

DEBRECENI EGYETEM, KTK

Feladatok a Gazdasági matematika II. tárgy gyakorlataihoz

♠ a megoldásra ajánlott feladatokat jelöli, **e feladatokat a félév végére megoldottnak tekintjük**

★ a nehezebb feladatokat jelöli

Az $\mathbb{R}^n$ vektortér

- (1) Legyen $a = (-3, 4, 2)$, $b = (5, 0, -4)$, $c = (2, 7, 8)$. Határozzuk meg az $a - 3b + c$, $3a + b - 2c$, $5a + 4b - 6c$ vektorokat.
- (2) ♠ Legyen $4(x, y, z) + 5(-1, 2, 4) = (-1, 8, 32)$. Határozzuk meg az (x, y, z) vektort.
- (3) Lineárisan függetlenek-e a $(2, 3)$ és az $(5, 4)$ vektorok?
- (4) Igazoljuk, hogy az a_1, a_2, a_3 vektorok bázist alkotnak $\mathbb{R}^3$ -ban. Számoljuk ki az x vektor koordinátáit ebben a bázisban, ha $a_1 = (2, -1, 3)$, $a_2 = (1, 4, -2)$, $a_3 = (-1, 0, 2)$, $x = (1, -1, 0)$.
- (5) Bázist alkotnak-e $\mathbb{R}^3$ -ban az a_1, a_2, a_3 vektorok. Ha igen, akkor számoljuk ki az x vektor koordinátáit ebben a bázisban, ha $a_1 = (1, 1, 1)$, $a_2 = (1, 1, 2)$, $a_3 = (1, 2, 3)$, $x = (6, 9, 14)$.
- (6) ♠ Számoljuk ki az a vektor hosszát, az a és b vektorok skaláris szorzatát, és az általuk bezárt szöget, ha
 - (a) ♠ $a = (2, -1, 4)$, $b = (3, 5, 2)$;
 - (b) $a = (1, 0, 7)$, $b = (0, -2, 6)$;
 - (c) $a = (3, 4, 1)$, $b = (-2, 2, 6)$.
- (7) Határozzuk meg a következő vektorok által generált altér egy bázisát és dimenzióját
$$\begin{aligned}a_1 &= (2, 1, 3, -1) \\a_2 &= (-1, 1, -3, 1) \\a_3 &= (4, 5, 3, 1) \\a_4 &= (1, 5, -3, 1).\end{aligned}$$
- (8) Alteret alkotnak-e az $\mathbb{R}^5$ vektortérben a megadott részhalmazok? Ha igen, akkor hány dimenziósak?
 - (a) ♠ $L = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid x_1 = x_5, x_2 = x_3 \}$

- (b) $L = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \}$
 (c) $L = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid x_i = 2k \text{ páros szám } k \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, \dots, 5 \}$
 (d) $L = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid x_1, x_5 \in \mathbb{Q} \}$
 (e) ♠ $L = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \}$

Mátrixok és determinánsok

- (9) ♠ Számítsa ki az AB , BA , AC , ABC , ADF , DF , G^2 , $3G^2 - 2G + 5G^0$ mátrixokat, ha

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (10) Határozza meg az AX , $X^T A$ mátrixokat, ha

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 5 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix} \text{ és (a) } X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{(b) } X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (11) Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Határozzuk meg az A^n mátrixot!

- (12) Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Mutassuk meg, hogy $A^2 = A$!

- (13) ♠ Határozzuk meg az összes olyan X 2x2-es mátrixot, melyre $AX = XA$, ha

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

- (14) ♠ Az első évben három cég A , B és C piaci részesedései rendre 20, 60, 20%. A második évben ez a következőképpen változik: A fogyasztóinak 85%-a nála maradt, 5%-a B -hez, 10%-a C -hez kerül, B fogyasztóinak 55%-a nála marad, 10%-a A -hoz,

35%-a C -hez kerül, míg C fogyasztóinak 85%-a nála marad, 10%-a A -hoz, 5%-a B -hez kerül. Írjuk fel a piaci részesedés-vektort, és jelöljük azt $s \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ -el. Tekintsük a

$$T = \begin{pmatrix} 0,85 & 0,10 & 0,10 \\ 0,05 & 0,55 & 0,05 \\ 0,10 & 0,35 & 0,85 \end{pmatrix}$$

mátrixot. Számoljuk ki a Ts vektort, mutassuk meg, hogy az éppen második év piaci részesedés vektora. Hogyan értelmezhető a $T^2s := T(Ts)$ vektor?

- (15) Az első évben három cég A , B és C piaci részesedései rendre 15, 40, 45%. A második évben ez a következőképpen változik: A fogyasztóinak 75%-a nála maradt, 15%-a B -hez, 10%-a C -hez kerül, B fogyasztóinak 90%-a nála marad, 5%-a A -hoz, 5%-a C -hez kerül, míg C fogyasztóinak 65%-a nála marad, 30%-a A -hoz, 5%-a B -hez kerül. Legyen a piaci részesedés-vektora $s \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$. Határozza meg a $T \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mátrixot úgy, hogy, Ts éppen második év piaci részesedés vektora legyen!

- (16) ♠ Egy cég 3 raktárban 4 féle terméket tárol. Az alábbi táblázat mutatja a tárolt mennyiségeket, az egyes termékek egységárait, a raktározás költségét, valamint a raktár befogadó képességét.

	T1	T2	T3	T4	költség (Ft/db)	Kapacitás
R1	10	4	10	5	200	30
R2	3	5	0	15	300	25
R3	15	9	10	40	150	80
Egys.ár(Ft/db)	200	100	300	50		

Válaszoljunk mátrixműveletekkel az alábbi kérdésekre!

- (a) Hány darabot tárolnak az egyes termékekből?
- (b) Mekkora az egyes raktárak szabad kapacitása?
- (c) Mennyi az egyes termékek raktározási költsége?
- (d) Mekkora értéket tárolnak az egyes raktárak?
- (17) Egy cég 4-féle terméket állít elő, melyhez 3-féle alapanyag szükséges. Az alábbi táblázat mutatja, hogy melyik termék előállításához hány egység szükséges az egyes alapanyagokból, továbbá tartalmazza a táblázat az egyes alapanyagok árát, valamint a kész termékek eladási árát.

	T1	T2	T3	T4	költség (Ft/db)
A1	1	2	5	1	100
A2	0	4	2	3	200
A3	2	3	5	4	300
Egys.ár(Ft/db)	400	600	500	400	

Az egyes termékekből rendre 10, 20, 30, 40 darabot állítunk elő. Válaszoljunk mátrixműveletekkel az alábbi kérdésekre!

- (a) Mennyi az egyes termékek előállítási költsége?
- (b) Mennyi a cég bevétele?
- (c) Mennyi a haszon az egyes termékeken?
- (d) Mennyi az összhaszon (profit)?
- (18) Egy üzemben importból beszerezett 5-féle alkatrészből 4-fajta végterméket szerelnek össze. Egy megfigyelt időszakban a V_1 termékből 50, a V_2 termékből 70, a V_3 termékből 32, a V_4 termékből 20 egységet állítanak elő. Az egyes termékek fajlagos alkatrész-szükségletét a következő táblázat mutatja:

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
V_1	1	0	2	3	1
V_2	0	2	1	3	0
V_3	0	3	2	1	3
V_4	1	5	3	2	5

Az egyes alkatrészek beszerzési ára 3; 2; 5; 1; 4; 2 ezer Ft/darab. Válaszoljunk mátrixműveletek felhasználásával az alábbi kérdésekre:

- (a) Mekkora a termékek fajlagos alkatrészköltsége?
- (b) Az egyes alkatrészekből hány darabot kell importálni?
- (c) Mennyi a teljes importköltség?
- (19) Számítsa ki a következő determinánsok értékét:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } \spadesuit & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}, \\
 \text{b) } & \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \\
 \text{c) } \spadesuit & \begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \\ 5 & 6 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}, \\
 \text{d) } & \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 31 & 23 & 55 & 42 \end{vmatrix}.
 \end{array}$$

- (20) A kifejtési tétel alkalmazásával számítsa ki a következő determinánsok értékét:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } \spadesuit & \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 & 1 \\ c & 1 & 0 & 1 \\ d & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \\
 \text{b) } & \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -8 & 5 & 9 & 5 \\ -11 & 7 & 7 & 4 \end{vmatrix}.
 \end{array}$$

- (21) Határozza meg az A mátrix determinánsát, ha az A mátrix a_{ij} eleme

- a) $a_{ij} = \min(i, j)$,
- b) $a_{ij} = \max(i, j)$.

