

DEFINÍCIÓK

A legfontosabb definíciókat ♣ jelöli.

- [üres halmaz] Azt a halmazt melynek egyetlen eleme sincs *üres halmaznak* nevezzük és $\emptyset$ -tel jelöljük.
- [halmazok egyenlősége] Az A és B halmazokat *egyenlőnek* nevezzük, ha elemei ugyanazok. Ezt $A = B$ -vel jelöljük, tagadását $A \neq B$ jelöli.
- [részhalmaz] Azt mondjuk, hogy az A halmaz *részhalmaza* a B halmaznak, ha A minden eleme eleme B -nek. Jelölése: $A \subset B$. Ezt úgy is írhatjuk, hogy $B \supset A$, ezt úgy olvassuk, hogy B tartalmazza az A halmazt. Az A halmaz *valódi részhalmaza* a B halmaznak, ha $A \subset B$ és $A \neq B$.

- [műveletek halmazokkal] Célszerű a vizsgált halmazokat egy X alaphalmaz részhalmazainak tekinteni.

$A \cup B := \{ x \in X : x \in A \text{ vagy } x \in B \}$ az A és B halmazok uniója vagy egyesítése

$A \cap B := \{ x \in X : x \in A \text{ és } x \in B \}$ az A és B halmazok metszete vagy közös része

$A \setminus B := \{ x \in X : x \in A \text{ és } x \notin B \}$ az A és B halmazok különbsége

$\overline{A} := X \setminus A$ az A halmaz komplementere

$\cup, \cap, \setminus$ binér (kétváltozós) műveletek, a komplementerképzés unér (egyváltozós) művelet.

- [diszjunkt halmazok] Az A és B halmazokat *diszjunkt*nak nevezzük, ha metszetük üres.
- [halmazrendszer] *Halmazrendszer* (vagy halmazcsalád) alatt olyan (nemüres) halmazt értünk, melynek elemei halmazok.
- [indexelt halmazrendszer] Ha I egy (nemüres) halmaz és minden $i \in I$ elemhez meg van adva egy A_i -vel jelölt halmaz, akkor az

$$\mathcal{A} = \{ A_i : i \in I \}$$

halmazrendszert I -vel *indexelt halmazrendszernek* nevezzük, I neve *indexhalmaz*.

- [halmazrendszer uniója, metszete] Egy $\mathcal{R}$ halmazrendszer unióját és metszetét

$$\bigcup \mathcal{R} := \{ x : \exists A \in \mathcal{R} \text{ úgy hogy } x \in A \}, \quad \bigcap \mathcal{R} := \{ x : \forall A \in \mathcal{R} \text{ mellett } x \in A \}$$

definiálja.

- ♣ [halmazok Descartes szorzata] Az A és B halmazok *Descartes szorzatán* (vagy direkt szorzatán) a halmazok elemeiből képezett összes (a, b) *rendezett párok* halmazát értjük, ahol $a \in A, b \in B$. Jelölésére az $A \times B$ szimbólumot használjuk.

- ♣ [(binér) reláció] Az A és B halmazok Descartes szorzatának egy $R \subset A \times B$ részhalmazát az A és B halmazok közötti *(binér) relációnak* nevezzük. Ha $(a, b) \in R$ akkor azt mondjuk, hogy az a *elem* R *relációban van* b -vel. Ezt szokás $a R b$ -rel is jelölni.

$A = B$ esetén az A és B közötti relációt A -n *értelmezett relációnak* mondjuk.

- ♣ [ekvivalencia reláció] Az A halmazon értelmezett $R \subset A \times A$ relációt *ekvivalencia relációnak* nevezzük, ha R

– *reflexív*, azaz $(\forall a \in A) a R a$,

- *szimmetrikus*, azaz $(\forall a, b \in A) a R b \implies b R a$,
- *transzitiv*, azaz $(\forall a, b, c \in A) a R b \wedge b R c \implies a R c$.

- ♣[**féligrendezés, rendezés**] Az A halmazon értelmezett $R \subset A \times A$ relációt *féligrendezésnek* nevezzük, ha R
 - *reflexív*, azaz $(\forall a \in A) a R a$,
 - *antiszimmetrikus*, azaz $(\forall a, b \in A) a R b \wedge b R a \implies a = b$,
 - *transzitiv*, azaz $(\forall a, b, c \in A) a R b \wedge b R c \implies a R c$.

