times A$.

Rendezett párok egyenlősége

$(a, b) = (c, d)$ akkor és csakis akkor ha $a = c$, $b = d$.

Két halmaz közötti reláció

Az A és B halmazok Descartes szorzatának egy $R \subset A \times B$ részhalmazát az A és B közötti **relációnak** nevezzük.

Ha $(a, b) \in R$, akkor azt mondjuk, hogy az a **elem** R **relációban van** b -vel. Jelölése: $a R b$. Ha $A = B$, akkor az A és B közötti relációt **A -n értelmezett relációnak** mondjuk.

1. A HALMAZELMÉLET ALAPJAI

1.2 Relációk

Ekvivalencia reláció

Az A halmazon értelmezett $R \subset A \times A$ reláció **ekvivalencia reláció**, ha

- **reflexív**, azaz $(\forall a \in A) a R a$
- **szimmetrikus**, azaz $(\forall a, b \in A) a R b \implies b R a$
- **transzitiv**, azaz $(\forall a, b, c \in A) (a R b \wedge b R c) \implies a R c$.

1. A HALMAZELMÉLET ALAPJAI

1.2 Relációk

Osztályozás = diszjunkt halmazokra bontás = particionálás

Egy halmaz felbontását páronként diszjunkt halmazok uniójára a halmaz **osztályozásának** nevezzük.

Ekvivalencia reláció osztályozást hajt végre

- *Ha R egy ekvivalencia reláció az A halmazon, akkor az egymással relációban álló elemeket egy-egy osztályba sorolva az A egy osztályozását kapjuk.*
- *Ha egy A halmazon adott egy osztályozás, akkor az egymással egy osztályba sorolt elemeket relációban állóknak tekintve egy ekvivalencia relációt kapunk az A halmazon, melynek osztályai éppen a kiindulásként vett osztályok.*

1. A HALMAZELMÉLET ALAPJAI

1.2 Relációk

Féligrendezés, rendezés

Az A halmazon értelmezett $R \subset A \times A$ reláció **féligrendezés**, ha

- **reflexív**, azaz $(\forall a \in A) a R a$
- **antiszimmetrikus**, azaz $(\forall a, b \in A) (a R b \wedge b R a) \implies (a = b)$.
- **transzitiv**, azaz $(\forall a, b, c \in A) (a R b \wedge b R c) \implies a R c$.

Az A halmazon értelmezett $R \subset A \times A$ reláció **rendezés**, ha féligrendezés, és ha $(\forall a, b \in A) (a R b \vee b R a)$.

Példák:

- Egy X halmaz összes részhalmazán a $\subset$ tartalmazási reláció féligrendezés.
- A valós számok $\mathbb{R}$ halmazán a $\leq$ reláció rendezés.

1. A HALMAZELMÉLET ALAPJAI

1.2 Relációk

Valós számhalmazok korlátossága

- $A \subset \mathbb{R}$ **felülről korlátos**, ha $(\exists k \in \mathbb{R}) (\forall a \in A) a \leq k$. Ekkor a k számot A egy **felső korlátjának** nevezzük.
- $A \subset \mathbb{R}$ **alulról korlátos**, ha $(\exists k' \in \mathbb{R}) (\forall a \in A) a \geq k'$. Ekkor a k' számot A egy **alsó korlátjának** nevezzük.
- $A \subset \mathbb{R}$ **korlátos**, ha alulról és felülről is korlátos.
- $s \in \mathbb{R}$ az $A \subset \mathbb{R}$ **pontos felső korlátja = szuprémuma**, ha
 - s az A felső korlátja;
 - A bármely s' felső korlátjára $s \leq s'$.

Jelölés: $s = \sup A$.

- $i \in \mathbb{R}$ az $A \subset \mathbb{R}$ **pontos alsó korlátja = infimuma**, ha
 - i az A alsó korlátja;
 - A bármely i' alsó korlátjára $i \geq i'$.

Jelölés: $i = \inf A$.

1. A HALMAZELMÉLET ALAPJAI

1.2 Relációk

Függvény

- Az A és B halmazok között értelmezett $F \subset A \times B$ reláció **függvény**, ha minden $a \in A$ elemhez pontosan egy olyan $b \in B$ elem létezik, melyre $a F b$ teljesül. Ilyenkor a $b = F(a)$ jelölést használjuk, a függvény jelölése pedig $F : A \rightarrow B$.
- $\mathcal{D}_F := A$ az F függvény **értelmezési tartománya**.
- $\mathcal{R}_F := \{F(a) : a \in A\}$ az F függvény **értékkészlete**.
- Az $F : A \rightarrow B$ függvény **injektív**, ha
$$(\forall a, b \in A) \quad a \neq b \implies F(a) \neq F(b)$$
- Az $F : A \rightarrow B$ függvény **szürjektív**, ha $\mathcal{R}_F = B$.
- Az $F : A \rightarrow B$ függvény **bijektív**, ha injektív és szürjektív.
- Ha $F : A \rightarrow B$ **injektív**, akkor az $F^{-1} : \mathcal{R}_F \rightarrow A$ **inverz függvény** értelmezése: $F^{-1}(b) = a$ ha $b = F(a)$.

2. A VALÓS SZÁMOK

2.1 A valós számok axiómarendszere

A valós számok $\mathbb{R}$ halmaza teljesíti a következő 3 axiómacsoportot:

Testaxiómák

$\mathbb{R}$ -ben két művelet van értelmezve:

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (x, y) \mapsto x + y \quad \text{összeadás,}$$

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (x, y) \mapsto x \cdot y \quad \text{szorzás.}$$

Az összeadás axiómái:

$$\begin{array}{ll} (\forall x, y \in \mathbb{R}) & x + y = y + x, \\ (\forall x, y, z \in \mathbb{R}) & x + (y + z) = (x + y) + z, \\ (\exists 0 \in \mathbb{R}) \quad (\forall x \in \mathbb{R}) & x + 0 = x, \\ (\forall x \in \mathbb{R}) \quad (\exists -x \in \mathbb{R}) & x + (-x) = 0. \end{array}$$

2. A VALÓS SZÁMOK

2.1 A valós számok axiómarendszere

Testaxiómák

A szorzás axiómái:

$$\begin{array}{ll} (\forall x, y \in \mathbb{R}) & x \cdot y = y \cdot x, \\ (\forall x, y, z \in \mathbb{R}) & x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z, \\ (\exists 1 \in \mathbb{R}, 1 \neq 0) \quad (\forall x \in \mathbb{R}) & x \cdot 1 = x, \\ (\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0) \quad (\exists x^{-1} \in \mathbb{R}) & x \cdot x^{-1} = 1. \end{array}$$

Továbbá

$$(\forall x, y, z \in \mathbb{R}) \quad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

2. A VALÓS SZÁMOK

2.1 A valós számok axiómarendszere

Rendezési axiómák

$\mathbb{R}$ -en értelmezve van egy $\leq$ **rendezési reláció**, melyre

$$(\forall x, y, z \in \mathbb{R}) \quad x \leq y \implies x + z \leq y + z,$$

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}) \quad (0 \leq x) \wedge (0 \leq y) \implies 0 \leq x \cdot y.$$

Teljességi axióma

$\mathbb{R}$ a rendezésre nézve **teljes**, azaz $\mathbb{R}$ bármely nemüres felülről korlátos részhalmazának létezik pontos felső korlátja.

$\mathbb{R}$ létezése

Létezik olyan $\mathbb{R}$ halmaz, mely teljesíti ezt a 3 axiómacsoportot (és ez a halmaz bizonyos értelemben egyértelmű).

A valós számokat a *számegyenesen* modellezhetjük.

2. A VALÓS SZÁMOK

2.2 $\mathbb{R}$ nevezetes részhalmazai, abszolút érték, távolság

$\mathbb{R}$ nevezetes részhalmazai

- **Természetes számok halmaza:** $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, \dots\}$
- **Egész számok halmaza:** $\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$
- **Racionális számok halmaza:** $\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$

$\mathbb{N}$ az $\mathbb{R}$ -nek az a legszűkebb részhalmaza, melyre teljesül az, hogy

- $1 \in \mathbb{N}$,
- ha $n \in \mathbb{N}$, akkor $n + 1 \in \mathbb{N}$.

Teljes indukció

Ha egy $M \subset \mathbb{N}$ részhalmazra teljesül az, hogy

- $1 \in M$,
- ha $n \in M$, akkor $n + 1 \in M$,

akkor $M = \mathbb{N}$.

2. A VALÓS SZÁMOK

2.2 $\mathbb{R}$ nevezetes részhalmazai, abszolút érték, távolság

$\mathbb{R}$ intervallumai

$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ esetén

nyílt: $]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$,

zárt: $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$,

balról nyílt, jobbról zárt: $]a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$,

balról zárt, jobbról nyílt: $[a, b[:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$,

elfajult: $[a, a] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq a\} = \{a\}$,

végtelen: $]a, \infty[:= \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$, $[a, \infty[:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$,

$] - \infty, b[:= \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$, $] - \infty, b] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$,

$] - \infty, \infty[:= \mathbb{R}$.

2. A VALÓS SZÁMOK

2.2 $\mathbb{R}$ nevezetes részhalmazai, abszolút érték, távolság

Valós szám abszolút értéke

Az $x \in \mathbb{R}$ szám **abszolút értéke**: $|x| := \begin{cases} x & \text{ha } x \geq 0, \\ -x & \text{ha } x < 0. \end{cases}$

Az abszolút érték tulajdonságai

Bármely $x, y \in \mathbb{R}$ esetén

- $|x| \geq 0$, és $|x| = 0 \iff x = 0$,
- $|xy| = |x| |y|$,
- $|x + y| \leq |x| + |y|$,
- $||x| - |y|| \leq |x - y|$,
- $|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$,
- $|x| < a \iff -a < x < a$.

2. A VALÓS SZÁMOK

2.2 $\mathbb{R}$ nevezetes részhalmazai, abszolút érték, távolság

$\mathbb{R}$ pontjainak távolsága

Az $x \in \mathbb{R}$ és $y \in \mathbb{R}$ pontok **távolsága**: $d(x, y) := |x - y|$

A távolság tulajdonságai

Bármely $x, y, z \in \mathbb{R}$ esetén

- $d(x, y) \geq 0$, és $d(x, y) = 0 \iff x = y$,
- $d(x, y) = d(y, x)$,
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

2. A VALÓS SZÁMOK

2.3 A teljességi axióma néhány következménye

Az $\mathbb{R}$ bármely nemüres alulról korlátos részhalmazának van pontos alsó korlátja.

A természetes számok halmaza felülről nem korlátos.

A valós számok Archimedesi tulajdonsága

Bármely $x > 0$ és $y \in \mathbb{R}$ számokhoz van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $y < nx$.

