

Gyakorló feladatok valószínűségyszámításból végeredményekkel

♠ a megoldásra ajánlott feladatokat jelöli,

★ a nehezebb feladatokat jelöli

1. ♠ Igaz-e, hogy tetszőleges A , B és C eseményekre teljesül

(a) $(A \cup B) \setminus C = A \cup (B \setminus C)$? (Nem)

(b) $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$? (Igen)

(Itt $A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ a szimmetrikus differenciát jelöli.)

2. ♠ Egy szabályos érmével addig dobunk, míg egymás után azonos eredményeket nem kapunk. Írja le az eseményteret! ($\Omega = \{II, FF, IFF, FII, FIIF, FIFF, \dots\}$) Mennyi a valószínűsége annak, hogy legfeljebb 6 dobásra van szükség? ($\frac{31}{32}$)

3. ♠ Szabályos kockával n -szer dobva mennyi a valószínűsége annak, hogy

(a) legalább egy 6-os van? $(1 - (\frac{5}{6})^n)$

(b) pontosan egy 6-os van? $(n \cdot \frac{1}{6} \cdot (\frac{5}{6})^{n-1} = \frac{n5^{n-1}}{6^n})$

4. ♠ Egy szabályos dobókockával kétszer dobunk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az első dobás eredménye nagyobb, mint a másodiké? ($\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$)

5. ♠ Egy szabályos érmét 9-szer feldobunk. Tekintsük az

$$A := \{\text{a dobott fejek száma páros}\}$$

eseményt. Határozza meg a $P(A)$ valószínűséget! ($[\binom{9}{0} + \binom{9}{2} + \binom{9}{4} + \binom{9}{6} + \binom{9}{8}] \cdot \frac{1}{2^9} = \frac{1}{2}$)

6. ♠ Egy szabályos érmét 9-szer feldobunk. Tekintsük az

$$A := \{\text{a dobott fejek száma legfeljebb 4}\}$$

eseményt. Határozza meg a $P(A)$ valószínűséget! ($[\binom{9}{0} + \binom{9}{1} + \binom{9}{2} + \binom{9}{3} + \binom{9}{4}] \cdot \frac{1}{2^9} = \frac{1}{2}$)

7. Két szabályos kockával dobunk. Tekintsük az $A = \{\text{az összeg páratlan}\}$ és $B = \{\text{van 1-es}\}$ eseményeket. Írja le az $A \cup B$ és $A \cap B$ eseményeket és határozza meg a valószínűségeket!

$$(A \cup B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 1), (2, 3), (3, 2), (2, 5), (5, 2), (3, 4), (4, 3), (3, 6), (6, 3), (4, 5), (5, 4), (5, 6), (6, 5)\},$$

$$A \cap B = \{(1, 2), (2, 1), (1, 4), (4, 1), (1, 6), (6, 1)\},$$

$$P(A) = \frac{18}{36}, P(B) = 1 - \frac{25}{36}, P(A \cup B) = \frac{23}{36}, P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

8. Bizonyítsa be, hogy $P(A \triangle B) \leq P(A \triangle C) + P(C \triangle B)$ teljesül tetszőleges A , B és C eseményekre! (Itt $A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ a szimmetrikus differenciát jelöli.)

9. ★ Tíz pár cipő közül találmra kiveszünk 4 darab cipőt. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kihúzott cipőkből összeállítható legalább egy pár cipő, ha

(a) a cipők különböznek egymástól ? $(1 - \frac{2^4 \binom{10}{4}}{\binom{20}{4}} \approx 0.3065)$

(b) a cipők nem különböznek egymástól ? (Természetesen a balos és jobbos cipők ebben az esetben is különböznek egymástól!) $(1 - \frac{2 \binom{10}{4}}{\binom{20}{4}} \approx 0.9133)$

10. ♠ Egy társaságot, mely $2n$ emberből áll, találmra két egyforma csoportra osztunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a két legnagyobb személy különböző csoportba kerül? ($\frac{n}{2n-1}$)