(22) ♠ Határozzuk meg az x valós számot úgy, hogy

$$a) \begin{vmatrix} x & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 5 & x \end{vmatrix} = 0, \quad b) \begin{vmatrix} x^2 & 2x-1 \\ 2x & 2 \end{vmatrix} = 0$$

teljesüljön.

(23) Írja fel x polinomjaként az alábbi determinánsokat:

$$a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}, \quad b) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & x+1 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & x+1 \end{vmatrix}.$$

(24) ♠ Határozza meg x -et, ha

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3-x \end{vmatrix} = 0.$$

(25) Mutassa meg kizárólag sorok (vagy oszlopok) egymásból való kivonásával, hogy

$$\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 \\ 4^2 & 5^2 & 6^2 & 7^2 \end{vmatrix} = 0.$$

(26) Mikor invertálható az $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mátrix? Hogyan számíthatjuk ki az inverzét?

(27) Invertálhatók-e az alábbi mátrixok, és ha igen, határozza meg az inverzüket!

$$a) \spadesuit \quad \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}, \quad b) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$c) \spadesuit \quad \begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad d) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$e) \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad f) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (28) Mennyi az A mátrix rangja? Adja meg a sorvektorai által generált altér egy bázisát!

$$\text{a) } \spadesuit \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

- (29) Milyen λ értékek mellett invertálhatók az alábbi mátrixok:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \spadesuit \quad \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -12 \\ -2 & -3 & \lambda \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}.$$

- (30) $\spadesuit$ Mutassa meg, hogy az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

mátrix invertálható, és határozza meg az $A \cdot X = B$ egyenlet összes $X \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ megoldását, ha

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 1 \\ -14 & 8 & -5 \\ 11 & 14 & 3 \end{pmatrix}.$$

- (31) $\spadesuit$ Határozza meg az A mátrix sajátértékeit és sajátvektorait, ahol

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lineáris egyenletrendszerek

- (32) Oldja meg Gauss eliminációval az alábbi lineáris homogén egyenletrendszereket:

$$\spadesuit \quad \begin{array}{rrcrcl} 8x_1 & +2x_2 & +9x_3 & +5x_4 & = & 0 \\ 4x_1 & +x_2 & +3x_3 & +x_4 & = & 0, \\ 8x_1 & +2x_2 & +5x_3 & +x_4 & = & 0 \end{array} \quad \begin{array}{rrcrcl} 2x_1 & +x_2 & -4x_3 & & = & 0 \\ 3x_1 & +5x_2 & -7x_3 & & = & 0, \\ 4x_1 & -5x_2 & -6x_3 & & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcrcl} 3x_1 & +x_2 & +x_3 & & = & 0 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & & = & 0, \end{array} \quad \begin{array}{rrcrcl} 9x_1 & +21x_2 & -15x_3 & +5x_4 & = & 0 \\ 12x_1 & +28x_2 & -20x_3 & +7x_4 & = & 0. \end{array}$$

- (33) Oldja meg Gauss eliminációval az alábbi lineáris inhomogén egyenletrendszereket:

$$\spadesuit \quad \begin{array}{rrcrcl} 3x_1 & -2x_2 & +x_3 & +2x_4 & = & 1 \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & -x_4 & = & -2, \\ 2x_1 & -x_2 & +3x_3 & & = & 4 \end{array} \quad \begin{array}{rrcrcl} 2x_1 & +5x_2 & -8x_3 & & = & 8 \\ 4x_1 & +3x_2 & -9x_3 & & = & 9 \\ 2x_1 & +3x_2 & -5x_3 & & = & 7, \\ x_1 & +8x_2 & -7x_3 & & = & 12 \end{array}.$$

(34) ♠ A Cramer szabállyal a következő lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(35) ♠ Milyen a, b mellett alkalmazható a Cramer szabály a következő lineáris egyenletrendszerre?

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Legyen $a = 1$, megválasztható-e (és ha igen, akkor hogyan) b úgy, hogy $x_1 = 4$ megoldása legyen az egyenletrendszernek?

(36) Megoldhatók-e következő lineáris egyenletrendszerek? Ha igen oldjuk meg őket!

$$\begin{array}{rclcl} x_1 & +x_2 & +2x_3 & +3x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & -x_2 & -x_3 & -2x_4 & = & -4 \\ 2x_1 & +3x_2 & -x_3 & -x_4 & = & -6 \\ x_1 & +2x_2 & +3x_3 & -x_4 & = & -4 \end{array}, \quad \spadesuit \quad \begin{array}{rclcl} 2x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 2 \\ x_1 & +3x_2 & +x_3 & = & 5 \\ x_1 & +x_2 & +5x_3 & = & -7 \\ 2x_1 & +3x_2 & -3x_3 & = & 14 \end{array}.$$

Tudjuk, hogy az első rendszer determinánsa -153, a második rendszernél a bővített mátrix determinánsa 0.

(37) Adjuk meg a következő lineáris egyenletrendszerek összes megoldását (a Cramer szabály felhasználásával)! Tudjuk, hogy az első rendszer mátrixának és bővített mátrixának rangja 2, de ha a (2,3) indexhez tartozó 1 elemet 3-ra változtatjuk, akkor az előbbi két rang 3-ra változik és a bal felső sarokdetermináns vehető rang-meghatározó determinánsnak.

$$\spadesuit \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4 \\ 4 & 5 & -5 & -5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$\spadesuit \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4 \\ 4 & 5 & -5 & -5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 7 & -3 & 5 \\ 1 & 3 & -2 & 5 & -7 \\ 3 & -2 & 7 & -5 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(38) ♠ Tekintsük a következő lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{array}{rclcl} 2x_1 & +3x_2 & -x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & +\lambda x_2 & +4x_3 & = & 5 \\ 7x_1 & +4x_2 & +2x_3 & = & k \end{array}$$

a) Legyen $k = 8$. λ milyen értékei esetén nincs megoldása az egyenletrendszernek?

b) Most legyen $\lambda = -2$. Milyen k esetén oldható meg az egyenletrendszer?

(39) Mátrixinvertálás segítségével oldjuk meg a következő lineáris egyenletrendszereket:

$$\begin{array}{ll} x_1 + x_2 - 2x_3 = -3 & 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 15 & x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 7 \\ 6x_1 - x_2 - 4x_3 = -8 & 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 14. \end{array}$$

Lineáris leképezések, diagonalizálás

(40) ♠ Legyen a $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineáris leképezés mátrixa (a természetes bázisra vonatkozóan)

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Határozzuk meg az $x = (1, 1, 2)$ vektor képét!

b) Határozzuk meg azt az x vektort, melynek képvektora az $y = (-2, -5, -5)$ vektor!

(41) Vizsgáljuk meg, hogy melyek diagonalizálhatók az alábbi mátrixok közül. A diagonalizálhatók esetében határozzuk meg azt az S mátrixot, amellyel $S^{-1}AS$ diagonális mátrix.

$$\spadesuit A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

(42) Határozzuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait!

$$\spadesuit A = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 5 \\ 5 & 9 & 5 \\ 5 & 5 & 9 \end{pmatrix} \quad (\lambda_1 = 4) \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

(43) Diagonalizáljuk az alábbi szimmetrikus mátrixokat, azaz határozzunk meg olyan U ortogonális mátrixot, melyre $U^\top AU$ diagonális! (U oszlopvektorai a mátrix normált lin. független sajátvektorai)

$$\begin{array}{ll} \spadesuit A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} & A = \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{pmatrix} \\ \spadesuit A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} & A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

(44) Határozzunk meg a következő kvadratikus formák kanonikus alakját és döntsük el hogy definitiség szempontjából milyenek!

a) ♠ $2x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_1x_2$

b) $9x_1^2 + 16x_2^2 + 24x_1x_2$

c) ♠ $x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 6x_1x_2 - 2x_2x_3$

d) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 6x_1x_2 + 8x_1x_3$

Többszörös függvények, sorozatok, folytonosság

(45) Határozza meg a következő függvények értelmezési tartományát (és ábrázolja a kapott halmazokat az $\mathbb{R}^2$ ill. $\mathbb{R}^3$ térben):

(a) $f(x, y) = \ln xy$;

(b) ♠ $f(x, y) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$ ($a, b > 0$);

(c) $f(x, y) = \sqrt{\sin \pi(x^2 + y^2)}$;

(d) $f(x, y) = \frac{1}{\arccos(\sqrt{x^2 + y^2} - 1)}$;

(e) ♠ $f(x, y, z) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - r^2}}$ ($R > r > 0$).