Cantor metszettétele

Zárt intervallumok egymásba skatulyázott sorozatának metszete nemüres, azaz ha $[a_n, b_n]$ ($n \in \mathbb{N}$) zárt egymásba skatulyázott intervallumok sorozata, azaz

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \dots,$$

akkor

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset.$$

2. A VALÓS SZÁMOK

2.3 A teljességi axióma néhány következménye

Valós számok egész kitevős hatványozása

Az $x \in \mathbb{R}$ szám egész kitevős hatványai:

$$x^1 := x, \quad x^{n+1} := x^n x \quad (n \in \mathbb{N}), \quad x^0 := 1, \quad x^{-n} := \frac{1}{x^n} \quad (x \neq 0, n \in \mathbb{N})$$

Nemnegatív valós szám n -edik gyökének létezése

Bármely $x \geq 0$ nemnegatív valós számhoz és $n \in \mathbb{N}$ természetes számhoz pontosan egy olyan $y \geq 0$ nemnegatív valós szám létezik, melyre

$$y^n = x.$$

Jelölés: $y = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$. Elnevezés: y az x szám **n -edik gyöke**.

Pozitív $x > 0$ valós szám racionális $r \in \mathbb{Q}$ kitevős hatványa:

$$x^r := \sqrt[q]{x^p}, \quad \text{ahol} \quad r = \frac{p}{q}, \quad p \in \mathbb{Z}, \quad q \in \mathbb{N}.$$

2. A VALÓS SZÁMOK

2.4 Topológiai fogalmak, Bolzano-Weierstrass tétel

- Az $a \in \mathbb{R}$ **pont** $\varepsilon > 0$ **sugarú (nyílt) környezete:**

$$K(a, \varepsilon) := \{x \in \mathbb{R} : d(x, a) < \varepsilon\} =]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$$

- Az $a \in \mathbb{R}$ pont az $A \subset \mathbb{R}$ **halmaz belső pontja**, ha a -nak van olyan környezete, mely teljesen benne van A -ban, azaz ha

$$(\exists \varepsilon > 0) (K(a, \varepsilon) \subset A).$$

- Az $a \in \mathbb{R}$ pont az $A \subset \mathbb{R}$ **halmaz izolált pontja**, ha $a \in A$, és a -nak van olyan környezete, melyben a -n kívül nincs A -beli pont:

$$(a \in A) \wedge ((\exists \varepsilon > 0) (K(a, \varepsilon) \setminus \{a\}) \cap A = \emptyset).$$

- Az $a \in \mathbb{R}$ pont az $A \subset \mathbb{R}$ **halmaz torlódási pontja**, ha a bármely környezetében van tőle különböző A -beli pont, azaz ha

$$(\forall \varepsilon > 0) ((K(a, \varepsilon) \setminus \{a\}) \cap A \neq \emptyset).$$

- Az $a \in \mathbb{R}$ pont az $A \subset \mathbb{R}$ **halmaz határpontja**, ha a bármely környezetében van A -beli és nem A -beli pont is, azaz ha

$$(\forall \varepsilon > 0) \left((K(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset) \wedge (K(a, \varepsilon) \cap \bar{A} \neq \emptyset) \right).$$

2. A VALÓS SZÁMOK

2.4 Topológiai fogalmak, Bolzano-Weierstrass tétel

- $A \subset \mathbb{R}$ összes belső pontjainak halmazát A **belsejének** nevezzük és A° -rel jelöljük.
- $A \subset \mathbb{R}$ összes határpontjainak halmazát A **határának** nevezzük és ∂A -val jelöljük.
- Az $A \subset \mathbb{R}$ halmazt **nyíltnak** nevezzük, ha minden pontja belső pontja A -nak.
- Az $A \subset \mathbb{R}$ halmazt **zártnak** nevezzük, ha komplementere nyílt.

Egy $A \subset \mathbb{R}$ halmaz akkor és csakis akkor zárt, ha tartalmazza összes torlódási pontját.

Bolzano-Weierstrass tétel

Bármely korlátos végtelen számhalmaznak van torlódási pontja.

3. SOROZATOK

3.1 Sorozatok korlátossága, monotonitása, konvergenciája

Valós számsorozat

Egy $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt **valós számsorozatnak** nevezünk.

Jelölés: $(a_n) = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ahol $a_n := a(n)$ ha $n \in \mathbb{N}$.

Sorozat megadása

- képlettel; például $a_n = \frac{1}{n}$ ha $n \in \mathbb{N}$.
- rekurzív módon; például $a_1 = 1$, és $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ ha $n \in \mathbb{N}$.
- szabállyal; például $a_n :=$ az n -edik prímszám.

Sorozat korlátossága

- $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **felülről korlátos**, ha $(\exists k \in \mathbb{R}) (\forall n \in \mathbb{N}) a_n \leq k$.
Az ilyen k számot a sorozat **felső korlátjának** nevezzük.

3. SOROZATOK

3.1 Sorozatok korlátossága, monotonitása, konvergenciája

Sorozat korlátossága

- $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **alulról korlátos**, ha $(\exists k' \in \mathbb{R}) (\forall n \in \mathbb{N}) a_n \geq k'$.
Az ilyen k' számot a sorozat **alsó korlátjának** nevezzük.

Sorozat korlátossága

Az $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat akkor és csakis akkor korlátos, ha

$$(\exists K \in \mathbb{R}) (\forall n \in \mathbb{N}) |a_n| \leq K.$$

Sorozat monotonitása

- $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **monoton növekvő**, ha $(\forall n \in \mathbb{N}) a_{n+1} \geq a_n$.
- $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **monoton csökkenő**, ha $(\forall n \in \mathbb{N}) a_{n+1} \leq a_n$.
- $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **szigorúan monoton növekvő**, ha $(\forall n \in \mathbb{N}) a_{n+1} > a_n$.
- $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **szigorúan monoton csökkenő**, ha $(\forall n \in \mathbb{N}) a_{n+1} < a_n$.

3. SOROZATOK

3.1 Sorozatok korlátossága, monotonitása, konvergenciája

Konvergens valós számsorozat

Az $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatot **konvergensnek** nevezzük, ha van olyan $a \in \mathbb{R}$, hogy bármely $\varepsilon > 0$ -hoz létezik olyan $N(\varepsilon) \in \mathbb{R}$ szám, hogy

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{amennyiben} \quad n > N(\varepsilon).$$

Az a számot a sorozat **határértékének** (limeszének) nevezzük.

Jelölés: $a_n \rightarrow a \quad (n \rightarrow \infty)$, vagy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

Az $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatot **divergensnek** nevezünk, ha nem konvergens.

A konvergencia környezetes átfogalmazása

Az $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat konvergens és határértéke $a \in \mathbb{R}$ akkor és csak akkor, ha az a pont bármely környezetén kívül a sorozatnak csak véges sok eleme van.

3. SOROZATOK

3.1 Sorozatok korlátossága, monotonitása, konvergenciája

Ha egy sorozatban

- *véges sok elemet teszőlegesen megváltoztatunk,*
- *vagy a sorozatból véges sok elemet elhagyunk,*
- *vagy a sorozathoz véges sok elemet hozzáveszünk,*

akkor a sorozat konvergenciája vagy divergenciája nem változik, és konvergencia esetén a határértéke sem változik.

A határérték egyértelműsége

Konvergens sorozatnak pontosan egy határértéke van.

A konvergencia és a korlátosság kapcsolata

- *Konvergens sorozat korlátos.*
- *Van olyan korlátos sorozat, mely divergens (nem konvergens).*

3. SOROZATOK

3.1 Sorozatok korlátossága, monotonitása, konvergenciája

$\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ a sorozat elemeiből álló halmaz
(azaz a sorozat mint függvény értékkészlete)

A konvergencia és a monotonitás kapcsolata

- Ha az $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat monoton növekvő és felülről korlátos, akkor konvergens és $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.
- Ha az $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat monoton csökkenő és alulról korlátos, akkor konvergens és $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

3. SOROZATOK

3.2 Műveletek, rendezés és konvergencia kapcsolata

A konvergencia és a műveletek kapcsolata

Ha $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow b$ ($n \rightarrow \infty$), akkor

$$a_n + b_n \rightarrow a + b \quad (n \rightarrow \infty),$$

$$a_n b_n \rightarrow ab \quad (n \rightarrow \infty),$$

$$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b} \quad (n \rightarrow \infty), \quad \text{ha } b_n, b \neq 0,$$

$$ca_n \rightarrow ca \quad (n \rightarrow \infty),$$

$$|a_n| \rightarrow |a| \quad (n \rightarrow \infty).$$

3. SOROZATOK

3.2 Műveletek, rendezés és konvergencia kapcsolata

Előjel=signum függvény

$$\text{sign}(x) := \begin{cases} 1 & \text{ha } x > 0, \\ 0 & \text{ha } x = 0, \\ -1 & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

A konvergencia és a rendezés kapcsolata

- Konvergens sorozat **jeltartó**, azaz ha $a_n \rightarrow a \neq 0$ ($n \rightarrow \infty$), akkor van olyan $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $\text{sign}(a_n) = \text{sign}(a)$ ha $n > n_0$.
- A konvergencia **megőrzi a monotonitást**, azaz ha $a_n \leq b_n$ ($n \in \mathbb{N}$) és $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow b$ ($n \rightarrow \infty$), akkor $a \leq b$.
- Érvényes a **rendőrtétel**, azaz ha $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow a$ ($n \rightarrow \infty$) és $a_n \leq x_n \leq b_n$ ($n \in \mathbb{N}$), akkor $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is konvergens és $x_n \rightarrow a$ ($n \rightarrow \infty$).

3. SOROZATOK

3.3 Bővített valós számok, végtelenhez tartó sorozatok

Bővített valós számok halmaza

$$\mathbb{R}_b := \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\} \quad \text{Jelölés: } \infty := +\infty$$

Műveletek $\mathbb{R}_b$ -ben

Bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}x + (\pm\infty) &:= (\pm\infty) + x = \pm\infty, \\(+\infty) + (+\infty) &:= +\infty, \quad (-\infty) + (-\infty) := -\infty, \\x \cdot (\pm\infty) &:= (\pm\infty) \cdot x = \pm\infty \quad \text{ha } x > 0, \\x \cdot (\pm\infty) &:= (\pm\infty) \cdot x = \mp\infty \quad \text{ha } x < 0, \\(+\infty) \cdot (\pm\infty) &:= \pm\infty, \quad (-\infty) \cdot (\pm\infty) := \mp\infty, \\\frac{x}{\pm\infty} &:= 0.\end{aligned}$$

Rendezés $\mathbb{R}_b$ -ben

Bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén $-\infty < x < +\infty$.