11. Egy urnában fehér és piros golyók vannak. Visszatevéssel kihúzunk két golyót. Bizonyítsuk be, hogy legalább $\frac{1}{2}$ annak a valószínűsége, hogy a kihúzott golyók egyforma színűek! (Ha f darab fehér és p darab piros van, akkor a valószínűség $\frac{f^2+p^2}{(f+p)^2} \geq \frac{1}{2}$)
12. ♠ Feldobunk egy szabályos dobókockát, majd annyszor lövünk egy céltáblára, amennyit a kockával dobtunk. A céltáblát minden egyes alkalommal $\frac{1}{5}$ valószínűséggel találjuk el. Mennyi a valószínűsége, hogy legalább egyszer eltaláljuk a céltáblát? $1 - \frac{1}{6} \sum_{k=1}^6 \left(\frac{4}{5}\right)^k = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left(\frac{4}{5}\right)^6 \approx 0.5081$
13. ♠ Mennyi a valószínűsége annak, hogy az 52 lapos kártyából 5 lapot kiosztva *full* lesz az eredmény, azaz 3 egyforma + 2 egyforma? (Például három 6-os és két király; 4 színből 13-13 különböző lap van.)

$$\left(\frac{\binom{13}{1} \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{12}{1} \cdot \binom{4}{2}}{\binom{52}{5}} = \frac{6}{5 \cdot 17 \cdot 49} \approx 0.00144 \right)$$
14. Egy egységnyi hosszúságú szakaszt két ponttal három szakaszra bontunk fel. Mennyi a valószínűsége, hogy lehet háromszöget szerkeszteni a kapott darabokból? $\left(\frac{1}{4}\right)$
15. ♠ Három szabályos kockával dobunk. Tekintsük az

$$A = \{\text{legalább egy 6-os van}\} \quad \text{és} \quad B = \{\text{különbözők a számok}\}$$

eseményeket. Határozza meg a $P(A)$ és $P(A|B)$ valószínűségeket! $\left(P(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 \approx 0.4213, \right.$
 $P(A|B) = 1 - \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{1}{2} \left. \right)$

16. ♠ Egy dobozban két fehér és két piros golyó van. Összekeverés után kihúzunk két golyót visszatevés nélkül, és áttesszük azokat egy kalapba. Ezután összekeverés után kihúzunk egy golyót a kalapból. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kalapban maradt másik golyó piros, ha a kalapból kihúzott golyó fehér? $\left(\frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \frac{1}{6} + 0 \cdot \frac{1}{6}} = \frac{2}{3}\right)$
17. Két város között a távíró összeköttetés olyan, hogy a leadott távírójelek közül a pontok $\frac{2}{5}$ része vonallá torzul, a vonalak $\frac{1}{3}$ része pedig ponttá torzul. A leadott jelek $\frac{5}{8}$ része pont. Mennyi a valószínűsége annak, hogy ha a vevő oldalon pontot kapnak, akkor az adó pontot továbbított? $\left(\frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{8}}{\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{8} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8}} = \frac{3}{4}\right)$
18. ♠ Egy részvény kiinduló ára egy peták. Egy év múlva vagy kétszeresére növekszik az ára, vagy pedig felére csökken. Mindkét lehetőség ugyanolyan valószínűségű. A következő két évben ugyanez történik, és a változások függetlenek. Mi lesz három év múlva a részvényár eloszlása? (Azaz milyen értékeket vehet fel milyen valószínűséggel?) (Lehetséges értékek: $\frac{1}{8}, \frac{1}{2}, 2, 8$; a hozzátartozó valószínűségek: $\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}$)
19. Egy részvény kiinduló ára egy peták. Egy év múlva vagy kétszeresére növekszik az ára, vagy felére csökken, vagy pedig változatlan marad. Mindegyik lehetőség ugyanolyan valószínűségű. A következő évben ugyanez történik, az első évi változástól függetlenül. Mi lesz két év múlva a részvényár eloszlása? (Azaz milyen értékeket vehet fel milyen valószínűséggel?) Mennyi két év múlva a részvényár várható értéke? (Lehetséges értékek: $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4$; a hozzátartozó valószínűségek: $\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{3}{9}, \frac{2}{9}, \frac{1}{9}$; a várható érték $\frac{49}{36}$)
20. ♠ Két szabályos kockával dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 7? Mennyi a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 7, feltéve, hogy a dobott számok összege páratlan? $\left(\frac{1}{6}, \text{ illetve } \frac{1}{3}\right)$
21. ♠ Egy dobozban egy golyó van, ami (egyenlő valószínűséggel) fehér vagy fekete. Beteszünk a dobozba egy fehér golyót, és összekeverés után kihúzunk egy golyót. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az urnában eredetileg fehér golyó volt, ha a kihúzott golyó fehér? $\left(\frac{1 \cdot \frac{1}{2}}{1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}\right)$
22. Egy dobozban N darab fehér és M darab piros golyó van. Valaki találmányra kivesz egy golyót, amelynek nem tudjuk a színét. Ezután visszatevés nélkül kihúzunk két golyót, melyek fehéreknek bizonyulnak. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a legelsőnek kivett golyó is fehér volt?