(46) Határozza meg, milyen alakzatot alkotnak az $f(x, y) = z_0$ egyenlet megoldásai, ha

(a) ♠ $f(x, y) = x^2 + y^2$, $z_0 = 25$;

(b) $f(x, y) = \cos \pi(x + y)$, $z_0 = 1$;

(c) $f(x, y) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}xy$, $z_0 = 1$;

(d) ♠ $f(x, y) = \sin \pi(x^2 + y^2)$, $z_0 = 0$.

(47) (a) Szemléltessük az $f(x, y) = x^2 + y^2$ ($x, y \in \mathbb{R}^2$) függvényt!

(b) Szemléltessük az $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ ($x, y \in \mathbb{R}^2$) függvényt!

(48) ♠ Létezik-e határértéke az ($\mathbb{R}^3$ -beli) (a_n) sorozatnak ? Ha igen, határozza meg.

(a) $a_n = \left(\frac{n^2}{n^3+1}, 2^{-n}, \frac{1}{n!} \right)$;

(b) $a_n = \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \frac{\sin n}{n}, \frac{2n}{n+1} \right)$;

(c) $a_n = \left(\sin \pi n, n, \frac{1}{n^2} \right)$.

(49) Léteznek-e a következő függvényhatárértékek ? Ha igen, határozza meg.

(a) ♠ $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,-2)} \frac{x^2 + 2xy + y^2}{x^2 - y^2}$;

(b) ♠ $\lim_{(x,y) \rightarrow (3,0)} \frac{\sin xy}{y}$;

(c) ♠ $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{1}{x - y}$;

- (d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x + xy - y}{x + xy + y}.$
- (50) ♠ Folytonosak-e az alábbi, az egész $\mathbb{R}^2$ -n értelmezett függvények?
- (a) $f(x, y) = x^2 - y;$
- (b) $f(x, y) = \sin xy;$
- (c) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1).$
- (51) Folytonosak-e $(0, 0)$ -ban a következő függvények ?
- (a) ♠ $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0); \end{cases}$
- (b) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x^2 + y^2}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0); \end{cases}$
- (c) ♠ $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

Többszörös függvények differenciálása

- (52) ♠ Számítsa ki a következő függvények első parciális deriváltjait, majd hozza őket egyszerűbb alakra.
- (a) $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2 - x + 1;$
- (b) $f(x, y) = (x^3 - 2x^2y + y^2)^7;$
- (c) $f(x, y) = xy \cos x^2 y^2;$
- (d) $f(x, y) = e^{x^2 + y^2 - 1};$
- (e) $f(x, y) = (2x + y)^{2x - y}.$
- (53) Számítsa ki a következő függvények másodrendű parciális deriváltjait.
- (a) ♠ $f(x, y) = x^3 - 3x^2y + xy^2 + y^3;$
- (b) ♠ $f(x, y) = \frac{x - y}{x + y};$
- (c) $f(x, y) = \sin x \cos y;$
- (d) ♠ $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}.$
- (54) ♠ Határozza meg az alábbi függvények iránymenti deriváltját az a irány mentén (figyelem a nem egységvektor!) a megadott (x_0, y_0) pontban!
- (a) $f(x, y) = 2x^2 + y - 1, \quad a = (1, 1), \quad (x_0, y_0) = (2, 1),$
- (b) $f(x, y) = xe^{xy} - xy, \quad a = (3, 4), \quad (x_0, y_0) = (1, 1).$

- (55) ★ Mutassa meg, hogy az alábbi függvény parciális differenciálhányadosai az origóban nem folytonosak, de ott a függvény mégis differenciálható.

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- (56) ★ Legyen $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható az $(x_0, y_0) \in D$ belső pontban és tegyük fel, hogy itt az első parciális deriváltak legalább egyike nem nulla. Milyen e irány mentén lesz a $D_e f(x_0, y_0)$ iránymenti derivált maximális (minimális)?
- (57) A láncszabály segítségével számítsa ki $h'(t)$ -t, ha $h(t) = f(\varphi(t), \psi(t))$ és
- (a) ♠ $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - xy$, $\varphi(t) = t^2$, $\psi(t) = t^3$,
- (b) $f(x, y) = x \ln y + y \ln x$, $\varphi(t) = t + 1$, $\psi(t) = \ln t$.
- (58) A láncszabály segítségével számítsa ki $\partial_1 F(u_1, u_2), \partial_2 F(u_1, u_2)$ -t, ha

$$F(u_1, u_2) = f(g(u_1, u_2), h(u_1, u_2), k(u_1, u_2)),$$

és

- (a) ♠ $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_3$, $g(u_1, u_2) = u_1u_2$, $h(u_1, u_2) = u_1$, $k(u_1, u_2) = u_1/u_2$,
- (b) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1x_2x_3)^2$, $g(u_1, u_2) = \ln(u_1 + u_2)$, $h(u_1, u_2) = u_1^2$, $k(u_1, u_2) = (u_1/u_2)^2$.
- (59) ♠ Az $y^6 + y^5 - x^2 - x + 4 = 0$ egyenlet implicit módon meghatározza az $y = f(x)$ függvényt, és $f(2) = 1$. Határozza meg $f'(2)$ -et!
- (60) Az $2x^5 + 3xyz - 4z - 1 = 0$ egyenlet implicit módon meghatározza az $x = f(y, z)$ függvényt, $f(1, 1) = 1$. Határozza meg a $\partial_x f(x, y), \partial_y f(x, y)$ parciális deriváltakat! Számolja ki ezen parciális deriváltakat az $(1, 1)$ pontban is.
- (61) ★ Az $2x^5 + 3xyz + 5z + u = 0, xyzu + 2e^y - 10x = 0$ egyenletek implicit módon meghatározzák az $x = f(z, u), y = g(z, u)$ függvényeket. Határozza meg a $\partial_z f(z, u), \partial_u f(z, u)$ parciális deriváltakat!

Közönséges és feltételes szélsőérték

(62) Határozza meg az alábbi függvények stacionárius pontjait és lokális szélsőérték helyeit, azok típusát és nagyságát.

- (a) $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x - 2y - 1, \quad (x, y \in \mathbb{R});$
- (b) ♠ $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2, \quad (x, y \in \mathbb{R});$
- (c) $f(x, y) = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2, \quad (x, y \in \mathbb{R});$
- (d) ♠ $f(x, y) = \frac{20}{x} + \frac{50}{y} + xy, \quad (x > 0, y > 0);$
- (e) $f(x, y) = e^{-(x^2 - 2xy + 2y^2)}, \quad (x, y \in \mathbb{R});$
- (f) $f(x, y) = x^2 - 4xy + y^3 + y^2 + 5, \quad (x, y \in \mathbb{R});$
- (g) $f(x, y) = x(x^2 + y - 1)^2, \quad (x, y \in \mathbb{R});$
- (h) $f(x, y) = e^{x^2 - y}(5 - 2x + y), \quad (x, y \in \mathbb{R});$
- (k) ♠ $f(x, y) = x^3 + y^3 - 75x - 12y + 7, \quad (x, y \in \mathbb{R});$
- (l) ★ $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 4 \ln x - 10 \ln y, \quad (x > 0, y > 0).$

(63) Határozza meg az alábbi függvényeknek a megadott korlátos, zárt (kompakt) D halmazon felvett minimumát és maximumát!

- (a) $f(x, y) = x - 2y - 3, \quad D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y, x + y \in [0, 1] \};$
- (b) ♠ $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + 3x - 3y, \quad D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, y \leq 2 - x \};$
- (c) ♠ $f(x, y) = x^2 y(4 - x - y), \quad D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, y \leq 6 - x \};$
- (d) $f(x, y) = x^2 - xy + y^2, \quad D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1 \};$
- (e) $f(x, y, z) = x + y + z, \quad D = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 1 \}.$

(64) ♠ Egy vállalat kétféle terméket gyárt, A -t és B -t. Tegyük föl, hogy x egységnyi A és y egységnyi B termelésének napi költsége

$$C(x, y) = 0,04x^2 + 0,01xy + 0,01y^2 + 4x + 2y + 500 \quad \text{€}.$$

Egységnyi A termék ára 15 €, B ára 9 €. Határozzuk meg x és y értékét úgy, hogy a profit maximális legyen.