3. SOROZATOK

3.3 Bővített valós számok, végtelenhez tartó sorozatok

NINCSENEK ÉRTELMEZVE AZ ALÁBBIK:

$$(+\infty) + (-\infty), \quad (-\infty) + (+\infty), \quad 0 \cdot (\pm\infty), \quad (\pm\infty) \cdot 0,$$

$$\frac{+\infty}{+\infty}, \quad \frac{+\infty}{-\infty}, \quad \frac{-\infty}{+\infty}, \quad \frac{-\infty}{-\infty}, \quad \frac{x}{0} \quad \text{ha } x \in \mathbb{R}_b.$$

3. SOROZATOK

3.3 Bővített valós számok, végtelenhez tartó sorozatok

A határérték fogalmának kiterjesztése

Azt mondjuk, hogy az $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat **határértéke** $+\infty$, ha bármely $K \in \mathbb{R}$ számhoz van olyan $N(K) \in \mathbb{R}$, hogy

$$a_n > K \quad \text{ha } n > N(K).$$

Jelölés: $a_n \rightarrow +\infty$ ($n \rightarrow \infty$) vagy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$.

Azt mondjuk, hogy az $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat **határértéke** $-\infty$, ha bármely $K \in \mathbb{R}$ számhoz van olyan $N(K) \in \mathbb{R}$, hogy

$$a_n < K \quad \text{ha } n > N(K).$$

Jelölés: $a_n \rightarrow -\infty$ ($n \rightarrow \infty$) vagy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$.

Ha $a_n \rightarrow +\infty$ vagy $a_n \rightarrow -\infty$, akkor a sorozat **divergens**, de **van határértéke!**

3. SOROZATOK

3.3 Bővített valós számok, végtelenhez tartó sorozatok

Környezetek $\mathbb{R}_b$ -ben

$+\infty$ környezetei a $]K, +\infty[$ ($K \in \mathbb{R}$) intervallumok,
 $-\infty$ környezetei a $] -\infty, K[$ ($K \in \mathbb{R}$) intervallumok

A határérték környezetes átfogalmazása $\mathbb{R}_b$ -ben

Egy sorozat határértéke $+\infty$ (illetve $-\infty$) akkor és csakis akkor, ha $+\infty$ (illetve $-\infty$) bármely környezetén kívül a sorozatnak csak véges sok eleme van.

Pontos felső korlát $\mathbb{R}_b$ -ben

Ha $A \subset \mathbb{R}$ felülről nem korlátos, akkor $\sup A := +\infty$.

Ha $A \subset \mathbb{R}$ alulól nem korlátos, akkor $\inf A := -\infty$.

Minden $A \subset \mathbb{R}$ halmaznak van szuprémuma és infimuma $\mathbb{R}_b$ -ben.

Minden monoton sorozatnak van határértéke $\mathbb{R}_b$ -ben.

3. SOROZATOK

3.3 Bővített valós számok, végtelenhez tartó sorozatok

A határérték és műveletek kapcsolata $\mathbb{R}_b$ -ben

Ha $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow b$ ($n \rightarrow \infty$), ahol most $a, b \in \mathbb{R}_b$, és $c \in \mathbb{R}$, akkor

$$a_n + b_n \rightarrow a + b \quad (n \rightarrow \infty), \quad \text{ha } a + b \text{ értelmezve van,}$$

$$a_n \cdot b_n \rightarrow a \cdot b \quad (n \rightarrow \infty), \quad \text{ha } a \cdot b \text{ értelmezve van,}$$

$$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b} \quad (n \rightarrow \infty), \quad \text{ha } b_n \neq 0 \quad (n \in \mathbb{N}),$$

$$\text{és } \frac{a}{b} \text{ értelmezve van,}$$

$$c \cdot a_n \rightarrow c \cdot a \quad (n \rightarrow \infty), \quad \text{ha } c \cdot a \text{ értelmezve van,}$$

továbbá ha $|a_n| \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$), akkor $\frac{1}{a_n} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

3. SOROZATOK

3.4 Nevezetes határértékek

$$\bullet \quad n^a \rightarrow \begin{cases} +\infty & \text{ha } a > 0, \\ 1 & \text{ha } a = 0, \\ 0 & \text{ha } a < 0. \end{cases} \quad a^n \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{ha } |a| < 1, \\ 1 & \text{ha } a = 1, \\ +\infty & \text{ha } a > 1, \\ \text{divergens} & \text{ha } a \leq -1. \end{cases}$$

• Ha $a > 0$, akkor $\sqrt[n]{a} \rightarrow 1$ ($n \rightarrow \infty$).

• Ha $|a| < 1$ és $k \in \mathbb{R}$, akkor $n^k a^n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

• $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$ ($n \rightarrow \infty$).

• Ha $a \in \mathbb{R}$, akkor $\frac{a^n}{n!} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

• Az $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ($n \in \mathbb{N}$) sorozat szigorúan monoton növekvő és felülről korlátos, $a_n < 3$ ($n \in \mathbb{N}$), így konvergens. Határértéke egy nevezetes szám, amit e -vel jelölünk, közelítő értéke $e \approx 2,72$.

4. SOROK

4.1 Definíció, konvergencia, divergencia, összeg

Számsor

Egy $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ valós számsorozat elemeit az összeadás jelével összekapcsolva kapott

$$a_1 + a_2 + \cdots \quad \text{vagy} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \left(\text{röviden } \sum a_n \right)$$

összeget **számsornak** (vagy numerikus sornak) nevezzük.

A $\sum a_n$ sort **konvergensnek** nevezzük, ha **részletösszegeinek**

$$s_n := a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k \quad (n \in \mathbb{N})$$

sorozata konvergens, és ekkor a **sor összege** $s := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$, és azt

írjuk, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s, \quad \text{azaz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k.$$

A $\sum a_n$ sort **divergensnek** nevezzük, ha nem konvergens.

4. SOROK

4.1 Definíció, konvergencia, divergencia, összeg

- A $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \dots$, $(a, q \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ **geometriai sor** akkor és csakis akkor konvergens, ha $|q| < 1$, és akkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1-q} = \frac{\text{első tag}}{1 - \text{kvóciens}}.$$

- A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ **harmónikus sor** divergens.

Sor konvergenciájának szükséges feltétele

Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

4. SOROK

4.1 Definíció, konvergencia, divergencia, összeg

Leibniz tétele

(elegendő feltétel alternáló sorok konvergenciájára)

A $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ ($a_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$) **alternáló sor** konvergens, ha $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton csökkenően tart nullához, és ekkor a sor s összegére, és részletösszegeinek $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatára teljesül

$$|s - s_n| \leq a_{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Például a $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ alternáló sor konvergens (és összege $\ln 2$).

4. SOROK

4.2 Pozitív tagú sorok

A $\sum a_n$ sort akkor nevezzük pozitív tagúnak, ha $a_n > 0$ ($n \in \mathbb{N}$).

Pozitív tagú sor akkor és csakis akkor konvergens, ha a részletösszegeiből álló sorozat felülről korlátos.

Majoráns/minoráns teszt

Legyenek $0 < a_n \leq b_n$ ($n \in \mathbb{N}$).

- Ha a $\sum b_n$ sor konvergens, akkor a $\sum a_n$ sor is konvergens.
- Ha a $\sum a_n$ sor divergens, akkor a $\sum b_n$ sor is divergens.

4. SOROK

4.2 Pozitív tagú sorok

Hányados/D'Alembert teszt

Legyen $\sum a_n$ pozitív tagú sor.

- Ha $(\exists q < 1) (\forall n \in \mathbb{N}) \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$, akkor a $\sum a_n$ sor konvergens.
- Ha $(\forall n \in \mathbb{N}) \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, akkor a $\sum a_n$ sor divergens.

Hányados/D'Alembert teszt limeszes alakja

Legyen $\sum a_n$ pozitív tagú sor, és tegyük fel, hogy

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \in \mathbb{R}_b.$$

- Ha $L < 1$, akkor a $\sum a_n$ sor konvergens.
- Ha $L > 1$, akkor a $\sum a_n$ sor divergens.
- Ha $L = 1$, akkor a $\sum a_n$ sor lehet konvergens, és lehet divergens is.

4. SOROK

4.2 Pozitív tagú sorok

Gyök/Cauchy teszt

Legyenek $a_n \geq 0$ ($n \in \mathbb{N}$).

- Ha $(\exists q < 1) (\forall n \in \mathbb{N}) \sqrt[n]{a_n} \leq q$, akkor a $\sum a_n$ sor konvergens.
- Ha $(\forall n \in \mathbb{N}) \sqrt[n]{a_n} \geq 1$, akkor a $\sum a_n$ sor divergens.

Gyök/Cauchy teszt limeszes alakja

Legyenek $a_n \geq 0$ ($n \in \mathbb{N}$), és tegyük fel, hogy

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L \in \mathbb{R}_b.$$

- Ha $L < 1$, akkor a $\sum a_n$ sor konvergens.
- Ha $L > 1$, akkor a $\sum a_n$ sor divergens.
- Ha $L = 1$, akkor a $\sum a_n$ sor lehet konvergens, és lehet divergens is.

4. SOROK

4.3 Abszolút konvergencia, műveletek sorokkal

- A $\sum a_n$ sort **abszolút konvergensnek** nevezzük, ha a $\sum |a_n|$ sor konvergens.
- A $\sum a_n$ sort **feltételesen konvergensnek** nevezzük, ha a sor konvergens, de nem abszolút konvergens.

Abszolút konvergens sor konvergens, de konvergens sor lehet nem abszolút konvergens.

Sor átrendezése

Ha $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ bijektív, akkor a $\sum a_{\varphi(n)}$ sort a $\sum a_n$ sor **átrendezésének** nevezzük.

- *Abszolút konvergens sor bármely átrendezése is konvergens, és az átrendezett sor összege megegyezik az eredeti sor összegével.*
- *Feltételesen konvergens sornak van olyan átrendezése, mely divergens, vagy melynek összege egy tetszőlegesen előírt szám.*

4. SOROK

4.3 Abszolút konvergencia, műveletek sorokkal

- *Konvergens sor tetszőlegesen zárójelezhető, és a zárójelezett sor összege megegyezik az eredeti sor összegével.*
- *Ha $\sum a_n$ és $\sum b_n$ konvergenssek és $c \in \mathbb{R}$, akkor $\sum(a_n + b_n)$ és $\sum(c \cdot a_n)$ is konvergenssek, és*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ sorok **Cauchy-féle szorzatsora** $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, ahol

$$c_n := a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0 = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

Abszolút konvergens sorok Cauchy-féle szorzatsora is abszolút konvergens, és összege a tényezősorok összegének szorzata.

4. SOROK

4.4 Hatványsorok

Egy $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ számsorozat és $a \in \mathbb{R}$ esetén a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - a)^n$ összeget **hatványsornak** nevezzük, melynek **konvergenciahalmazát** azon $x \in \mathbb{R}$ pontok alkotják, melyekre a sor konvergens. A konvergenciahalmaz pontjaiban értelmezhető a sor **összegfüggvénye** (mint a részletösszegek határértéke).