Az A halmazon értelmezett $R \subset A \times A$ relációt *rendezésnek* nevezzük, ha R féligrendezés, és

$$(\forall a, b \in A) a R b \vee b R a.$$

- [balmazok korlátosság] Tekintsük a valós számok $\mathbb{R}$ halmazát a $\leq$ rendezéssel és legyen $A \subset \mathbb{R}$.
 - Az A halmazt *felülről korlátosnak* nevezzük, ha van olyan $k \in \mathbb{R}$ szám, hogy $(\forall a \in A) a \leq k$. A k számot A (egy) *felső korlátjának* nevezzük.
 - Az A halmazt *alulról korlátosnak* nevezzük, ha van olyan $k' \in \mathbb{R}$ szám, hogy $(\forall a \in A) k' \leq a$. A k' számot A (egy) *alsó korlátjának* nevezzük.
 - Az A halmazt *korlátosnak* nevezzük, ha alulról és felülről is korlátos.

- ♣[**pontos felső korlát**] Az $s \in \mathbb{R}$ számot az A halmaz *pontos felső korlátjának* (vagy *suprémumának*) nevezzük, ha
 - s az A felső korlátja
 - A bármely s' felső korlátjára $s \leq s'$.

Jelölés $s = \sup A$.

- ♣[**pontos alsó korlát**] Az $i \in \mathbb{R}$ számot az A halmaz *pontos alsó korlátjának* (vagy *infimumának*) nevezzük, ha
 - i az A alsó korlátja
 - A bármely i' alsó korlátjára $i' \leq i$.

Jelölés $i = \inf A$.

- ♣[**függvény**] Az A és B halmazok között értelmezett $F \subset A \times B$ relációt az A halmazon *definiált függvénynek* nevezzük, ha minden $a \in A$ elemhez pontosan egy olyan $b \in B$ elem létezik, melyre $a F b$ teljesül.

Ilyenkor a $b = F(a)$ jelölést használjuk, a függvény jelölésére pedig $F : A \rightarrow B$ -t használjuk.

$\mathcal{D}_F := A$ az F függvény *értelmezési tartománya* (domain of F).

$\mathcal{R}_F := \{ F(a) : a \in A \}$ az F függvény *értékkészlete* (range of F).

- ♣[**injektív függvény**] Az $F : A \rightarrow B$ függvényt *injektívnek* (vagy kölcsönösen egyértelműnek, invertálhatónak) nevezzük, ha

$$(\forall a, b \in A) a \neq b \implies F(a) \neq F(b),$$

vagy, ami ugyanaz

$$(\forall a, b \in A) F(a) = F(b) \implies a = b.$$

- ♣[**szürjektív függvény**] Az $F : A \rightarrow B$ függvényt *szürjektívnek* (vagy B -re képezőnek) nevezzük, ha $\mathcal{R}_F = B$.
- ♣[**bijektív függvény**] Az $F : A \rightarrow B$ függvényt *bijektívnek* (vagy kölcsönösen egyértelműen B -re képezőnek) nevezzük, ha injektív és szürjektív.

- ♣[inverz függvény] Ha $F : A \rightarrow B$ injektív, akkor az $F^{-1} : \mathcal{R}_F \rightarrow A$ inverz függvényét az alábbi módon értelmezzük: *tetszőleges* $b \in \mathcal{R}_F$ -hez létezik *egyetlen* $a \in A$ úgy, hogy $b = F(a)$, ekkor legyen

$$F^{-1}(b) := a.$$

Röviden, $F^{-1}(b) = a$, ha $F(a) = b$.

- [valós számok] Létezik (bizonyos értelemben *egyértelműen*) egy *teljes rendezett test*, melyet a valós számok testének (halmazának) nevezünk és $\mathbb{R}$ -rel jelölünk.

- [nevezetes halmazok]

- Az $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ halmazt a *természetes számok halmazának* nevezzük.
- A $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$ halmazt az *egész számok halmazának* nevezzük.
- A $\mathbb{Q} = \{pq^{-1} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ halmazt a *racióális számok halmazának* nevezzük.

- [intervallumok] Legyen $a < b$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Az

$$\begin{aligned}]a, b[&:= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \\ [a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \\]a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} \\ [a, b[&:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} \end{aligned}$$

számhalmazokat rendre (véges) *nyílt*, *zárt*, *balról nyílt jobbról zárt*, *balról zárt jobbról nyílt intervallumoknak* nevezzük.

$$[a, a] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq a\} = \{a\}$$

elfajult (egyetlen pontból álló) *zárt intervallum*.

Legyen $a, b \in \mathbb{R}$. Az

$$\begin{aligned}]a, \infty[&:= \{x \in \mathbb{R} : a < x\} \\ [a, \infty[&:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\} \\]-\infty, b] &:= \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\} \\]-\infty, b[&:= \{x \in \mathbb{R} : x < b\} \\]-\infty, \infty[&:= \mathbb{R} \end{aligned}$$

számhalmazokat (végtelen) *nyílt*, *balról zárt jobbról nyílt stb. intervallumoknak* nevezzük.