(65) Tekintsük az $F(K, L) = 6K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{3}}$ termelési függvényt, K a felhasznált tőke, L a felhasznált munka. Egy egység áru előállításának költsége $p = 0,5$, a tőke egy egységének költsége $r = 0,1$. Egységnyi munka költsége (bérarány) $w = 1$. Maximalizáljuk a profitot. A profit kiszámítása

$$P(K, L) = pF(K, L) - rK - wL.$$

- (66) ♠ Egy vállalatnak 3 üzeme van, amelyekben ugyanazt a terméket állítják elő. Legyenek x, y, z az előállított termékek száma rendre a három üzemben, melyek egy 2000 egységes megrendelést elégítenek ki. A három üzem költségfüggvénye rendre

$$\begin{aligned}C_1(x) &= 200 + \frac{1}{100}x^2, \\C_2(x) &= 200 + y + \frac{1}{300}y^3, \\C_3(x) &= 200 + 10z.\end{aligned}$$

Az összköltség $C(x) = C_1(x) + C_2(x) + C_3(x)$. Minimalizáljuk a C függvényt.

- (67) Határozza meg az alábbi függvények feltételes szélsőértékeit!

- (a) ♠ $f(x, y) = x^2 + y^2$, ha $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$;
- (b) ♠ $f(x, y) = x - 2y + 2z$, ha $x^2 + y^2 + z^2 = 1$;
- (c) $f(x, y) = x + y^2$, ha $x^2 + y^2 = 1$;
- (d) $f(x, y) = xy$, ha $x^2 + y^2 = 1$;
- (e) $f(x, y) = x + y$, ha $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}$ ($a > 0$);
- (f) $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, ha $\frac{g}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}$ ($a > 0$);
- (h) $f(x, y) = 4x - y$, ha $x^2 - y^2 = 15$;
- (i) $f(x, y) = xy^2z^3$, ha $x + 2y + 3z = a$ ($a > 0, x, y, z > 0$);
- (j) ★ $f(x, y) = xyz$, ha $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 1$;
- (k) ★ $f(x, y) = xyz$, ha $x + y + z = 5, xy + yz + zx = 8$.

- (68) ♠ A közgazdász-hallgató Töhötöm 100 Ft egységárú virslire és 300 Ft egységárú sörre költi el (teljes egészében) 9.000 Ft zsebpénzét. Tudja, hogy hasznossági függvénye

$$U(x_1, x_2) = \frac{2}{3} \ln(x_1) + \frac{1}{3} \ln(x_2)$$

alakú, ahol x_1 a virsliből, x_2 a sörből vásárolt mennyiséget jelöli. Melyik termékből mennyit vásároljon Töhötöm, hogy U -t maximalizálja (az adott mellékfeltételek mellett)?

Eseményalgebra

(69) ♠ Mutassuk meg, hogy tetszőleges A és B eseményekre $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$.

(70) Mutassuk meg, hogy tetszőleges A, B, C, D és E események esetén

$$P(A \cap B \cap C \cap D \cap E) \geq P(A) + P(B) + P(C) + P(D) + P(E) - 4.$$

(71) ♠ Egy teherautó három településre szállít tüzelőanyagot. Jelölje A_i ($i = 1, 2, 3$) azt az eseményt, hogy egy adott napon az i -edik településre szállít. Fejezzük ki az A_i eseményekkel a következőket:

- (a) csak az első településre szállít;
- (b) egyik településre sem szállít;
- (c) legalább egy településre szállít;
- (d) legalább két településre szállít;
- (e) csak a második településre szállít.

(72) Egy számítástechnikai szaküzletbe laptopot szállítanak. Minőségellenőrzés során ezek közül véletlenszerűen kiválasztunk négy darabot. Jelölje A_i ($i = 1, 2, 3, 4$) azt az eseményt, hogy az i -edik készülék hibás. Fejezzük ki A_i segítségével az alábbi eseményeket:

- (a) mind a négy készülék hibás;
- (b) legalább egy készülék hibás;
- (c) egyetlen készülék sem hibás;
- (d) csak az első készülék hibás;
- (e) minden készülék hibátlan;
- (f) pontosan egy készülék hibás.

(73) ♠ Egy dobókockát egyszer feldobunk. Jelölje A azt az eseményt, hogy legalább 3-ast dobunk, B azt, hogy legfeljebb 4-est. Adjuk meg az $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ eseményeket!

(74) Jelentse A azt az eseményt, hogy egy 32 lapos magyar kártyából pirosat húzunk, B pedig azt az eseményt, hogy hetest. Mit jelentenek az $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $\bar{A}$ események?

Kombinatorikus valószínűségek

(75) Két szabályos kockával dobunk. Tekintsük az $A = \{\text{az összeg páratlan}\}$ és $B = \{\text{van 1-es}\}$ eseményeket. Írja le az $A \cup B$ és $A \cap B$ eseményeket és határozza

meg a valószínűségüket!

$$A \cup B = \left\{ \begin{array}{l} (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 1), (2, 3), \\ (3, 2), (2, 5), (5, 2), (3, 4), (4, 3), (3, 6), (6, 3), (4, 5), (5, 4), (5, 6), (6, 5) \end{array} \right\}$$

$$A \cap B = \{(1, 2), (2, 1), (1, 4), (4, 1), (1, 6), (6, 1)\}, \quad P(A) = \frac{18}{36}, \quad P(B) = 1 - \frac{25}{36}, \\ P(A \cup B) = \frac{23}{36}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

(76) ♠ Egy szabályos dobókockával kétszer dobunk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az első dobás eredménye nagyobb, mint a másodiké? $\left(\frac{15}{36} = \frac{5}{12}\right)$

(77) ★ Egy szabályos dobókocka egy lapjára az 1-es, két lapjára a 2-es, három lapjára a 3-as szám van írva. A dobókockával kétszer dobunk egymás után. Mennyi a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 4?

(78) ♠ Szabályos kockával n -szer dobva mennyi a valószínűsége annak, hogy

(a) legalább egy 6-os van? $\left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right)$

(b) pontosan egy 6-os van? $\left(n \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} = \frac{n5^{n-1}}{6^n}\right)$

(79) ♠ Egy szabályos érmét 9-szer feldobunk. Tekintsük az

$$A := \{\text{a dobott fejek száma páros}\}$$

eseményt. Határozza meg a $P(A)$ valószínűséget!

$$\left[\binom{9}{0} + \binom{9}{2} + \binom{9}{4} + \binom{9}{6} + \binom{9}{8} \right] \cdot \frac{1}{2^9} = \frac{1}{2}$$

(80) ♠ A 32 lapos magyar kártyából 4 lapot kihúzva mennyi a valószínűsége, hogy a kihúzott lapok között legalább egy ász van?

(81) ♠ Mennyi a valószínűsége annak, hogy az 52 lapos kártyából 5 lapot kiosztva *full* lesz az eredmény, azaz 3 egyforma + 2 egyforma? (Például három 6-os és két király; 4 színből 13-13 különböző lap van.) $\left(\frac{13 \cdot 12 \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{4}{2}}{\binom{52}{5}} = \frac{6}{5 \cdot 17 \cdot 49} \approx 0.00144\right)$

(82) ♠ Egy dobozban 4 piros golyó van. Legalább hány fehér golyót kell a dobozba tenni ahhoz, hogy a fehér golyó húzásának valószínűsége 95%-nál nagyobb legyen?

(83) ♠ Egy társaságot, mely $2n$ emberből áll, találomra két egyforma csoportra osztunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a két legnagyobb személy különböző csoportba kerül? $\left(\frac{n}{2n-1}\right)$

(84) Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy ötven fős társaságban van legalább két olyan ember, akik ugyanazon a napon születtek?

(85) Egy urnában fehér és piros golyók vannak. Visszatevéssel kihúzunk két golyót. Bizonyítsuk be, hogy legalább $\frac{1}{2}$ annak a valószínűsége, hogy a kihúzott golyók egyforma színűek! (Ha f darab fehér és p darab piros van, akkor a valószínűség $\frac{f^2+p^2}{(f+p)^2} \geq \frac{1}{2}$)

(86) Árpád és Eszter teniszeznek. Árpád 0,4, Eszter 0,6 valószínűséggel nyer meg egy játszmát. Összesen három játszmát játszanak, és az a győztes, aki több játszmát nyer meg. Mennyi annak a valószínűsége, hogy Eszter nyeri a játékot?