Tegyük fel, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - a)^n$ hatványsor esetén $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in \mathbb{R}_b$.

Az $r := \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \in \mathbb{R}_b$ (ahol $\frac{1}{0} := +\infty$, $\frac{1}{+\infty} := 0$) bővített valós számot a hatványsor **konvergenciasugarának** nevezzük.

- Ha $|x - a| < r$, akkor a hatványsor abszolút konvergens x -ben.
- Ha $|x - a| > r$, akkor a hatványsor divergens x -ben.

5. FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE ÉS FOLYTONOSSÁGA

5.1 Függvény határértéke

A torlódási pont fogalmát már korábban bevezettük. Ezt most kiterjesztjük arra az esetre amikor a torlódási pont $\mathbb{R}_b$ -beli. Azt mondjuk, hogy $+\infty$ ($-\infty$) torlódási pontja a D halmaznak, ha D nem korlátos felülről (alulról). Egy $D \subset \mathbb{R}$ halmaz $\mathbb{R}_b$ -beli torlódási pontjainak halmazát D' -vel fogjuk jelölni.

Függvény határértéke

Legyen $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és legyen $x_0 \in D'$. Azt mondjuk, hogy **f -nek van (véges, vagy végtelen) határértéke az x_0 pontban**, ha van olyan $a \in \mathbb{R}_b$ bővített valós szám, hogy bármely olyan D -beli $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatra, melyre $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ és $x_n \neq x_0$, teljesül a $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$ egyenlőség.

a -t az f függvény x_0 pontbeli határértékének nevezzük, és $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ -val, vagy $f(x) \rightarrow a$ ($x \rightarrow x_0$)-al jelöljük.

5. FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE ÉS FOLYTONOSSÁGA

5.1 Függvény határértéke

Átfogalmazás

Másképpen megfogalmazva: az f függvény értelmezési tartományának egy $x_0 \in \mathbb{R}_b$ torlódási pontjában akkor és csakis akkor lesz f határértéke az $a \in \mathbb{R}_b$ bővített valós szám, ha az értelmezési tartományból bármely x_0 -hoz konvergáló $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatot véve, melynek elemei x_0 -tól különbözőek, a függvényértékek $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ sorozata a -hoz tart.

Határérték egyértelműsége

Függvény határértéke, ha létezik, akkor egyértelmű.

Határérték **létezhet az x_0 pontban akkor is, ha a függvény nincs értelmezve a pontban**, de torlódási pontja annak (egy halmaz torlódási pontja ugyanis nem feltétlenül pontja a halmaznak).

5. FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE ÉS FOLYTONOSSÁGA

5.1 Függvény határértéke

Legyen $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és legyen $E \subset D$, akkor az f **függvény E -re való leszukítását** $f|_E$ -vel jelöljük. Ez a függvény csak az E halmazon van definiálva és ott megegyezik f -fel.

Jobb- és baloldali határérték $x_0 \in \mathbb{R}_b$ -ben

Legyen $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és legyen $x_0 \in \mathbb{R}_b$ a $D_{x_0}^+ := D \cap [x_0, +\infty[$ ($D_{x_0}^- := D \cap]-\infty, x_0]$) halmaz torlódási pontja. Akkor mondjuk, hogy az $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in \mathbb{R}_b$ bővített valós szám **jobboldali (baloldali) határértéke** az x_0 pontban, ha $a \in \mathbb{R}_b$ az x_0 pontbeli határértéke az $f|_{D_{x_0}^+}$ ($f|_{D_{x_0}^-}$) leszukított függvénynek.

Jobboldali (baloldali) határérték jelölése: $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = a$

($\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = a$)

Világos, hogy $+\infty$ -ben csak baloldali, $-\infty$ -ben csak jobboldali határérték definiálható.

5. FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE ÉS FOLYTONOSSÁGA

5.1 Függvény határértéke

Függvény határértékére a fentivel ekvivalens definíció adható, de ekkor a véges és végtelenben vett véges és végtelen határértékek definíciója kissé eltérő.

Függvény véges határértéke véges pontban, ε, δ -s definíció

Legyen $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és legyen $x_0 \in D'$ véges torlódási pontja D -nek. Azt mondjuk, hogy **f -nek van (véges) határértéke az x_0 pontban**, ha van olyan $a \in \mathbb{R}$ szám, hogy minden $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $\delta(\varepsilon) > 0$, hogy

$$|f(x) - a| < \varepsilon \quad \text{ha} \quad 0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \quad \text{és} \quad x \in D.$$

5. FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE ÉS FOLYTONOSSÁGA

5.1 Függvény határértéke

Határérték, monotonitás és műveletek kapcsolata

Legyenek $f, g : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in D'$, és tegyük fel, hogy

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}_b, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b \in \mathbb{R}_b.$$

Akkor bármely $c \in \mathbb{R}$ mellett

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = a + b, \quad \text{ha } a + b \text{ értelmezve van,}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} c \cdot f(x) = c \cdot a, \quad \text{ha } c \cdot a \text{ értelmezve van,}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = a \cdot b, \quad \text{ha } a \cdot b \text{ értelmezve van,}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}, \quad \text{ha } \frac{a}{b} \text{ értelmezve van.}$$

Ha $f(x) \leq g(x)$ ($x \in D$, $x \neq x_0$), akkor $a \leq b$.

Ha $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ ($x \in D$, $x \neq x_0$), és $a = b$, akkor $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = a$.

5. FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE ÉS FOLYTONOSSÁGA

5.1 Függvény határértéke

Összetett függvény

A $h(x) := g(f(x))$ ($x \in D$) függvényt, ahol $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g : f(D) \rightarrow \mathbb{R}$, az f és g függvényekből **összetett függvénynek nevezzük**, f a belső, g a külső függvény. (Itt $f(D) := \{f(x) : x \in D\}$ az f függvény értékkészlete.) Más jelölés: $h = g \circ f$.

Összetett függvény határértéke

Legyen $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g : f(D) \rightarrow \mathbb{R}$, és $h(x) := g(f(x))$ ($x \in D$).
Ha $x_0 \in D'$,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a, \quad a \notin f(D \setminus \{x_0\}), \quad \text{és} \quad \lim_{y \rightarrow a} g(y) = b,$$

akkor

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = b.$$

5. FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE ÉS FOLYTONOSSÁGA

5.2 Függvény folytonossága

Függvény folytonossága

Az $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt **folytonosnak** nevezzük az $x_0 \in D$ pontban, ha bármely D -beli x_0 -hoz konvergáló $x_n \in D$ ($n \in \mathbb{N}$), $x_n \rightarrow x_0$ ($n \rightarrow \infty$) sorozat esetén a függvényértékek $f(x_n)$ ($n \in \mathbb{N}$) sorozata az x_0 pontbeli függvényértékhez tart $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Röviden: az f függvény $x_0 \in D$ pontbeli folytonossága azt jelenti, hogy ha $D \ni x_n \rightarrow x_0$ ($n \rightarrow \infty$) akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = f(x_0)$.

- Ha $x_0 \in D \cap D'$, akkor f folytonos x_0 -ban akkor, és csakis akkor, ha $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.
- Ha $x_0 \in D$, de $x_0 \notin D'$, akkor x_0 a D **izolált pontja**, izolált pontokban f a definíció alapján mindig folytonos.

5. FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE ÉS FOLYTONOSSÁGA

5.2 Függvény folytonossága

Jobb- és baloldali folytonosság

Az $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt jobbról (balról) **folytonosnak** nevezzük az $x_0 \in D$ pontban, ha az $f|_{D_{x_0}^+}$ ($f|_{D_{x_0}^-}$) leszukított függvény folytonos az $x_0 \in D$ pontban.

Ez azt jelenti, hogy az $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor jobbról (balról) **folytonos** az $x_0 \in D$ pontban, ha bármely D -beli x_0 -hoz konvergáló $x_n \in D$ ($n \in \mathbb{N}$), $x_n \geq x_0$ ($x_n \leq x_0$), $x_n \rightarrow x_0$ ($n \rightarrow \infty$) sorozat esetén a függvényértékek $f(x_n)$ ($n \in \mathbb{N}$) sorozata az x_0 pontbeli függvényértékhez tart, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$.

5. FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE ÉS FOLYTONOSSÁGA

5.2 Függvény folytonossága

Függvény folytonossága, ε , δ -s ekvivalens definíció

Az $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt az $x_0 \in D$ pontban **folytonosnak** nevezzük, ha bármely $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $\delta(\varepsilon) > 0$, hogy

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{ha} \quad |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \quad \text{és} \quad x \in D.$$

Függvény folytonossága és a műveletek kapcsolata

- Ha $f, g : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonosak az $x_0 \in D$ pontban és $c \in \mathbb{R}$, akkor $f + g$, $c \cdot f$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ (ha $g(x_0) \neq 0$) is folytonosak x_0 -ban.
- A $h(x) = g(f(x))$ ($x \in D$) összetett függvény folytonos x_0 -ban (ahol $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g : f(D) \rightarrow \mathbb{R}$), ha f folytonos x_0 -ban és g folytonos az $y_0 := f(x_0)$ pontban.

5. FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE ÉS FOLYTONOSSÁGA

5.3 Folytonos függvények globális tulajdonságai

Azt mondjuk, hogy az $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény a D halmazon

- **alulról (felülről) korlátos**, ha értékkészlete alulról (felülről) korlátos.
- **monoton növekvő (csökkenő)**, ha

$$\forall x_1 < x_2, x_1, x_2 \in D \text{ esetén } f(x_1) \leq f(x_2) \text{ (} f(x_1) \geq f(x_2) \text{)).}$$

- **szigorúan monoton növekvő (csökkenő)**, ha

$$\forall x_1 < x_2, x_1, x_2 \in D \text{ esetén } f(x_1) < f(x_2) \text{ (} f(x_1) > f(x_2) \text{)).}$$

5. FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE ÉS FOLYTONOSSÁGA

5.3 Folytonos függvények globális tulajdonságai

Azt mondjuk, hogy az $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek az $x_0 \in D$ pontban

- **lokális/helyi maximuma (minimuma)** van, ha $\exists \varepsilon > 0$, hogy

$$f(x_0) \geq f(x) \quad (f(x_0) \leq f(x)) \quad \forall x \in K(x_0, \varepsilon) \cap D \text{ esetén.}$$

- **szigorú lokális/helyi maximuma (minimuma)** van, ha $\exists \varepsilon > 0$, hogy

$$f(x_0) > f(x) \quad (f(x_0) < f(x)) \quad \forall x \in K(x_0, \varepsilon) \cap D, x \neq x_0 \text{ esetén.}$$

- **globális/abszolút maximuma (minimuma)** van, ha

$$f(x_0) \geq f(x) \quad (f(x_0) \leq f(x)) \quad \forall x \in D \text{ esetén.}$$

- **szigorú globális/abszolút maximuma (minimuma)** van, ha

$$f(x_0) > f(x) \quad (f(x_0) < f(x)) \quad \forall x \in D, x \neq x_0 \text{ esetén.}$$

5. FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE ÉS FOLYTONOSSÁGA

5.3 Folytonos függvények globális tulajdonságai

Folytonos függvény **jeltartó**, azaz ha $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos az $x_0 \in D$ pontban, és $f(x_0) \neq 0$, akkor van olyan $\delta > 0$, hogy

$$\text{sign}(f(x)) = \text{sign}(f(x_0)) \quad \text{ha } x \in K(x_0, \delta) \cap D.$$

Függvény folytonossága halmazon

Azt mondjuk, hogy az $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény **folytonos az $A \subset D$ halmazon**, ha f az A halmaz minden pontjában folytonos.