$$\left(\frac{\frac{\binom{N-1}{2}}{\binom{N+M-1}{2}} \cdot \frac{N}{N+M}}{\frac{\binom{N-1}{2}}{\binom{N+M-1}{2}} \cdot \frac{N}{N+M} + \frac{\binom{N}{2}}{\binom{N+M-1}{2}} \cdot \frac{M}{N+M}} = \frac{N-2}{N+M-2} \right)$$

23. Két érménk van: egy szabályos és egy „cinkelt”, aminél a fej valószínűsége kétszer akkora, mint az írásé. Kiválasztunk egyet a két érme közül egyenlő valószínűséggel és azt feldobjuk. Mi a valószínűsége, hogy a cinkelt érmével dobtunk, ha az eredmény fej lett? $\left(\frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{4}{7}\right)$

24. ♠ Legyen ξ binomiális eloszlású valószínűségi változó $(5, \frac{1}{3})$ paraméterekkel. Határozza meg a $P(\xi = 2)$ és $P(-5 < \xi \leq -2)$ valószínűségeket! $\left(P(\xi = 2) = \binom{5}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{80}{243}, \quad P(-5 < \xi \leq -2) = 0\right)$

25. ♠ Egy ξ diszkrét valószínűségi változó lehetséges értékei $1, 2, \dots, 10$, eloszlása

$$P(\xi = j) = a \cdot j, \quad j = 1, 2, \dots, 10,$$

ahol a alkalmas valós szám. Határozza meg a értékét! $\left(\frac{1}{55}\right)$ Milyen k pozitív egészekre teljesül $P(\xi \leq k) \leq \frac{1}{2}$? $(k \leq 6)$

26. ♠ Legyen ξ exponenciális eloszlású valószínűségi változó $\lambda = 5$ paraméterrel. Határozza meg a $P(\xi = 3)$ és $P(-2 < \xi < 1)$ valószínűségeket! $(P(\xi = 3) = 0, \quad P(-2 < \xi < 1) = 1 - e^{-5})$

27. ♠ Legyen ξ egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $[0, 1]$ intervallumon. Határozza meg a $P(\xi = \frac{1}{3})$ és $P(-\frac{1}{2} < \xi < \frac{3}{4})$ valószínűségeket! $(P(\xi = \frac{1}{3}) = 0, \quad P(-\frac{1}{2} < \xi < \frac{3}{4}) = \frac{3}{4})$

28. ♠ Egy szabályos dobókockával tizenkétszer dobunk. Jelölje ξ a hármas dobások számát. Határozza meg ξ várható értékét! $\left(P(\xi = k) = \binom{12}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{12-k} \text{ ha } k = 0, 1, \dots, 12 \text{ binomiális eloszlású, ezért } E\xi = 12 \cdot \frac{1}{6} = 2\right)$

29. ♠ Az A és B játékosok a következő játékot játsszák. Az A feldob egy szabályos dobókockát és annyit fizet B -nek, amennyi a dobás eredménye. A B feldob egy szabályos érmét, és ha fej, akkor x forintot fizet A -nak, ha írás, akkor $2x$ forintot fizet A -nak. Mennyi x , ha a játék igazságos abban az értelemben, hogy A illetve B nyereségének várható értéke 0? $(x = \frac{7}{3})$