- (87) ★ Egy cinkelt dobókockával a 6-os dobás valószínűsége $\frac{1}{3}$, a többi dobás valószínűsége azonos. Mennyi a valószínűsége annak, hogy ezt a dobókockát kétszer feldobva a dobott számok összege 5?
- (88) ♠ Egy szabályos érmével addig dobunk, míg egymás után azonos eredményeket nem kapunk. Adjuk meg ennek a kísérletnek egy valószínűségi modelljét! ($\Omega = \{II, FF, IFF, FII, FIIF, \dots\}$, $\mathcal{A} = 2^\Omega$, egy k -hosszúságú elemi esemény valószínűsége $\frac{1}{2^k}$) Mennyi a valószínűsége annak, hogy legfeljebb 6 dobásra van szükség? $\left(\frac{31}{32}\right)$

Geometriai valószínűségek

- (89) Egy egységnyi hosszúságú szakaszt két ponttal három szakaszra bontunk fel. Mennyi a valószínűsége, hogy lehet háromszöget szerkeszteni a kapott darabokból? $\left(\frac{1}{4}\right)$
- (90) ♠ Hajótöröttek egy lakatlan, növényzet nélküli szigeten azt tervezik, hogy a viharban zátonyra futott eredeti vitorlás hajójuk darabjaiból új, kisebb hajót építenek. A vihar az árbocot véletlenszerűen három darabra törte. Tudjuk, hogy ha az eredeti 40m hosszú árbocnak maradt egy legalább 20m-es darabja, akkor a hajó megépíthető. Mi a valószínűsége, hogy amikor visszaúsznak a hajóroncsához, talál-
nak ilyen darabot? $\left(\frac{3}{4}\right)$
- (91) ♠ Véletlenszerűen kiválasztunk két, 0 és 1 közé eső valós számot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy
- (a) a kiválasztott számok összege kisebb, mint $3/2$? $\left(\frac{7}{8}\right)$
- (b) a kiválasztott számok szorzata kisebb, mint $1/4$? $\left(\frac{1+\ln 4}{4}\right)$
- (92) ★ Válasszunk ki két számot a $[0,1]$ intervallumban egymástól függetlenül és véletlenszerűen (azaz egyenletes eloszlással). Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott számok mértani közepe kisebb mint $\frac{1}{2}$? $\left(\frac{1+\ln 4}{4}\right)$
- (93) Mennyi a valószínűsége, hogy valamely, találmra kiválasztott, az egységnél rövidebb élhosszúságú téglatest testátlója az egységnél kisebb? $\left(\frac{\pi}{6}\right)$
- (94) ♠ Két egyetemista megbeszéli, hogy délután 2 és 4 óra között találkoznak. Érkezésük a megbeszélte időintervallumban véletlenszerű.
- (a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a korábban érkezőnek nem kell fél óránál többet várnia a később érkezőre?
- (b) Tegyük fel, hogy, érkezés után 20 percet várnak, majd elmennek. Mennyi ekkor annak a valószínűsége hogy találkoznak?

Feltételes valószínűségek

(95) ♠ Legyen $P(A) = 1/4$, $P(A | B) = 1/4$ és $P(B | A) = 1/2$. Számítsuk ki a $P(A \cup B)$ és $P(\bar{A} | \bar{B})$ valószínűségeket! $(P(A \cup B) = \frac{5}{8}, P(\bar{A} | \bar{B}) = \frac{3}{4})$

(96) ♠ Három szabályos kockával dobunk. Tekintsük az

$$A = \{\text{legalább egy 6-os van}\} \quad \text{és} \quad B = \{\text{különbözők a számok}\}$$

eseményeket. Határozza meg a $P(A)$ és $P(A | B)$ valószínűségeket! $(P(A) = 1 - (\frac{5}{6})^3 \approx 0.4213,$
 $P(A | B) = 1 - \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{1}{2})$

(97) ♠ Két szabályos kockával dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 7? Mennyi a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 7, feltéve, hogy a dobott számok összege páratlan? $(\frac{1}{6}, \text{ illetve } \frac{1}{3})$

(98) Két játékos, A és B a következő játékszabályok alapján játszik. A feldob egy szabályos dobókockát, azután pedig két érmét annyszor dob fel, ahányat a kockával dobott. Ha e dobások során legalább egyszer két fejet dobott, akkor B fizet A -nak 1 Ft-ot, ellenkező esetben A fizet B -nek 1 Ft-ot. Melyiküknek előnyös a játék (a játék annak előnyös, akinek nagyobb a nyerési valószínűsége)? $(A\text{-nak előnyös a játék, mert } A \text{ nyerési valószínűsége } \frac{1}{2} (1 + (\frac{3}{4})^6) > \frac{1}{2})$

(99) Két város között a távíró összeköttetés olyan, hogy a leadott távírójelek közül a pontok $\frac{2}{5}$ része vonallá torzul, a vonalak $\frac{1}{3}$ része pedig ponttá torzul. A leadott jelek $\frac{5}{8}$ része pont. Mennyi a valószínűsége annak, hogy ha a vevő oldalon pontot kapnak, akkor az adó pontot továbbított? $(\frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{8}}{\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{8} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8}} = \frac{3}{4})$

(100) ♠ Egy dobozban két fehér és két piros golyó van. Összekeverés után kihúzzunk két golyót visszatevés nélkül, és áttesszük azokat egy kalapba. Ezután összekeverés után kihúzzunk egy golyót a kalapból. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kalapban maradt másik golyó piros, ha a kalapból kihúzott golyó fehér? $(\frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \frac{1}{6}} = \frac{2}{3})$

(101) ♠ Egy dobozban egy golyó van, ami (egyenlő valószínűséggel) fehér vagy fekete. Beteszünk a dobozba egy fehér golyót, és összekeverés után kihúzzunk egy golyót. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az urnában eredetileg fehér golyó volt, ha a kihúzott golyó fehér? $(\frac{1 \cdot \frac{1}{2}}{1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{2}{3})$

(102) Egy dobozban N darab fehér és M darab piros golyó van. Valaki találomra kivesz egy golyót, amelynek nem tudjuk a színét. Ezután visszatevés nélkül kihúzzunk két golyót, melyek fehéreknek bizonyulnak. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a legelsőnek kivett golyó is fehér volt?

$$\left(\frac{\frac{\binom{N-1}{2}}{\binom{N+M-1}{2}} \cdot \frac{N}{N+M}}{\frac{\binom{N-1}{2}}{\binom{N+M-1}{2}} \cdot \frac{N}{N+M} + \frac{\binom{N}{2}}{\binom{N+M-1}{2}} \cdot \frac{M}{N+M}} = \frac{N-2}{N+M-2} \right)$$

(103) Két érménk van: egy szabályos és egy „cinkelt”, aminél a fej valószínűsége kétszer akkora, mint az írásé. Kiválasztunk egyet a két érme közül egyenlő valószínűséggel és azt feldobjuk. Mi a valószínűsége, hogy a cinkelt érmével dobtunk, ha az eredmény fej lett? $(\frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{4}{7})$

Valószínűségi változók, eloszlásaik, várható érték, variancia

- (104) ♠ Egy ξ diszkrét valószínűségi változó lehetséges értékei $1, 2, \dots, 10$, eloszlása

$$P(\xi = j) = a \cdot j, \quad j = 1, 2, \dots, 10,$$

ahol a alkalmas valós szám. Határozza meg a értékét! $\left(\frac{1}{55}\right)$ Milyen k pozitív egészekre teljesül $P(\xi \leq k) \leq \frac{1}{2}$? ($k \leq 6$)

- (105) ♠ Egy részvény kiinduló ára egy peták. Egy év múlva vagy kétszeresére növekszik az ára, vagy pedig felére csökken. Mindkét lehetőség ugyanolyan valószínűségű. A következő két évben ugyanez történik, és a változások függetlenek. Mi lesz három év múlva a részvényár eloszlása? (Azaz milyen értékeket vehet fel milyen valószínűséggel?) (Lehetséges értékek: $\frac{1}{8}, \frac{1}{2}, 2, 8$; a hozzátartozó valószínűségek: $\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}$)

- (106) ♠ Mi a lottón kihúzott öt szám közül a legkisebbnek, illetve a legnagyobbak az eloszlása? (A legkisebb kihúzott szám eloszlása: $\frac{\binom{90-k}{4}}{\binom{90}{5}}$, $k = 1, \dots, 86$, a legnagyobb kihúzott szám eloszlása: $\frac{\binom{k-1}{4}}{\binom{90}{5}}$, $k = 5, \dots, 90$.)