Folytonos függvény korlátossága

Korlátos zárt intervallumon folytonos függvény korlátos.

Maximum, minimum létezése

Korlátos zárt intervallumon folytonos függvény felveszi a függvényértékek szuprémumát és infimumát függvényértékként.

5. FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE ÉS FOLYTONOSSÁGA

5.3 Folytonos függvények globális tulajdonságai

Függvény egyenletes folytonossága halmazon

Azt mondjuk, hogy az $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény **egyenletesen folytonos a $D_1 \subset D$ halmazon**, ha bármely $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan (csak ε -tól függő) $\delta(\varepsilon) > 0$, amelyre

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \text{ha} \quad |x - y| < \delta(\varepsilon) \quad \text{és} \quad x, y \in D_1.$$

Ha f csupán folytonos D_1 -en, akkor bármely $\varepsilon > 0$ -hoz és bármely $y \in D_1$ -hez van olyan (y -tól is függő) $\delta(\varepsilon, y) > 0$, amelyre

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \text{ha} \quad |x - y| < \delta(\varepsilon, y) \quad \text{és} \quad x \in D_1.$$

Cantor tétele

Korlátos zárt intervallumon folytonos függvény ott egyenletesen folytonos.

5. FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE ÉS FOLYTONOSSÁGA

5.3 Folytonos függvények globális tulajdonságai

Közbenső értékek tétele

Egy intervallumon folytonos függvény felvesz bármely két függvényérték közötti értéket is függvényértékként.

Azaz egy intervallumon folytonos függvény **értékkészlete is egy intervallum.**

Inverz függvény folytonossága

Egy intervallumon folytonos, szigorúan monoton függvény injektív, és inverze is folytonos, és szigorúan monoton (ugyanolyan értelemben mint az eredeti függvény).

Inverz függvény folytonossága

Egy intervallumon folytonos és injektív függvény inverze is folytonos.

5. FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE ÉS FOLYTONOSSÁGA

5.4 Az elemi függvények folytonossága

- $x \mapsto \ln x :=$ az $x \mapsto e^x$ függvény inverze, $\ln :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$,
- $a^x := e^{x \ln a}$ ($x \in \mathbb{R}$), ahol $a > 0$,
- $x \mapsto \log_a x :=$ az $x \mapsto a^x$ függvény inverze, ahol $0 < a \neq 1$, $\log_a :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$,
- $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] := \arcsin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$ függvény inverze,
- $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi] := \arccos|_{[0, \pi]}$ függvény inverze,
- $\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[:= \operatorname{arctg}|_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}$ függvény inverze,
- $\operatorname{arcctg} : \mathbb{R} \rightarrow]0, \pi[:= \operatorname{arcctg}|_{]0, \pi[}$ függvény inverze.

5. FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE ÉS FOLYTONOSSÁGA

5.4 Az elemi függvények folytonossága

Elemi függvények

Az

- $f(x) = c$ ($x \in \mathbb{R}$) (ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstans),
- $f(x) = x$ ($x \in \mathbb{R}$),
- $f(x) = e^x$ ($x \in \mathbb{R}$),
- $f(x) = \ln x$ ($x > 0$),
- $f(x) = \sin x$ ($x \in \mathbb{R}$),
- $f(x) = \arcsin x$ ($x \in [-1, 1]$)

függvényeket, és ezekből a

- 4 alapl művelet (összeadás, kivonás, szorzás, osztás),
- összetett függvény képzése,
- leszűkítés egy intervallumra

operációk véges sokszori alkalmazásával keletkező függvényeket **elemi függvényeknek** nevezzük.

5. FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE ÉS FOLYTONOSSÁGA

5.4 Az elemi függvények folytonossága

Elemi függvények

- Az

- $f(x) = x^\alpha := e^{\alpha \ln x}$ ($x > 0$), *általános hatványfüggvény,*
- *a trigonometrikus függvények és inverzeik,*
- *a polinomok,*
- *racióális törtfüggvények (azaz polinomok hányadosai)*

elemi függvények.

- *Az elemi függvények folytonosak.*

5. FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE ÉS FOLYTONOSSÁGA

5.5 Nevezetes függvényhatárértékek

Nevezetes függvényhatárértékek

- $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e,$

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1,$

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

6. DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS

6.1 Differenciálhatóság, differenciálási szabályok

Differenciálhatóság, differenciálhányados/derivált

Az $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ($I \subset \mathbb{R}$ egy nem elfajult intervallum) függvényt **differenciálhatónak** nevezzük az $x_0 \in I$ pontban, ha létezik a

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}.$$

E határértéket az f függvény x_0 pontbeli **differenciálhányadosának** vagy **deriváltjának** nevezzük.

Jelölés: $f'(x_0)$ vagy $\frac{df}{dx}(x_0)$.

Minden olyan $x \in I$ pontban, ahol f differenciálható, értelmezhetjük az $x \mapsto f'(x)$ **derivált függvényt**.

6. DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS

6.1 Differenciálhatóság, differenciálási szabályok

A derivált jelentése:

- $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ az $[x_0, x]$ intervallumon vett **differenciahányados**, ami a függvény változásának **átlagsebessége**;
- $f'(x_0)$ az átlagsebesség határértéke, amikor az $[x_0, x]$ intervallum összehúzódik az x_0 pontra, azaz $f'(x_0)$ a függvény változásának x_0 pontbeli **pillanatnyi sebessége**.

A derivált geometriai jelentése:

- $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ az f függvény görbéjének $(x_0, f(x_0))$ és $(x, f(x))$ pontjait összekötő *szelőjének iránytangense*;
- $f'(x_0)$ az f függvény görbéjéhez az $(x_0, f(x_0))$ pontban húzott **érintő iránytangense**.

Ha f differenciálható egy pontban, akkor ott folytonos is.

6. DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS

6.1 Differenciálhatóság, differenciálási szabályok

Differenciálás és a műveletek kapcsolata

Ha $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálhatók az $x_0 \in I$ pontban, akkor

- $f + g$ is differenciálható x_0 -ban, és

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0),$$

- tetszőleges $c \in \mathbb{R}$ esetén $c \cdot f$ is differenciálható x_0 -ban, és

$$(c \cdot f)'(x_0) = c \cdot f'(x_0),$$

- $f \cdot g$ is differenciálható x_0 -ban, és

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0),$$

- ha $g(x_0) \neq 0$, akkor $\frac{f}{g}$ is differenciálható x_0 -ban, és

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

6. DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS

6.1 Differenciálhatóság, differenciálási szabályok

Differenciálhatóság és lineáris approximálhatóság kapcsolata

- Az $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor differenciálható az $x_0 \in I$ pontban, ha van olyan $A \in \mathbb{R}$ konstans, hogy

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)}{x - x_0} = 0.$$

Ha ez teljesül, akkor $A = f'(x_0)$.

- Az $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor differenciálható az $x_0 \in I$ pontban, ha van olyan $A \in \mathbb{R}$ konstans és $\varepsilon : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, hogy

$$f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + \varepsilon(x - x_0) \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

Ekkor $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, azaz, az $x \mapsto f(x)$ függvény az $x \mapsto f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ **lineáris függvénnyel approximálható**

6. DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS

6.1 Differenciálhatóság, differenciálási szabályok

Összetett függvény differenciálhatósága

Legyen $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $J := f(I)$ az f értékkészlete, $g : J \rightarrow \mathbb{R}$.

Ha f differenciálható az $x_0 \in I$ pontban és g differenciálható az $y_0 := f(x_0) \in J$ pontban, akkor a $h := g \circ f$ összetett függvény differenciálható az x_0 pontban, és

$$h'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Inverz függvény differenciálhatósága

Tegyük fel, hogy $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ invertálható, folytonos I -n, differenciálható az $x_0 \in I$ pontban, és $f'(x_0) \neq 0$. Akkor az $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$ inverz függvény differenciálható az $y_0 := f(x_0)$ pontban, és

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

6. DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS

6.2 Az elemi függvények deriváltjai

$$(c)' = 0$$

$$(x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R} \text{ tetszőleges konstans}),$$

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$(x > 0, \text{ ha } \alpha \in \mathbb{R}; x \in \mathbb{R}, \text{ ha } \alpha \in \mathbb{N}),$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(x \in \mathbb{R}),$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(x \in \mathbb{R}),$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}),$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(x \in \mathbb{R}, x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}),$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(x \in \mathbb{R}),$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$(x \in \mathbb{R}, 0 < a \neq 1),$$

6. DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS

6.2 Az elemi függvények deriváltjai

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (x > 0),$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad (x > 0, 0 < a \neq 1),$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1),$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1),$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Az elemi függvények értelmezési tartományuk belső pontjaiban differenciálhatók.

6. DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS

6.3 Középértéktételek és alkalmazásaik

Lokális szélsőérték szükséges feltétele

Ha $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható az $x_0 \in I^\circ$ belső pontban (I° jelöli az I intervallum belső pontjainak halmazát, vagyis belsejét), és f -nek x_0 -ban lokális szélsőértéke van, akkor

$$f'(x_0) = 0.$$

Cauchy-féle középértéktétel

Legyenek $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonosak $[a, b]$ -n, differenciálhatók $]a, b[$ -n, akkor van olyan $\xi \in]a, b[$, melyre

$$(f(b) - f(a))g'(\xi) = (g(b) - g(a))f'(\xi),$$

vagy, ha $g'(x) \neq 0$ ($x \in]a, b[$), akkor

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

6. DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS

6.3 Középértéktételek és alkalmazásaik

Lagrange-féle középértéktétel

Legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos $[a, b]$ -n, differenciálható $]a, b[$ -n, akkor van olyan $\xi \in]a, b[$, melyre

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Rolle-féle középértéktétel

Legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos $[a, b]$ -n, differenciálható $]a, b[$ -n, $f(a) = f(b)$, akkor van olyan $\xi \in]a, b[$, melyre

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

6. DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS

6.3 Középértéktételek és alkalmazásaik

Monotonitás és deriváltak kapcsolata

Legyen $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható I -n.