30. Egy szabályos dobókockát feldobunk. Az eredményt jelölje ξ . Határozza meg az $E(\sqrt{\xi})$ várható értéket! $\left(E(\sqrt{\xi}) = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^6 \sqrt{k}\right)$

31. ♠ Legyen ξ egyenletes eloszlású a $(-5, 7)$ intervallumon. Legyen $\eta := \xi^3$. Határozza meg η eloszlásfüggvényét, sűrűségfüggvényét és várható értékét.

$$F_{\eta}(y) = \begin{cases} 0 & \text{ha } y \leq (-5)^3, \\ \frac{\sqrt[3]{y} + 5}{12} & \text{ha } (-5)^3 < y \leq 7^3, \\ 1 & \text{ha } y > 7^3, \end{cases} \quad f_{\eta}(y) = \begin{cases} \frac{1}{36x^{2/3}} & \text{ha } (-5)^3 < y < 7^3, \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$$

$$E\eta = \frac{1}{12} \int_{-5}^7 x^3 dx = \frac{1776}{48} \quad \text{vagy} \quad E\eta = \frac{1}{36} \int_{(-5)^3}^{7^3} \sqrt[3]{y} dy = \frac{1776}{48}$$

32. Legyen ξ egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $[0, 1]$ intervallumon. Határozza meg az $\eta := \frac{\xi}{1+\xi}$ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét, sűrűségfüggvényét, várható értékét!

$$F_{\eta}(y) = \begin{cases} 0 & \text{ha } y \leq 0, \\ \frac{y}{1-y} & \text{ha } 0 < y \leq \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{ha } y > \frac{1}{2}, \end{cases} \quad f_{\eta}(y) = \begin{cases} \frac{1}{(1-y)^2} & \text{ha } 0 < y < \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$$

$$E\eta = \int_0^1 \frac{x}{1+x} dx = 1 - \ln 2 \quad \text{vagy} \quad E\eta = \int_0^{1/2} \frac{y}{(1-y)^2} dy = 1 - \ln 2$$

33. Válasszunk a $[0, 1]$ intervallumon egyenletes eloszlással egy pontot. Jelölje ξ a pont távolságát a $[0, 1]$ intervallum közelebbi végpontjától. Határozza meg ξ eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét!

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0, \\ 2x & \text{ha } 0 < x \leq \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{ha } x > \frac{1}{2}, \end{cases} \quad f_{\xi}(x) = \begin{cases} 2 & \text{ha } 0 < x < \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

(Tehát ξ egyenletes eloszlású a $(0, \frac{1}{2})$ intervallumon.)

34. ♠ Válasszunk ki egy pontot véletlenszerűen a $\{(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (2,0)\}$ halmazból úgy, hogy mindegyik pont ugyanolyan valószínűséggel kerül kiválasztásra. Jelölje a kiválasztott pontot (ξ, η) . Határozza meg ξ és η várható értékét és a $\text{cov}(\xi, \eta)$ kovarianciát. $\left(E\xi = E\eta = \frac{2}{3}, \text{cov}(\xi, \eta) = -\frac{5}{18}\right)$ Függetlenek-e a ξ és az η valószínűségi változók? (Nem)
35. ★ Válasszunk ki két számot a $[0,1]$ intervallumban egymástól függetlenül és véletlenszerűen (azaz egyenletes eloszlással). Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott számok mértani közepe kisebb mint $\frac{1}{2}$? $\left(\frac{1+\ln 4}{4}\right)$
36. ♠ Egy ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 2, \\ \frac{a}{x^3} & \text{ha } x > 2. \end{cases}$$

Határozza meg az a együttható értékét! Számítsa ki, hogy milyen x értéknél lesz $P(\xi \geq x) = \frac{1}{2}$? $(a = 8, x = 2\sqrt{2})$