- (107) ♠ Egy szabályos dobókockát feldobunk. Az eredményt jelölje ξ . Határozza meg az $E(\sqrt{\xi})$ várható értéket! $\left(E(\sqrt{\xi}) = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^6 \sqrt{k}\right)$

- (108) ♠ Legyen a ξ valószínűségi változó egyenletes eloszlású a $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ halmazon, és legyen $\eta := \xi^3$. Milyen értékeket és milyen valószínűséggel vesz fel η ? Határozza meg η várható értékét, varianciáját! (Az η egyenletes eloszlású a $\{-8, -1, 0, 1, 8, 27\}$ halmazon, $E\eta = \frac{9}{2}$, $\text{var } \eta = \frac{1475}{12}$.)

- (109) Legyen a ξ valószínűségi változó egyenletes eloszlású a $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ halmazon, és legyen $\eta := \xi^2$. Milyen értékeket és milyen valószínűséggel vesz fel η ? Határozza meg η várható értékét, varianciáját! (Az η lehetséges értékei $0, 1, 4, 9$; a hozzátartozó valószínűségek $\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{2}{6}, \frac{1}{6}$; $E\eta = \frac{19}{6}$, $\text{var } \eta = \frac{329}{36}$.)

- (110) Egy részvény kiinduló ára egy peták. Egy év múlva vagy kétszeresére növekszik az ára, vagy felére csökken, vagy pedig változatlan marad. Mindegyik lehetőség ugyanolyan valószínűségű. A következő évben ugyanez történik, az első évi változástól függetlenül. Mi lesz két év múlva a részvényár eloszlása? (Azaz milyen értékeket vehet fel milyen valószínűséggel?) Mennyi két év múlva a részvényár várható értéke? (Lehetséges értékek: $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4$; a hozzátartozó valószínűségek: $\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{3}{9}, \frac{2}{9}, \frac{1}{9}$; a várható érték $\frac{49}{36}$)

- (111) ♠ Az A és B játékosok a következő játékot játsszák. Az A feldob egy szabályos dobókockát és annyit fizet B -nek, amennyi a dobás eredménye. A B feldob egy szabályos érmét, és ha fej, akkor x forintot fizet A -nak, ha írás, akkor $2x$ forintot fizet A -nak. Mennyi x , ha a játék igazságos abban az értelemben, hogy A illetve B nyereseményének várható értéke 0? ($x = \frac{7}{3}$)

- (112) Határozzuk meg egy lottóhúzás során kihúzott legkisebb, illetve legnagyobb szám várható értékét! (A legkisebb kihúzott szám várható értéke: $\frac{91}{6}$, a legnagyobb kihúzott szám várható értéke: $5\frac{91}{6}$)
- (113) ★ Egy urnában N cédula van, melyek meg vannak számozva 1-től N -ig. Kihúzzunk k cédulát visszatevés nélkül. Határozzuk meg a legnagyobb kihúzott szám eloszlását és várható értékét. (A lehetséges értékek $k, k+1, \dots, N$, a hozzátartozó valószínűségek $\frac{\binom{k-1}{N-1}}{\binom{k}{N}}, \frac{\binom{k}{N-1}}{\binom{k+1}{N}}, \dots, \frac{\binom{N-1}{N-1}}{\binom{N}{N}}$, a várható érték $\frac{k}{k+1} \cdot (N+1)$.)
- (114) ♠ Legyen ξ binomiális eloszlású valószínűségi változó $(5, \frac{1}{3})$ paraméterekkel. Határozza meg a $P(\xi = 2)$ és $P(-5 < \xi \leq -2)$ valószínűségeket!

$$\left(P(\xi = 2) = \binom{5}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{80}{243}, \quad P(-5 < \xi \leq -2) = 0 \right)$$
- (115) ♠ Egy szabályos dobókockával tizenkétszer dobunk. Jelölje ξ a hármas dobások számát. Határozza meg ξ várható értékét! $\left(P(\xi = k) = \binom{12}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{12-k}$ ha $k = 0, 1, \dots, 12$ binomiális eloszlású, ezért $E\xi = 12 \cdot \frac{1}{6} = 2$)
- (116) ★ Csavarokat gyártó automata esztergagépen a selejtes csavar valószínűsége 0.01. Mi a valószínűsége, hogy a beindított gép
 (a) már elsőre selejtes csavart gyárt? (0.01)
 (b) csak másodikra gyárt selejtes csavart? $(0.99 \cdot 0.01)$
 (c) legfeljebb az első tíz csavar után gyártja az első selejteset? (0.99^{10})
 (d) a tizedik csavar lesz a második selejtes? $\left(\binom{9}{1} 0.01^2 0.99^8 \right)$
 (e) legfeljebb az első 10 csavar után készül el a második selejtes? $\left(0.99^9 (10 - 9 \cdot 0.99) \right)$
- (117) ♠ Egy üzemben elektromos biztosítékokat gyártanak. A tapasztalat szerint átlagban ezek 12%-a hibás. A hibás biztosítékok száma binomiális eloszlású. Számítsuk ki annak valószínűségét, hogy 10 darab véletlenszerűen kiválasztott biztosíték között
 (a) nincs selejtes; (0.88^{10})
 (b) legalább egy selejtes van; $(1 - 0.88^{10})$
 (c) nincs 1-nél több selejtes. $(0.88^{10} + 10 \cdot 0.12 \cdot 0.88^9)$
- (118) ★ Egy életbiztosító társaságnak a többi között 10000 olyan biztosítottja van, akik egyforma korúak és szociális helyzetűek. Annak valószínűsége, hogy egy ilyen személy az év folyamán meghal, 0,002. A biztosítottak egymástól függetlenül halnak meg. Minden biztosított január 1-én 12 Ft-ot fizet be, halála esetén hozzátartozóik 4000 Ft-ot kapnak. Mekkora a valószínűsége, hogy
 (a) a társaságnak nem lesz nyeresége; $\left(\sum_{k=30}^{10000} \binom{10000}{k} 0.002^k \cdot 0.998^{10000-k}; \text{Poisson-eloszlással közelítve: } \sum_{k=30}^{10000} \frac{20^k}{k!} \cdot e^{-20} \approx 0.0218; \right)$

(b) legalább 40 000 Ft-ja megmarad? $\left(\sum_{k=20}^{10000} \binom{10000}{k} 0.002^k \cdot 0.998^{10000-k}; \text{Poisson-eloszlással közelítve: } \sum_{k=20}^{10000} \frac{20^k}{k!} \cdot e^{-20} \approx 0.5590; \right)$

(A biztosítottak között a halálozások száma egy év alatt binomiális eloszlású, hiszen egymástól függetlenül halnak meg.)

- (119) ★ Annak valószínűsége, hogy egy diákszálló valamelyik lakója valamelyik napon beteg lesz, és a betegszobában ágyat foglal el: 0,002. A diákok egymástól függetlenül betegednek meg. Ha 1200 lakója van a diákszállónak, hány ágyas betegszobát kell berendezni, hogy legfeljebb 1% legyen annak valószínűsége, hogy egy beteg nem kap ágyat? A betegek száma binomiális eloszlású, mivel a diákok egymástól függetlenül betegednek meg. A szükséges ágyszám olyan n , melyre $\sum_{k=n+1}^{1200} \binom{1200}{k} 0.002^k \cdot 0.998^{1200-k} \leq 0.01$. Poisson-eloszlással közelítve: $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{2.4^k}{k!} \cdot e^{-2.4} \leq 0.01$. Ennek $n = 7$ már megfelel, $n = 6$ még nem.

- (120) ♠ Egy augusztusi éjszakán átlag 10 percenként észlelhető csillaghullás (a csillaghullások száma Poisson eloszlású). Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy negyedóra alatt két csillaghullást látunk? $\left(\frac{1.5^2}{2!} e^{-1.5} \approx 0.2510 \right)$

- (121) ♠ Eloszlásfüggvények-e a következő függvények?

(a) $F(x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2\pi} \arctan(x)$, $x \in \mathbb{R}$. (Nem)

(b) $F(x) = e^{-e^{-x}}$, $x \in \mathbb{R}$. (Igen)

- (122) ♠ Definiáljuk a ξ valószínűségi változó eloszlását a következőképpen:

$$\xi = \begin{cases} 1 & \frac{1}{4} \text{ valószínűséggel,} \\ 2 & \frac{1}{3} \text{ valószínűséggel,} \\ 3 & \frac{1}{4} \text{ valószínűséggel,} \\ 4 & \frac{1}{6} \text{ valószínűséggel.} \end{cases}$$

Adjuk meg ξ eloszlásfüggvényét (készítsünk ábrát is)!