- *f monoton növekvő I -n akkor és csak akkor, ha $f'(x) \geq 0$ ($x \in I$).*
- *f monoton csökkenő I -n akkor és csak akkor, ha $f'(x) \leq 0$ ($x \in I$).*
- *f konstans I -n akkor és csak akkor, ha $f'(x) = 0$ ($x \in I$).*
- *f szigorúan monoton növekvő I -n ha $f'(x) > 0$ ($x \in I$).*
- *f szigorúan monoton csökkenő I -n ha $f'(x) < 0$ ($x \in I$).*

6. DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS

6.3 Középértéktételek és alkalmazásaik

L'Hospital szabály

Legyenek $f, g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ differenciálhatók $]a, b[$ -n (ahol most $a, b \in \mathbb{R}_b$), és $g'(x) \neq 0$ ($x \in]a, b[$). Ha

$$\exists \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \mathbb{R}_b$$

és

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} g(x) = 0 \quad \text{vagy} \quad \lim_{x \rightarrow a+0} g(x) = +\infty(-\infty),$$

akkor

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

A tétel akkor is érvényes, ha $x \rightarrow a+0$ helyére mindenütt $x \rightarrow b-0$, illetve $x \rightarrow c$ kerül, ahol c az $]a, b[$ egy belső pontja.

6. DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS

6.4 Magasabbrendű deriváltak, konvexitás, konkávitás

Magasabbrendű deriváltak

Tegyük fel, hogy az $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény első deriváltja létezik az $x_0 \in I$ pontnak egy (legalább egyoldali) környezetében, akkor f **második deriváltja**

$$f''(x_0) := (f')'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}.$$

Hasonlóan, az f függvény $(n+1)$ -**edik deriváltja**

$$f^{(n+1)}(x_0) := (f^{(n)})'(x_0).$$

6. DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS

6.4 Magasabbrendű deriváltak, konvexitás, konkávitás

Konvexitás, konkávitás

Az $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt **konvexnek** nevezzük az I intervallumon, ha

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \quad (x_1, x_2 \in I, \lambda \in [0, 1]).$$

Az $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt **konkávnak** nevezzük I -n, ha $-f$ konvex I -n.

Konvexitás geometriai jelentése: $x_1 < x_2$ esetén a $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$ pont az $[x_1, x_2]$ intervallumot $1 - \lambda : \lambda$ arányban osztja ketté.

Az $(x_1, f(x_1))$ és $(x_2, f(x_2))$ pontokon átmenő egyenes (szelő) egyenlete:

$$y = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Ennek értéke a $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$ pontban éppen $\lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$. Így az f függvény akkor és csakis akkor konvex az I intervallumon, ha a függvény görbéjének bármely szelője a metszési pontok közötti szakaszon a függvény görbe felett van.

6. DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS

6.4 Magasabbrendű deriváltak, konvexitás, konkávitás

Jensen egyenlőtlenség

Az $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény akkor és csakis akkor konvex az I intervallumon, ha teljesül a Jensen egyenlőtlenség:

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \cdots + \lambda_n f(x_n),$$

ahol $x_1, \dots, x_n \in I$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$, $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$.

Az $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény konkáv akkor és csakis akkor, ha az előbbi egyenlőtlenség megfordítása teljesül.

6. DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS

6.4 Magasabbrendű deriváltak, konvexitás, konkávitás

Konvex és konkáv függvények jellemzése

- 1 Ha $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható I -n, akkor
 - f konvex I -n akkor és csak akkor, ha f' monoton növekvő I -n;
 - f konkáv I -n akkor és csak akkor, ha f' monoton csökkenő I -n.
- 2 Ha $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ kétszer differenciálható I -n, akkor
 - f konvex I -n akkor és csak akkor, ha $f''(x) \geq 0$ ($x \in I$);
 - f konkáv I -n akkor és csak akkor, ha $f''(x) \leq 0$ ($x \in I$).

6. DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS

6.4 Magasabbrendű deriváltak, konvexitás, konkávitás

Inflexiós hely, inflexiós pont

Legyen $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ és $x_0 \in I^\circ$ belső pontja I -nek. Az x_0 pontot az f függvény **inflexiós helyének**, az $(x_0, f(x_0))$ pontot **inflexiós pontjának** nevezzük, ha x_0 az I intervallum konvex és konkáv szakaszait választja el, azaz, ha van olyan $\delta > 0$, hogy

- f konvex az $]x_0 - \delta, x_0[$, konkáv az $]x_0, x_0 + \delta[$ intervallumon, vagy
- f konkáv az $]x_0 - \delta, x_0[$, konvex az $]x_0, x_0 + \delta[$ intervallumon.

Inflexiós pontok megkeresése

Legyen $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ kétszer differenciálható I -n.

- Ha az $x_0 \in I^\circ$ pont inflexiós helye f -nek, akkor $f''(x_0) = 0$.
- Ha $f''(x_0) = 0$ és f'' előjelet vált x_0 -ban, akkor x_0 inflexiós helye f -nek.

6. DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS

6.5 Taylor tétele

Taylor tétele

Legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, és tegyük fel, hogy $\exists n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, hogy

- az f függvény $(n+1)$ -szer differenciálható $]a, b[$ -n,
- $f^{(n)}$ folytonos $[a, b]$ -n.

Akkor bármely $x, x_0 \in [a, b]$ -hoz van olyan ξ az x és x_0 között (szigorúan közöttük, ha $x \neq x_0$), hogy

$$f(x) = \left(f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots \right. \\ \left. + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \right) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

ahol $f^{(0)} := f$.

6. DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS

6.5 Taylor tétele

$$T_n(x) := f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

az f függvény x_0 pont körüli n -edfokú **Taylor polinomja**
($x_0 = 0$ esetén **Mc Laurin polinomja**),

$$R_n(x) := \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

a Taylor formula n -**edik maradéktagja** Lagrange-féle alakban.
Az $R_n(x)$ maradéktag azt mutatja meg, hogy $f(x)$ -et a $T_n(x)$ Taylor polinom milyen hibával közelíti.

6. DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS

6.5 Taylor tétele

Példák Taylor polinomra:

❶ $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$ mellett

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x),$$

ahol

$$R_n(x) := \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1},$$

és ξ az x és $x_0 = 0$ között van. Ebből azt kapjuk, hogy

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Ezt a sort az **exponenciális függvény McLaurin sorának**, vagy $x_0 = 0$ **körüli Taylor sorának** nevezzük.

6. DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS

6.5 Taylor tétele

2 $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$ esetén

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+1}(x) \quad (x \in \mathbb{R}),$$

ahol

$$R_{2n+1}(x) := \frac{\sin\left(\xi + (2n+2)\frac{\pi}{2}\right)}{(2n+2)!} x^{2n+2},$$

és ξ az x és $x_0 = 0$ között van. Ebből azt kapjuk, hogy

$$\sin x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Ezt a sort a **$\sin$ függvény McLaurin sorának, vagy $x_0 = 0$ körüli Taylor sorának** nevezzük.

6. DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS

6.6 Szélsőértékszámítás

Lokális szélsőérték szükséges feltétele

Ha $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható az $x_0 \in I^\circ$ belső pontban, és ott lokális szélsőértéke van, akkor $f'(x_0) = 0$.

Stacionárius pont

Azokat az x_0 pontokat, amelyekre $f'(x_0) = 0$ teljesül, az f függvény **stacionárius pontjainak** nevezzük.

Stacionárius pontban az érintő párhuzamos az x tengellyel, és ott **lehet lokális szélsőérték, de nem biztos, hogy van!**

Milyen $x_0 \in I$ pontokban lehet egy $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek lokális szélsőértéke?

- $x_0 \in I^\circ$ belső pont, ahol $f'(x_0) = 0$,
- x_0 az I intervallum valamely végpontja (ha az I -hez tartozik),
- x_0 az I -nek olyan pontja, ahol f nem differenciálható.

6. DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS

6.6 Szélsőértékszámítás

Elsőrendű elegendő feltétel lokális szélsőértékre

Tegyük fel, hogy $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható az $x_0 \in I^\circ$ belső pont egy környezetében, és x_0 stacionárius pontja f -nek (azaz $f'(x_0) = 0$).

- Ha van olyan $r > 0$, hogy $f'(x) \geq 0$ ha $x \in]x_0 - r, x_0[\cap I$, és $f'(x) \leq 0$ ha $x \in]x_0, x_0 + r[\cap I$, akkor f -nek **lokális maximuma** van x_0 -ban.
- Ha van olyan $r > 0$, hogy $f'(x) \leq 0$, ha $x \in]x_0 - r, x_0[\cap I$, és $f'(x) \geq 0$ ha $x \in]x_0, x_0 + r[\cap I$, akkor f -nek **lokális minimuma** van x_0 -ban.
- Ha van olyan $r > 0$, hogy $f'(x) > 0$ ha $x \in]x_0 - r, x_0 + r[\cap I$, $x \neq x_0$, vagy $f'(x) < 0$ ha $x \in]x_0 - r, x_0 + r[\cap I$, $x \neq x_0$, akkor f -nek **nincs lokális szélsőértéke** x_0 -ban, x_0 **inflexiós helye** f -nek.

6. DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS

6.6 Szélsőértékszámítás

n -edrendű elegendő feltétel lokális szélsőértékre

Tegyük fel, hogy $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ n -szer folytonosan differenciálható az $x_0 \in I^\circ$ belső pont egy környezetében (azaz $f^{(n)}$ folytonos e környezetben), és

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad \text{de} \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

- Ha n páros, akkor f -nek **szigorú lokális szélsőértéke van** x_0 -ban, **maximum**, ha $f^{(n)}(x_0) < 0$, **minimum**, ha $f^{(n)}(x_0) > 0$.
- Ha n páratlan, akkor f -nek **nincs szélsőértéke** x_0 -ban.

Globális szélsőérték megkeresése:

- Ha I korlátos és zárt intervallum, és $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos, akkor f -nek van globális maximuma és minimuma I -n.
- Ha I nem korlátos, vagy korlátos de nem zárt, akkor előfordulhat, hogy f -nek nincs szélsőértéke I -n.
- Ha $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ (elégg sokszor) differenciálható a korlátos és zárt I intervallumon, akkor
 - megkeressük f lokális szélsőértékeit I belső pontjaiban;
 - kiszámítjuk f értékét I végpontjaiban;
 - a lokális szélsőértékek és a végpontokban felvett értékek közül a legnagyobb adja a globális maximum értékét, a legkisebb adja a globális minimum értékét.

7. HATÁROZATLAN INTEGRÁL

7.1 Definíció és alapintegrálok

Primitív függvény

Legyen $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ adott függvény ($I \subset \mathbb{R}$ egy intervallum).

A $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt az f függvény **primitív függvényének** nevezzük I -n, ha F differenciálható I -n, és $F'(x) = f(x)$ ($x \in I$).