- [abszolút érték] Az

$$|x| := \begin{cases} x & \text{ha } x \geq 0 \\ -x & \text{ha } x < 0 \end{cases} \quad (x \in \mathbb{R})$$

számot az x valós szám *abszolút értékének* nevezzük.

- [távolság] Az $x, y \in \mathbb{R}$ számok *távolságát* a

$$d(x, y) := |x - y|$$

definiálja.

- [hatvány] Az $x \in \mathbb{R}$ szám egész kitevős hatványait

$$x^1 := x, \quad x^{n+1} := x^n x \quad (n \in \mathbb{N})$$

továbbá

$$x^0 := 1, \quad x^{-n} := \frac{1}{x^n} \quad (x \neq 0, n \in \mathbb{N})$$

-nel értelmezzük.

Ha n páros, $x \geq 0$ akkor $\sqrt[n]{x}$ az egyetlen olyan nempozitív szám melynek n -edik hatványa x , így ekkor

$$y^n = x \iff y = \sqrt[n]{x} \vee y = -\sqrt[n]{x}.$$

Ha n páratlan, akkor negatív számokra is kiterjesztjük az n -edik gyök definícióját:

$$\sqrt[n]{x} := -\sqrt[n]{-x} \quad \text{ha } x < 0.$$

Ezek után lehet a pozitív számok racionális kitevős hatványát értelmezni, az

$$x^r := \sqrt[q]{x^p} \quad \text{ahol } x > 0, r = pq^{-1}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$$

képlettel.

- **[környezet]** Egy $a \in \mathbb{R}$ pont $\varepsilon > 0$ sugarú (nyílt) környezetén a

$$K(a, \varepsilon) := \{ x \in \mathbb{R} : d(x, a) < \varepsilon \}$$

halmazt értjük.

- **♣[halmaz belső, izolált, torlódási, határpontja]** Legyen $A \subset \mathbb{R}$.

- Az $a \in \mathbb{R}$ pontot az A halmaz *belső pontjának* nevezzük, ha a -nak **van** olyan környezete mely (teljesen) A -ban van, azaz

$$(\exists \varepsilon > 0) K(a, \varepsilon) \subset A.$$

- Az $a \in \mathbb{R}$ pontot az A halmaz *izolált pontjának* nevezzük, ha $a \in A$ és a -nak **van** olyan környezete melyben nincs más A -beli pont, azaz

$$a \in A \wedge ((\exists \varepsilon > 0) (K(a, \varepsilon) \setminus \{a\}) \cap A = \emptyset).$$

- Az $a \in \mathbb{R}$ pontot az A halmaz *torlódási pontjának* nevezzük, ha a **bármely** környezetében van a -tól különböző A -beli pont, azaz

$$(\forall \varepsilon > 0) (K(a, \varepsilon) \setminus \{a\}) \cap A \neq \emptyset.$$

- Az $a \in \mathbb{R}$ pontot az A halmaz *határpontjának* nevezzük, ha a **bármely** környezetében van A -beli pont, és nem A -beli pont, azaz

$$(\forall \varepsilon > 0) (K(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \wedge K(a, \varepsilon) \cap \bar{A} \neq \emptyset).$$

A belső pont és az izolált pont mindig pontja a halmaznak, torlódási és határpont lehet halmazpont, vagy nem halmazpont.

- **[halmaz belseje, határa]**

- $A \subset \mathbb{R}$ összes belső pontjainak halmazát A *belsejének* nevezzük és A° -rel jelöljük.
- $A \subset \mathbb{R}$ összes határpontjainak halmazát A *határának* nevezzük és ∂A -rel jelöljük.

- **♣[nyílt, zárt halmaz]**

- Az $A \subset \mathbb{R}$ halmazt *nyílt*nek nevezzük, ha minden pontja belső pont.
- Az $A \subset \mathbb{R}$ halmazt *zárt*nek nevezzük, ha komplementere nyílt.

- **[véges, végtelen halmaz]** Egy halmazt *véges*nek mondunk, ha üres, vagy ha elemeinek száma egy természetes szám. Egy halmazt *végtelen*nek mondunk, ha nem véges.

- **♣[sorozat]** Egy $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt (valós szám)*sorozatnak* nevezzük.

Ha A egy adott halmaz és $f : \mathbb{N} \rightarrow A$, akkor f -et *A -beli (értékű) sorozatnak* nevezzük.

$f(n) = a_n$ a sorozat n -edik eleme, $f = (a_n)$ a sorozat maga, $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ a sorozat értékkészlete.