- (123) ♠ Az alábbi függvények közül melyek sűrűségfüggvények?

(a)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{2} & \text{ha } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases} \quad (\text{Nem})$$

(b)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{ha } x \geq 1, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases} \quad (\text{Igen})$$

- (124) ♠ Egy ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 2, \\ \frac{a}{x^3} & \text{ha } x > 2. \end{cases}$

Határozza meg az a együttható értékét! Számítsa ki, hogy milyen x értéknél lesz $P(\xi \geq x) = \frac{1}{2}$? ($a = 8$, $x = 2\sqrt{2}$)

- (125) Válasszunk a $[0,1]$ intervallumon egyenletes eloszlással egy pontot. Jelölje ξ a pont távolságát a $[0,1]$ intervallum közelebbi végpontjától. Határozza meg ξ eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét!

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0, \\ 2x & \text{ha } 0 < x \leq \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{ha } x > \frac{1}{2}, \end{cases} \quad f_{\xi}(x) = \begin{cases} 2 & \text{ha } 0 < x < \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

(Tehát ξ egyenletes eloszlású a $(0, \frac{1}{2})$ intervallumon.)

- (126) ♠ Legyen ξ egyenletes eloszlású az $[1,2]$ intervallumon. Határozza meg az $E(\sqrt{\xi})$ várható értéket! $(\frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1))$
- (127) Legyen ξ abszolút folytonos eloszlású valószínűségi változó, sűrűségfüggvénye:

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} & \text{ha } x \geq 0, \\ 0 & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

Határozzuk meg ξ szórásnégyzetét! $(1 - \frac{2}{\pi})$

- (128) ♠ Legyen ξ egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $[0,1]$ intervallumon. Határozza meg a $P(\xi = \frac{1}{3})$ és $P(-\frac{1}{2} < \xi < \frac{3}{4})$ valószínűségeket! $(P(\xi = \frac{1}{3}) = 0, \quad P(-\frac{1}{2} < \xi < \frac{3}{4}) = \frac{3}{4})$

- (129) ♠ Valaki egy sürgős telefonhívást vár. A hívás időpontja egy reggel 8 órakor kezdődő, ismeretlen hosszúságú intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó. A hívást váró fél tudja, hogy a hívás 80% valószínűséggel 8 és 10 óra között befut.

(a) Állapítsuk meg, mekkora annak valószínűsége, hogy a hívás 1/2 10 és 10 óra között érkezik.

(b) A hívás 1/2 10-ig nem jött be. Mennyi a valószínűsége, hogy 1/2 10 és 10 óra között még befut?

(Jelölje ξ a hívás időpontját. Ez a $(8, b)$ intervallumon egyenletes eloszlású. Mivel $P(8 \leq \xi \leq 10) = \frac{2}{b-8} = 0.8$, ezért $b = 10.5$. Így $P(9.5 \leq \xi \leq 10) = 0.2$, $P(9.5 \leq \xi \leq 10 \mid \xi \geq 9.5) = 0.5$.)

- (130) ♠ Legyen ξ exponenciális eloszlású valószínűségi változó $\lambda = 5$ paraméterrel. Határozza meg a $P(\xi = 3)$ és $P(-2 < \xi < 1)$ valószínűségeket! $(P(\xi = 3) = 0, \quad P(-2 < \xi < 1) = 1 - e^{-5})$

- (131) ♠ Annak valószínűsége, hogy egy benzinkútnál a tankolásra 6 percnél többet kell várni, a tapasztalatok szerint 0.1. A várakozási idő hossza exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Mennyi a valószínűsége, hogy véletlenszerűen a benzinkúthoz érkezve 3 percn belül sorra kerülünk? (Jelölje ξ a várakozási idő hosszát. Mivel $P(\xi > 6) = e^{-6\lambda} = 0.1$, így $P(\xi < 3) = 1 - e^{-3\lambda} = 1 - \sqrt{0.1} \approx 0.68$)

- (132) ♠ Legyen ξ standard normális eloszlású valószínűségi változó. Határozza meg a $P(\xi = \pi)$, $P(\xi > 0)$, és $P(\xi \geq 0)$ valószínűségeket! $(P(\xi = \pi) = 0, \quad P(\xi > 0) = \frac{1}{2}, \quad P(\xi \geq 0) = \frac{1}{2})$

- (133) ♠ Legyen ξ normális eloszlású valószínűségi változó $(1, 4)$ paraméterekkel. Határozza meg a $P(\xi = \pi)$, $P(\xi > 1)$, és $P(\xi \geq 1)$ valószínűségeket! $(P(\xi = \pi) = 0, \quad P(\xi > 1) = \frac{1}{2}, \quad P(\xi \geq 1) = \frac{1}{2})$

- (134) ♠ Tegyük fel, hogy bizonyos fajta izzólámpák "élettartama" normális eloszlású, $m = 1000$ óra várható értékkel és $\sigma = 100$ óra szórással. Számítsuk ki, hogy az első 900 órában a lámpák hány százaléka megy tönkre. (Jelölje ξ az izzólámpa élettartamát. Mivel $P(\xi < 900) = P\left(\frac{\xi - 1000}{100} < -1\right) = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) \approx 0.8413$, ezért az első 900 órában a lámpák közelítőleg 0.1587 százaléka megy tönkre.)
- (135) A tejjacskóba névlegesen 1 liter tejet töltő gép átlagos hibája (szórása) 0,2 dl. A betöltött tej mennyisége normális eloszlású.
- Mekkora annak a valószínűsége, hogy a zacskóban levő tej legalább 0,5 dl-el tér el az előírttól?
 - Mekkora eltérést várhatunk 90%-os valószínűséggel?
- (136) ♠ Egy embercsoport magasságainak átlaga 175 cm, 4 cm-es szórással. A testmagasság nagysága normális eloszlásúnak tekinthető.
- Mennyi a valószínűsége, hogy egy találmányra kiválasztott ember testmagassága az átlagtól kevesebb, mint 3 cm-el tér el?
 - Mennyi a valószínűsége, hogy egy kiválasztott ember testmagassága legalább 173 cm?
 - Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott ember testmagassága 173 cm és 177 cm közé esik?
- (137) Egy csomagológép 1 kg tömegű sajtot csomagol. A sajtok tömege normális eloszlásúnak tekinthető, melynek szórása 5 dkg. Mennyi a valószínűsége, hogy egy sajtdarab súlya
- 96 dkg-nál több;
 - 1,05 kg-nál kevesebb;
 - 98 dkg és 1,02 kg közé esik?
- (138) Egy csomagológép 0,5 kg tömegű margarint csomagol. A margarin tömege normális eloszlásúnak tekinthető, melynek szórása 3 dkg. Mennyi a valószínűsége, hogy egy margarin súlya
- 40 dkg-nál több;
 - 55 kg-nál kevesebb;
 - 40 dkg és 60 kg közé esik;
 - nem tér el a várható értéktől a szórásnál jobban?
 - A várható érték körül milyen határok között mozog a margarin súlya 0,95 valószínűséggel?
- (139) ♠ Legyen ξ egyenletes eloszlású a $(-5, 7)$ intervallumon. Legyen $\eta := \xi^3$. Határozza meg η eloszlásfüggvényét, sűrűségfüggvényét és várható értékét.

$$F_{\eta}(y) = \begin{cases} 0 & \text{ha } y \leq (-5)^3, \\ \frac{\sqrt[3]{y} + 5}{12} & \text{ha } (-5)^3 < y \leq 7^3, \\ 1 & \text{ha } y > 7^3, \end{cases} \quad f_{\eta}(y) = \begin{cases} \frac{1}{36x^{2/3}} & \text{ha } (-5)^3 < y < 7^3, \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$$

$$E\eta = \frac{1}{12} \int_{-5}^7 x^3 dx = \frac{1776}{48} \quad \text{vagy} \quad E\eta = \frac{1}{36} \int_{(-5)^3}^{7^3} \sqrt[3]{y} dy = \frac{1776}{48}$$

- (140) Mennyi egy egységnyezetben egyenletes eloszlással választott véletlen pont legközelebbi oldaltól való távolságának várható értéke? Mennyi ugyanez egy egységkockában? $\left(\frac{1}{6}, \text{ illetve } \frac{1}{8}\right)$
- (141) ♠ A (ξ, η) kétdimenziós valószínűségi vektorváltozó együttes eloszlását a következő kontingencia táblázat tartalmazza:

$\xi \backslash \eta$	-1	0	1
-1	p	$3p$	$6p$
1	$5p$	$15p$	$30p$

- (a) Mennyi p értéke? $(p = \frac{1}{60})$
- (b) Adjuk meg a peremeloszlásokat! $\left(P(\xi = -1) = \frac{10}{60}, P(\xi = 1) = \frac{50}{60}, P(\eta = -1) = \frac{6}{60}, P(\eta = 0) = \frac{18}{60}, P(\eta = 1) = \frac{36}{60}\right)$
- (c) Független-e ξ és η ? (igen)
- (d) Adjuk meg $\xi + \eta$ eloszlását! $\left(P(\xi + \eta = -2) = \frac{1}{60}, P(\xi + \eta = -1) = \frac{3}{60}, P(\xi + \eta = 0) = \frac{11}{60}, P(\xi + \eta = 1) = \frac{15}{60}, P(\xi + \eta = 2) = \frac{30}{60}\right)$
- (142) ♠ A (ξ, η) kétdimenziós valószínűségi vektorváltozó lehetséges értékeit és a megfelelő valószínűségeket az alábbi táblázatban adjuk meg:

$\xi \backslash \eta$	-2	0	1
-1	p	$3p$	p
0	$2p$	p	p
2	p	p	$4p$

Határozza meg p értékét! Számítsa ki a ξ, η eloszlását, várható értéküket és varianciájukat, továbbá $\zeta = \xi \cdot \eta$ eloszlását, várható értékét és $\text{cov}(\xi, \eta)$ értékét.

- (143) ♠ Válasszunk ki egy pontot véletlenszerűen a $\{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (2, 0)\}$ halmazból úgy, hogy mindegyik pont ugyanolyan valószínűséggel kerül kiválasztásra. Jelölje a kiválasztott pontot (ξ, η) . Határozza meg ξ és η várható értékét és a $\text{cov}(\xi, \eta)$ kovarianciát. $\left(E\xi = E\eta = \frac{2}{3}, \text{cov}(\xi, \eta) = -\frac{5}{18}\right)$ Függetlenek-e a ξ és az η valószínűségi változók? (Nem)

- (144) Két szabályos pénzérme egyik oldalára nullát, a másikra egyet írunk. A két érmét feldobjuk. A ξ valószínűségi változó jelentse a dobott számok összegét, az η valószínűségi változó pedig a a dobott számok szorzatát. Számítsuk ki ξ és η korrelációs együtthatóját! $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$
- (145) Két szabályos kockával dobunk. A ξ valószínűségi változó legyen ahány páros szám szerepel a dobások között, az η valószínűségi változó pedig ahány hatost dobunk. Számítsuk ki ξ és η korrelációs együtthatóját. $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$
- (146) A (ξ, η) kétdimenziós valószínűségi változó lehetséges értékeit a $P_1(0, 0)$, $P_2(0, 4)$, $P_3(4, 4)$ és $P_4(4, 0)$ pontok által meghatározott négyzet **belsejében** levő egész koordinátájú pontok alkotják. A (ξ, η) e pontokat egyenlő valószínűséggel veszi fel — a négyzet középpontja kivételével, amely négyszer akkora valószínűséggel következik be, mint a többi. Számítsa ki a ξ és η korrelációs együtthatóját! Állapítsa meg, hogy függetlenek-e a ξ és az η valószínűségi változók? (A korrelációs együttható 0, tehát korrelálatlanok, de nem függetlenek.)
- (147) Legyenek ξ és η független valószínűségi változók, $E\xi = E\eta = 3$, $\text{var}\xi = \text{var}\eta = 9$. Határozza meg $\text{corr}(\xi + \eta, \xi\eta)$ értékét! $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$
- (148) ★ Határozza meg a c konstans értékét úgy, hogy az

$$f(x, y) = \begin{cases} c \cdot (x + y) & \text{ha } x, y \in [0, 1], \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

függvény sűrűségfüggvény legyen! Határozza meg a koordináták korrelációs együtthatóját! ($c = 1$, a korrelációs együttható $-\frac{1}{11}$.)

- (149) ★ Határozza meg a c konstans értékét úgy, hogy az

$$f(x, y) = \begin{cases} c \cdot (x^2 + y^2) & \text{ha } x, y \in [0, 1], \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

függvény sűrűségfüggvény legyen! Határozza meg a koordináták korrelációs együtthatóját! ($c = \frac{3}{2}$, a korrelációs együttható $-\frac{15}{73}$.)

- (150) ★ Két darab egységnyi hosszúságú botot véletlenszerűen eltörünk, és a keletkezett rövidebb darabokat összeragasztjuk. Mennyi az így kapott bot hosszának eloszlásfüggvénye, sűrűségfüggvénye és várható értéke?

$$\left(F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0, \\ 2x^2 & \text{ha } 0 < x \leq \frac{1}{2}, \\ 1 - 2(1 - x)^2 & \text{ha } \frac{1}{2} < x \leq 1, \\ 1 & \text{ha } x > 0, \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} 4x & \text{ha } 0 < x \leq \frac{1}{2}, \\ 4(1 - x) & \text{ha } \frac{1}{2} < x \leq 1, \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases} \right.$$

a várható érték $\frac{1}{2}$)

Medián, módusz, kvantilisek

- (151) ♠ Egy szabályos érmét háromszor feldobunk egymás után, jelölje ξ az írások számát! Határozzuk meg ξ mediánját, móduszát és 0.25-kvantilisét! (Módusz: 1 és 2, medián: $[1, 2]$, 0.25-kvantilis: 1)

- (152) Egy irodában 3 telefonkészülék van beszerelve. Annak a valószínűsége, hogy valamelyik készüléken egy órán belül hívás fut be rendre 0.7, 0.4 és 0.6. A ξ valószínűségi változó jelentse, hogy egy órán belül hány készüléken jön hívás. Határozzuk meg ξ mediánját, móduszát és 0.1-kvantilisét! (Módusz: 2, medián: 2, 0.1-kvantilis: 1)

- (153) Legyenek a ξ valószínűségi változó lehetséges értékei $1, 2, 3, \dots$, eloszlása

$$P(\xi = k) = \frac{1}{k(k+1)}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Határozzuk meg ξ mediánját, móduszát és 0.9-kvantilisét! (Módusz: 1, medián: $[1, 2]$, 0.9-kvantilis: $[1, 2]$)

- (154) Legyen a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye:

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 3^{x-2} & \text{ha } x \leq 1, \\ \frac{x+6}{10} & \text{ha } 1 < x \leq \frac{3}{2}, \\ \frac{3}{4} & \text{ha } \frac{3}{2} < x \leq 2, \\ 1 - 2^{-x} & \text{ha } 2 < x. \end{cases}$$

Határozzuk meg ξ mediánját és interkvartilisét! (Medián: 1, interkvartilis: $[\frac{2 \ln 2}{\ln 3} - \frac{1}{2}, \frac{2 \ln 2}{\ln 3}]$)

- (155) ♠ Legyen a ξ valószínűségi változó egyenletes eloszlású a $[0, 1]$ intervallumon, és legyen $\eta := \sqrt{\xi}$. Határozza meg η várható értékét, mediánját, interkvartilisét! ($E \eta = \frac{2}{3}$, az η mediánja $\frac{\sqrt{2}}{2}$, interkvartilise $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.)

- (156) Legyen a ξ valószínűségi változó egyenletes eloszlású a $[0, 1]$ intervallumon, és legyen $\eta := \xi^2$. Határozza meg η várható értékét, mediánját, interkvartilisét! ($E \eta = \frac{1}{8}$, az η mediánja $\frac{1}{4}$, interkvartilise $\frac{1}{2}$.)

- (157) ♠ Legyen ξ abszolút folytonos eloszlású valószínűségi változó, sűrűségfüggvénye

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{x^2}{2}} & \text{ha } x > 0, \\ 0 & \text{ha } x \leq 0. \end{cases}$$

Határozzuk meg ξ mediánját! ($\sqrt{\ln 4}$)

- (158) Határozza meg a λ -paraméterű exponenciális eloszlás mediánját és interkvartilisét! (Medián: $\frac{\ln 2}{\lambda}$, interkvartilis: $\frac{\ln 3}{\lambda}$.)

- (159) Határozza meg az $[a, b]$ intervallumon egyenletes eloszlás ferdeségét és lapultságát! (A ferdeség 0, a lapultság $-\frac{6}{5}$.)

- (160) Határozza meg a λ -paraméterű exponenciális eloszlás ferdeségét és lapultságát! (A ferdeség 2, a lapultság 6.)