Ha F az f függvény primitív függvénye I -n, akkor

- *bármely $c \in \mathbb{R}$ esetén $G(x) = F(x) + c$ ($x \in I$) is primitív függvénye f -nek I -n;*
- *I -n f minden primitív függvénye $F(x) + c$ alakú, ahol $c \in \mathbb{R}$.*

Határozatlan integrál

Egy f függvény összes primitív függvényeinek halmazát f **határozatlan integráljának** nevezzük, melynek jelölése:

$$\int f = \int f(x) dx = \{F(x) + c : c \in \mathbb{R}, F \text{ az } f \text{ egy primitív függvénye}\},$$

egyszerűbben: $\int f(x) dx = F(x) + c$ ($c \in \mathbb{R}$).

7. HATÁROZATLAN INTEGRÁL

7.1 Definíció és alapintegrálok

Alapintegrálok

$$\int e^x dx = e^x + c \quad \mathbb{R}\text{-en}$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \quad \mathbb{R}\text{-en, ahol } 1 \neq a > 0$$

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (0, \infty)\text{-en, ahol } -1 \neq \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c \quad (-\infty, 0)\text{-án, illetve } (0, \infty)\text{-en}$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad \mathbb{R}\text{-en, ahol } n = 0, 1, \dots$$

7. HATÁROZATLAN INTEGRÁL

7.1 Definíció és alapintegrálok

Alapintegrálok

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + c \quad \mathbb{R}\text{-en}$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + c \quad \mathbb{R}\text{-en}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \operatorname{tg} x + c \quad \left] k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2} \right[-\text{en}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\operatorname{ctg} x + c \quad]k\pi, (k+1)\pi[-\text{en}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x + c \quad]-1, 1[-\text{en}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \operatorname{arctg} x + c \quad \mathbb{R}\text{-en}$$

7. HATÁROZATLAN INTEGRÁL

7.2 Integrálási szabályok

Ha f -nek és g -nek van primitív függvénye I -n, akkor $f + g$ -nek és bármely $c \in \mathbb{R}$ esetén $c \cdot f$ -nek is van I -n, és

$$\int (f + g) = \int f + \int g, \quad \int (cf) = c \int f.$$

Parciális integrálás

Ha f és g differenciálhatók és fg' -nek van primitív függvénye I -n, akkor $f'g$ -nek is van primitív függvénye I -n, és

$$\int f'g = fg - \int fg'.$$

7. HATÁROZATLAN INTEGRÁL

7.2 Integrálási szabályok

Helyettesítéssel integrálás

Ha f -nek van primitív függvénye I -n, $g : J \rightarrow I$ differenciálható a J intervallumon, akkor $(f \circ g) \cdot g'$ -nek is van primitív függvénye J -n, és

$$\int (f \circ g) \cdot g' = \left(\int f \right) \circ g,$$

vagyis

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = \int f(u) du|_{u=g(x)}.$$

Másképpen: ha $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ és $g : J \rightarrow I$ differenciálhatók a J intervallumon, $g'(x) \neq 0$ ($x \in J$) és $(f \circ g) \cdot g'$ -nek van primitív függvénye, akkor f -nek is van primitív függvénye I -n, és

$$\int f = \int ((f \circ g) \cdot g') \circ g^{-1},$$

vagyis

$$\int f(x) dx = \int f(g(u)) g'(u) du|_{u=g^{-1}(x)}.$$

7. HATÁROZATLAN INTEGRÁL

7.2 Integrálási szabályok

Például:

$$\int g^{\alpha} g' = \frac{g^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{g'}{g} = \ln |g| + c,$$

amiből például

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = - \int \frac{(\cos x)'}{\cos x} \, dx = - \ln |\cos x| + c$$

a $\left] k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2} \right[$ ($k \in \mathbb{Z}$) intervallumokon,

$$\int \operatorname{ctg} x \, dx = - \int \frac{(\sin x)'}{\sin x} \, dx = - \ln |\sin x| + c$$

a $]k\pi, (k+1)\pi[$ ($k \in \mathbb{Z}$) intervallumokon.

7. HATÁROZATLAN INTEGRÁL

7.2 Integrálási szabályok

Lineáris helyettesítés

Ha f primitív függvénye F , és $a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$, akkor

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} \int f(u) du|_{u=ax+b} = \frac{1}{a} F(ax + b) + c.$$

7. HATÁROZATLAN INTEGRÁL

7.2 Integrálási szabályok

További alapintegrálok ($a > 0$)

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + c, \quad (|x| < a),$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + c, \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + c, \quad (|x| > a),$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c, \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + c, \quad (|x| > a, \text{ vagy } |x| < a).$$

7. HATÁROZATLAN INTEGRÁL

7.3 Elemien integrálható függvények osztályai

Elemien integrálható függvény

Egy függvényt **elemien integrálhatónak** nevezünk, ha primitív függvénye elemi függvény.

Parciálisan integrálható függvények

Ha $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ($a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$) **polinom**, akkor parciálisan integrálható

$P(x)e^x :$	$f'(x) = e^x,$	$g(x) = P(x)$	választással,
$P(x) \sin x :$	$f'(x) = \sin x,$	$g(x) = P(x)$	választással,
$P(x) \cos x :$	$f'(x) = \cos x,$	$g(x) = P(x)$	választással,
$P(x) \ln x :$	$f'(x) = P(x),$	$g(x) = \ln x$	választással,
$P(x) \arcsin x :$	$f'(x) = P(x),$	$g(x) = \arcsin x$	választással,
$P(x) \operatorname{arctg} x :$	$f'(x) = P(x),$	$g(x) = \operatorname{arctg} x$	választással.

8. HATÁROZOTT INTEGRÁL

8.1 Az integrál definíciója és alaptulajdonságai

Intervallum felosztása

Legyen $[a, b] \subset \mathbb{R}$ egy zárt intervallum.

- A $P = \{x_i : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ ($n \in \mathbb{N}$) ponthalmazt az $[a, b]$ intervallum egy **felosztásának** nevezzük,
- x_i az **i -edik osztópont**,
- $[x_{i-1}, x_i]$ az **i -edik intervallum**,
- $x_i - x_{i-1}$ az **i -edik intervallum hossza**,
- a $\|P\| := \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$ szám a **P felosztás finomsága**.

8. HATÁROZOTT INTEGRÁL

8.1 Az integrál definíciója és alaptulajdonságai

Integrálközelítő összeg

Legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ egy korlátos függvény, P az $[a, b]$ egy felosztása, $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, \dots, n$) közbenső pontok. Az

$$s(f, P, t) := \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1})$$

összeget az f függvény P felosztáshoz és a $t = (t_1, \dots, t_n)$ közbenső pontrendszerhez tartozó **integrálközelítő összegének** nevezzük.

Az $s(f, P, t)$ összeg **geometriai jelentése**:

a felosztás és a közbenső pontok által meghatározott téglalapok területének (előjeles) összege, ami annál jobban közelíti a görbe alatti (előjeles) területet, minél finomabb a felosztás.

8. HATÁROZOTT INTEGRÁL

8.1 Az integrál definíciója és alaptulajdonságai

Riemann integrálhatóság és Riemann integrál

Az $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvényt **Riemann integrálhatónak** nevezzük $[a, b]$ -n, ha van olyan $\mathcal{I} \in \mathbb{R}$ szám, hogy bármely $\varepsilon > 0$ -hoz létezik olyan $\delta(\varepsilon)$, hogy

$$|s(f, P, t) - \mathcal{I}| < \varepsilon$$

ha $\|P\| < \delta(\varepsilon)$ és $t = (t_1, \dots, t_n)$ tetszőleges közbenső pontrendszer. Az $\mathcal{I}$ számot az f függvény $[a, b]$ -n vett **Riemann integráljának**

nevezzük, melynek jelölése $\int_a^b f(x) dx$ vagy $\int_a^b f$.

Az $\int_a^b f(x) dx$ **geometria**i jelentése:

az $x = a$, $x = b$, $y = 0$ egyenesek és az $y = f(x)$ függvénygörbe által meghatározott síkidom **előjeles területe** (az x **tengely** alatti részt az integrál **negatív előjellel számolja**).

8. HATÁROZOTT INTEGRÁL

8.1 Az integrál definíciója és alaptulajdonságai

Az $[a, b]$ -n **Riemann integrálható függvények osztályát** $\mathcal{R}[a, b]$ jelöli.

Az integrál alaptulajdonságai

Ha $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$, akkor bármely $c \in \mathbb{R}$ és bármely $a < d < b$ mellett

$$f + g \in \mathcal{R}[a, b],$$

$$\text{és} \quad \int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g,$$

$$c \cdot f \in \mathcal{R}[a, b],$$

$$\text{és} \quad \int_a^b (c \cdot f) = c \cdot \int_a^b f,$$

$$f \in \mathcal{R}[a, d], \quad f \in \mathcal{R}[d, b],$$

$$\text{és} \quad \int_a^b f = \int_a^d f + \int_d^b f,$$

8. HATÁROZOTT INTEGRÁL

8.1 Az integrál definíciója és alaptulajdonságai

Az integrál és a rendezés kapcsolata

Ha $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ és $f(x) \leq g(x)$ ($x \in [a, b]$), akkor

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

Az integrálszámítás középértéktétele

Ha $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{R}[a, b]$, akkor $m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$,

ahol

$$m := \inf_{x \in [a, b]} f(x), \quad M := \sup_{x \in [a, b]} f(x).$$

Ha f folytonos $[a, b]$ -n, akkor $\exists \xi \in [a, b]$, melyre $f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f$.

8. HATÁROZOTT INTEGRÁL

8.1 Az integrál definíciója és alaptulajdonságai

Az integrálhatóság elegendő feltétele

Egy pontsorozat kivételével folytonos függvény Riemann integrálható.

Az integrál és az abszolút érték kapcsolata

Ha $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{R}[a, b]$, akkor $|f| \in \mathcal{R}[a, b]$, és

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx.$$

8. HATÁROZOTT INTEGRÁL

8.2 Az integrál kiszámítása, Newton-Leibniz formula

Területmérő függvény

Legyen $f \in \mathcal{R}[a, b]$, akkor a

$$T(x) := \int_a^x f(t) dt \quad (x \in [a, b])$$

függvényt f **területmérő függvényének** nevezzük.

A területmérő függvény tulajdonságai

Ha $f \in \mathcal{R}[a, b]$ és T az f területmérő függvénye, akkor

- ❶ *T folytonos $[a, b]$ -n,*
- ❷ *ha f folytonos $x_0 \in [a, b]$ -ben, akkor T differenciálható x_0 -ban, és $T'(x_0) = f(x_0)$.*

Folytonos függvény primitív függvénye

Minden folytonos függvénynek van primitív függvénye, mégpedig a területmérő függvénye.