37. Legyenek ξ és η független valószínűségi változók, $E\xi = E\eta = 3$, $\text{var}\xi = \text{var}\eta = 9$. Határozza meg $\text{corr}(\xi + \eta, \xi\eta)$ értékét! $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$
38. Mennyi egy egységnyi területben egyenletes eloszlással választott véletlen pont legközelebbi oldaltól való távolságának várható értéke? Mennyi ugyanez egy egységkockában? $\left(\frac{1}{6}, \text{ illetve } \frac{1}{8}\right)$
39. ♠ Legyen ξ egy λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Határozza meg $\sqrt{\xi}$ sűrűségfüggvényét! Határozza meg $\sqrt[3]{\xi}$ sűrűségfüggvényét!

$$f_{\sqrt{\xi}}(y) = \begin{cases} 0 & \text{ha } y \leq 0, \\ 2\lambda y e^{-\lambda y^2} & \text{ha } y > 0, \end{cases} \quad f_{\sqrt[3]{\xi}}(y) = \begin{cases} 0 & \text{ha } y \leq 0, \\ 3\lambda y^2 e^{-\lambda y^3} & \text{ha } y > 0. \end{cases}$$

40. ★ Legyenek a $\xi_1, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók függetlenek és egyenletes eloszlásúak a $[0,1]$ intervallumban. Legyen $\eta := \min\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$, $\zeta := \max\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$. Határozzuk meg η és ζ várhatóértékét, varianciáját, együttes sűrűségfüggvényét, kovarianciáját.

$$f_{\eta, \zeta}(y, z) = \begin{cases} n(n-1)(z-y)^{n-2} & \text{ha } 0 < y < z < 1, \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$$

$$E\eta = \frac{1}{n+1}, \quad E\zeta = \frac{n}{n+1}, \quad \text{var}\eta = \text{var}\zeta = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}, \quad \text{cov}(\eta, \zeta) = \frac{1}{(n+1)^2(n+2)}.$$

41. ♠ Legyen ξ standard normális eloszlású. Határozzuk meg ξ^2 sűrűségfüggvényét.

$$f_{\xi^2}(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-y/2} & \text{ha } y > 0, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

42. ♠ Legyen ξ egyenletes eloszlású az $[1,2]$ intervallumon. Határozza meg az $E(\sqrt{\xi})$ várható értéket! $\left(\frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1)\right)$
43. ★ Legyenek ξ és η független valószínűségi változók $P(\xi = k) = P(\eta = k) = p(1-p)^k$, $k = 0, 1, \dots$ eloszlással. Bizonyítandó, hogy tetszőleges $n = 0, 1, \dots$ és $k = 0, 1, \dots, n$ esetén

$$P(\xi = k | \xi + \eta = n) = \frac{1}{n+1}.$$

44. ★ Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_n$ független valószínűségi változók, $E\xi_k = 0$, $E\xi_k^2 = 1$ és $E\xi_k^4 < \infty$ minden $k = 1, \dots, n$ esetén. Legyen $S_n := \xi_1 + \dots + \xi_n$. Bizonyítandó, hogy

$$E(S_n^3) = \sum_{k=1}^n E(\xi_k^3) \quad \text{és} \quad E(S_n^4) = \sum_{k=1}^n E(\xi_k^4) + 3n(n-1).$$

45. ★ Egy urnában N cédula van, melyek meg vannak számozva 1-től N -ig. Kihúzzunk k cédulát visszatevés nélkül. Határozzuk meg a legnagyobb kihúzott szám eloszlását és várható értékét. (A lehetséges értékek $k, k+1, \dots, N$, a hozzátartozó valószínűségek $\frac{\binom{k-1}{N-k}}{\binom{k-1}{N}}, \frac{\binom{k-1}{N-k-1}}{\binom{k-1}{N}}, \dots, \frac{\binom{k-1}{N-1}}{\binom{k-1}{N}}$, a várható érték $\frac{k}{k+1}(N+1)$.)

46. ★ Két darab egységnyi hosszúságú botot véletlenszerűen eltörünk, és a keletkezett rövidebb darabokat összeragasztjuk. Mennyi az így kapott bot hosszának eloszlásfüggvénye, sűrűségfüggvénye és várható értéke?

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0, \\ 2x^2 & \text{ha } 0 < x \leq \frac{1}{2}, \\ 1 - 2(1-x)^2 & \text{ha } \frac{1}{2} < x \leq 1, \\ 1 & \text{ha } x > 0, \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} 4x & \text{ha } 0 < x \leq \frac{1}{2}, \\ 4(1-x) & \text{ha } \frac{1}{2} < x \leq 1, \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$$

a várható érték $\frac{1}{2}$.