8. HATÁROZOTT INTEGRÁL

8.2 Az integrál kiszámítása, Newton-Leibniz formula

Newton-Leibniz formula

Tegyük fel, hogy $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos $[a, b]$ -n, és $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ az f egy primitív függvénye $[a, b]$ -n, akkor

$$\int_a^b f(x) \, dx = [F(x)]_a^b := F(b) - F(a).$$

A Newton-Leibniz formula akkor is érvényes, ha $f \in \mathcal{R}[a, b]$, $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos $[a, b]$ -n, és $F'(x) = f(x)$ ($x \in]a, b[$).

8. HATÁROZOTT INTEGRÁL

8.2 Az integrál kiszámítása, Newton-Leibniz formula

Parciális integrálás határozott integrálra

Ha $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonosan differenciálhatók $[a, b]$ -n, akkor

$$\int_a^b f'(x)g(x) \, dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) \, dx,$$

ahol $[f(x)g(x)]_a^b := f(b)g(b) - f(a)g(a)$.

Helyettesítéses integrálás határozott integrálra

Ha $g : [a, b] \rightarrow [c, d]$ folytonosan differenciálható $[a, b]$ -n és $f : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos $[c, d]$ -n, akkor

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) \, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) \, du.$$

8. HATÁROZOTT INTEGRÁL

8.3 Impropius integrál

Integrál végtelen intervallumokon

Legyen $f :] - \infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, és tegyük fel, hogy minden $t < b$ mellett $f \in \mathcal{R}[t, b]$, akkor

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx := \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x) dx,$$

feltéve, hogy a jobboldali határérték véges. Ekkor azt mondjuk, hogy az $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ **impropius integrál konvergens**, ellenkező esetben (amikor a jobboldali határérték nem létezik, vagy létezik de végtelen) **divergens**.

8. HATÁROZOTT INTEGRÁL

8.3 Improprius integrál

Integrál végtelen intervallumokon

Legyen $f :]a, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, és tegyük fel, hogy minden $a < t$ mellett $f \in \mathcal{R}[a, t]$, akkor

$$\int_a^\infty f(x) \, dx := \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) \, dx,$$

feltéve, hogy a jobboldali határérték véges. Ekkor azt mondjuk, hogy az $\int_a^\infty f(x) \, dx$ **impropius integrál konvergens**, ellenkező esetben (amikor a jobboldali határérték nem létezik, vagy létezik de végtelen) **divergens**.

8. HATÁROZOTT INTEGRÁL

8.3 Improprius integrál

Integrál végtelen intervallumokon

Legyen $f :] - \infty, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, és tegyük fel, hogy minden $s < t$ mellett $f \in \mathcal{R}[s, t]$, akkor tetszőleges $c \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &:= \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx \\ &= \lim_{s \rightarrow -\infty} \int_s^c f(x) dx + \lim_{t \rightarrow \infty} \int_c^t f(x) dx,\end{aligned}$$

feltéve, hogy mindkét jobboldali határérték véges. Ekkor azt mondjuk, hogy az $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ **improprius integrál konvergens**, ellenkező esetben (amikor valamelyik jobboldali határérték nem létezik, vagy létezik de végtelen) **divergens**.

8. HATÁROZOTT INTEGRÁL

8.3 Improprius integrál

Nem korlátos függvények integrálása

Legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, és tegyük fel, hogy f **nem korlátos** $[a, b]$ -n, **de minden** $a < t < b$ **mellett** $f \in \mathcal{R}[t, b]$, (így f **korlátos** $[t, b]$ -n!), akkor

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{t \rightarrow a+0} \int_t^b f(x) dx,$$

feltéve, hogy a jobboldali határérték véges. Ekkor azt mondjuk, hogy az $\int_a^b f(x) dx$ *impropius integrál konvergens*, ellenkező esetben (amikor a jobboldali határérték nem létezik, vagy létezik de végtelen) *divergens*.

8. HATÁROZOTT INTEGRÁL

8.3 Impropius integrál

Nem korlátos függvények integrálása

Legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, és tegyük fel, hogy f **nem korlátos** $[a, b]$ -**n**, **de minden** $a < t < b$ **mellett** $f \in \mathcal{R}[a, t]$, (így f **korlátos** $[a, t]$ -**n**!), akkor

$$\int_a^b f(x) \, dx := \lim_{t \rightarrow b-0} \int_a^t f(x) \, dx,$$

feltéve, hogy a jobboldali határérték véges. Ekkor azt mondjuk, hogy az $\int_a^b f(x) \, dx$ *impropius integrál konvergens*, ellenkező esetben (amikor a jobboldali határérték nem létezik, vagy létezik de végtelen) *divergens*.

8. HATÁROZOTT INTEGRÁL

8.3 Improprius integrál

Nem korlátos függvények integrálása

Legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, és tegyük fel, hogy f **nem korlátos** $[a, b]$ -n, **de van olyan** $c \in]a, b[$, **hogy minden** $a < s < c < t < b$ **mellett** $f \in \mathcal{R}[a, s]$ **és** $f \in \mathcal{R}[t, b]$, **(így f korlátos $[a, s]$ -n és $[t, b]$ -n, de nem korlátos a c pont egy környezetében!)**, akkor

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &:= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \\ &= \lim_{s \rightarrow c-0} \int_a^s f(x) dx + \lim_{t \rightarrow c+0} \int_t^b f(x) dx,\end{aligned}$$

feltéve, hogy mindkét jobboldali határérték véges. Ekkor azt mondjuk, hogy az $\int_a^b f(x) dx$ *impropius integrál konvergens*, ellenkező esetben (amikor valamelyik jobboldali határérték nem létezik, vagy létezik de végtelen) *divergens*.

8. HATÁROZOTT INTEGRÁL

8.3 Impropius integrál

A Riemann integrál (beleértve az improprius integrált is) értéke nem változik, ha a függvény értékét véges sok pontban megváltoztatjuk.

Ezért a nem korlátos függvények (improprius) integráljának pl. az első definíciójában (amikor f az a végpont egy környezetében nem korlátos) mindegy, hogy a kiinduló f függvény az a pontban definiálva van vagy sem, mert utóbbi esetben $f(a)$ -t tetszőlegesen értelmezve az integrál nem változik.

Mindhárom definíció esetében feltételeztük, hogy f értelmezve van abban a pontban, melynek környezetében f nem korlátos.

8. HATÁROZOTT INTEGRÁL

8.4 Kettős integrál

Téglalap felosztása

Legyen $D = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ egy zárt téglalap, és

$$P_x = \{x_i : a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b\},$$

$$P_y = \{y_j : c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d\}$$

az $[a, b]$ és $[c, d]$ intervallumok felosztásai.

- A $P := P_x \times P_y = \{(x_i, y_j) : i = 0, 1, \dots, m; j = 0, 1, \dots, n\}$ ($n \in \mathbb{N}$) ponthalmazt a D téglalap egy **felosztásának** nevezzük,
- $D_{i,j} := [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$) a **felosztás téglalapjai**,
- a $\|P\| := \max_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2}$ szám a P **felosztás finomsága** (a $D_{i,j}$ téglalapok átlói hosszának a maximuma).

8. HATÁROZOTT INTEGRÁL

8.4 Kettős integrál

Integrálközelítő összeg

Legyen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ egy korlátos függvény a D téglalapon, P a D egy felosztása, $(s_i, t_j) \in D_{i,j}$ ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$) közbenső pontok, $v = ((s_1, t_1), (s_1, t_2), \dots, (s_m, t_n))$ a közbenső pontok rendszere/vektora. Az

$$s(f, P, v) := \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(s_i, t_j) m(D_{i,j})$$

összeget, ahol $m(D_{i,j}) := (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$ a $D_{i,j}$ téglalap területe (mértéke), az f függvény P felosztáshoz és a v közbenső pontrendszerhez tartozó **integrálközelítő összegének** nevezzük.

Az $s(f, P, v)$ összeg **geometriai jelentése**: a felosztás és a közbenső értékek által meghatározott hasábok térfogatának (előjeles) összege, ami annál jobban közelíti az f által meghatározott felület alatti (előjeles) térfogatot, minél finomabb a felosztás.

8. HATÁROZOTT INTEGRÁL

8.4 Kettős integrál

Kettős Riemann integrál téglalapon

Az $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvényt **Riemann integrálhatónak** nevezzük a D téglalapon, ha van olyan $\mathcal{I} \in \mathbb{R}$ szám, hogy bármely $\varepsilon > 0$ -hoz létezik olyan $\delta(\varepsilon)$, hogy

$$|s(f, P, v) - \mathcal{I}| < \varepsilon$$

ha $\|P\| < \delta(\varepsilon)$ és $v = ((s_1, t_1), (s_1, t_2), \dots, (s_m, t_n))$ tetszőleges közbenső pontrendszer. Az $\mathcal{I}$ számot az f függvény D -n vett **Riemann integráljának** nevezzük, melynek jelölése $\iint_D f(x, y) dx dy$.

Az $\iint_D f(x, y) dx dy$ **geometriai jelentése**: az $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$, $z = 0$ síkok és a $z = f(x, y)$ felület által meghatározott idom **előjeles térfogata** (a $z = 0$ sík alatti részt az integrál negatív előjellel számolja).

8. HATÁROZOTT INTEGRÁL

8.4 Kettős integrál téglalapon

Kettős integrál kiszámítása

Legyen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos a $D = [a, b] \times [c, d]$ téglalapon. Ekkor f integrálható D -n, és

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx$$

vagy

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) \, dx \right) dy$$

Tehát a kettős integrál kiszámítása **ismételt (iterált, szukcesszív) integrálással történik, a sorrend** (az hogy először x szerint másodszer y szerint integrálunk, vagy fordítva) **nem számít**.

8. HATÁROZOTT INTEGRÁL

8.4 Kettős integrál

Elsőfajú normáltartomány

Az $x = a$, $x = b$ egyenesek és az $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$ ($x \in [a, b]$) görbék által határolt

$$D := \{(x, y) : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\},$$

tartomány, ahol $\varphi_1, \varphi_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ adott folytonos függvények úgy, hogy $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ ha $x \in [a, b]$.

Kettős Riemann integrál elsőfajú normáltartományon

Ha $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos a D elsőfajú normáltartományon, akkor

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy := \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) \, dy \right) dx.$$

8. HATÁROZOTT INTEGRÁL

8.4 Kettős integrál

Másodfajú normáltartomány

Az $y = c$, $y = d$ egyenesek és az $x = \psi_1(y)$, $x = \psi_2(y)$ ($y \in [c, d]$)
görbék által határolt

$$D := \{(x, y) : c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\},$$

tartomány, ahol $\psi_1, \psi_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ adott folytonos függvények úgy,
hogy $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$ ha $y \in [c, d]$.

Kettős Riemann integrál másodfajú normáltartományon

Ha $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos a D másodfajú normáltartományon, akkor

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy := \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) \, dx \right) dy.$$