47. ♠ Legyen a ξ valószínűségi változó egyenletes eloszlású a $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ halmazon, és legyen $\eta := \xi^3$. Milyen értékeket és milyen valószínűséggel vesz fel η ? Határozza meg η várható értékét, varianciáját! (Az η egyenletes eloszlású a $\{-8, -1, 0, 1, 8, 27\}$ halmazon, $E\eta = \frac{9}{2}$, $\text{var } \eta = \frac{1475}{12}$.)

48. ♠ Legyen a ξ valószínűségi változó egyenletes eloszlású a $[0, 1]$ intervallumon, és legyen $\eta := \sqrt{\xi}$. Határozza meg η várható értékét, mediánját, interkvartilisét! ($E\eta = \frac{2}{3}$, az η mediánja $\frac{\sqrt{2}}{2}$, interkvartilise $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.)

49. ★ Határozza meg a c konstans értékét úgy, hogy az

$$f(x, y) = \begin{cases} c \cdot (x + y) & \text{ha } x, y \in [0, 1], \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

függvény sűrűségfüggvény legyen! Határozza meg a koordináták korrelációs együtthatóját! ($c = 1$, a korrelációs együttható $-\frac{1}{11}$.)

50. Legyen a ξ valószínűségi változó egyenletes eloszlású a $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ halmazon, és legyen $\eta := \xi^2$. Milyen értékeket és milyen valószínűséggel vesz fel η ? Határozza meg η várható értékét, varianciáját! (Az η lehetséges értékei $0, 1, 4, 9$; a hozzátartozó valószínűségek $\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{2}{6}, \frac{1}{6}$; $E\eta = \frac{19}{6}$, $\text{var } \eta = \frac{329}{36}$.)

51. Legyen a ξ valószínűségi változó egyenletes eloszlású a $[0, 1]$ intervallumon, és legyen $\eta := \xi^2$. Határozza meg η várható értékét, mediánját, interkvartilisét! ($E\eta = \frac{1}{8}$, az η mediánja $\frac{1}{4}$, interkvartilise $\frac{1}{2}$.)

52. ★ Határozza meg a c konstans értékét úgy, hogy az

$$f(x, y) = \begin{cases} c \cdot (x^2 + y^2) & \text{ha } x, y \in [0, 1], \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

függvény sűrűségfüggvény legyen! Határozza meg a koordináták korrelációs együtthatóját! ($c = \frac{3}{2}$, a korrelációs együttható $-\frac{15}{73}$.)

53. A (ξ, η) kétdimenziós valószínűségi változó lehetséges értékeit a $P_1(0, 0)$, $P_2(0, 4)$, $P_3(4, 4)$ és $P_4(4, 0)$ pontok által meghatározott négyzet **belsejében** levő egész koordinátájú pontok alkotják. A (ξ, η) e pontokat egyenlő valószínűséggel veszi fel — a négyzet középpontja kivételével, amely négyszer akkora valószínűséggel következik be, mint a többi. Számítsa ki a ξ és η korrelációs együtthatóját! Állapítsa meg, hogy függetlenek-e a ξ és az η valószínűségi változók? (A korrelációs együttható 0, tehát korrelálatlanok, de nem függetlenek.)

54. Határozza meg az exponenciális eloszlás mediánját és interkvartilisét! (A λ paraméterű exponenciális eloszlás mediánja $\frac{\ln 2}{\lambda}$, az interkvartilise $\frac{\ln 3}{\lambda}$.)

55. Határozza meg az $[a, b]$ intervallumon egyenletes eloszlás ferdeségét és lapultságát! (A ferdeség 0, a lapultság $-\frac{6}{5}$.)

56. ★ Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_n$ független, λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók. Bizonyítsa be, hogy

$$\max\{\xi_1, \dots, \xi_n\} \quad \text{és} \quad \xi_1 + \frac{\xi_2}{2} + \dots + \frac{\xi_n}{n}$$

eloszlása megegyezik!