- **[sorozat korlátossága]** Az (a_n) sorozatot *felülről korlátosnak* nevezzük, ha értékeszlete *felülről korlátos*.
Az (a_n) sorozatot *alulról korlátosnak* nevezzük, ha értékeszlete *alulról korlátos*.

Az (a_n) sorozatot *korlátosnak* nevezzük, ha alulról és felülről is korlátos.

- **[sorozat monotonitása]** Az (a_n) sorozatot *monoton növekvőnek* nevezzük, ha $(\forall n \in \mathbb{N}) a_{n+1} \geq a_n$.
Az (a_n) sorozatot *monoton csökkenőnek* nevezzük, ha $(\forall n \in \mathbb{N}) a_{n+1} \leq a_n$.

Az (a_n) sorozatot *szigorúan monoton növekvőnek* nevezzük, ha $(\forall n \in \mathbb{N}) a_{n+1} > a_n$.
Az (a_n) sorozatot *szigorúan monoton csökkenőnek* nevezzük, ha $(\forall n \in \mathbb{N}) a_{n+1} < a_n$.

Egy sorozatot *(szigorúan) monotonnak* mondunk, ha (szigorúan) monoton növekvő vagy csökkenő.

- **♣[konvergens sorozat, határérték]** Az (a_n) sorozatot *konvergensnek* nevezzük, ha van olyan $a \in \mathbb{R}$ szám, hogy bármely $\varepsilon > 0$ -hoz létezik olyan $N(\varepsilon) \in \mathbb{R}$ szám, hogy

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{ha} \quad n > N(\varepsilon).$$

A a számot a sorozat *határértékének* (limeszének) nevezzük és az

$$a_n \rightarrow a \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{vagy} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

jelölést használjuk. $N(\varepsilon)$ az ε -hoz tartozó *küszöbszám*.

Az (a_n) sorozatot *divergensnek* nevezzük, ha nem konvergens.

- **[műveletek sorozatokkal]** Ha $(a_n), (b_n)$ sorozatok, $c \in \mathbb{R}$, akkor az $(a_n + b_n), (a_n b_n), \left(\frac{a_n}{b_n}\right), (ca_n), (|a_n|)$ sorozatokat rendre az $(a_n), (b_n)$ sorozatok *összegének, szorzatának, hányadosának, az (a_n) c -szerezésének, abszolút értékének* nevezzük. A hányados definíciójában fel kell tennünk, hogy $b_n \neq 0$.

- **[bővített valós számok]** Az $\mathbb{R}_b := \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ halmazt a *bővített valós számok* halmazának nevezzük ($+\infty$ helyett gyakran csupán ∞ -t írunk).

- **♣[végtelen határérték]** Azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozatnak a *határértéke* $\begin{smallmatrix} +\infty \\ -\infty \end{smallmatrix}$ (vagy a sorozat *tart* $\begin{smallmatrix} +\infty \\ -\infty \end{smallmatrix}$ -hez) ha bármely $K \in \mathbb{R}$ számhoz van olyan $N(K) \in \mathbb{R}$, hogy

$$\begin{aligned} a_n &> K \\ a_n &< K \end{aligned} \quad \text{ha} \quad n > N(K).$$

Jelölése (az első esetben) $a_n \rightarrow +\infty \quad (n \rightarrow \infty)$ vagy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.

Ha $a_n \rightarrow \infty(-\infty)$ akkor a sorozat *divergens*, de *van határértéke*.

- **[inf, sup kiterjesztése]** Ha $A \subset \mathbb{R}$ felülről nem korlátos akkor $\sup A := \infty$.
Ha $A \subset \mathbb{R}$ alulról nem korlátos akkor $\inf A := -\infty$.

Ezzel a kiegészítéssel *minden* $A \subset \mathbb{R}$ *halmaznak van supremuma és infimuma*, de lehet hogy ezek végtelenek azaz

$$-\infty \leq \inf A \leq \sup A \leq +\infty.$$

- ♣[sor, konvergencia, sor összege] Egy (a_n) (szám)sorozat elemeit az összeadás jelével összekapcsolva kapott

$$a_1 + a_2 + \dots \quad \text{vagy} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (\text{röviden } \sum a_n)$$

összeget (szám)sornak (vagy numerikus sornak) nevezzük.

a_n a sor n -edik (vagy általános) tagja,

$$s_n := a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k \quad (n \in \mathbb{N})$$

pedig a sor n -edik részletösszege.

A $\sum a_n$ sort *konvergensnek* nevezzük, ha *részletösszegeinek* (s_n) sorozata *konvergens*, a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$$

határértéket a *sor összegének* nevezzük és azt írjuk, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$, azaz

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k a_n.$$

A $\sum a_n$ sort *divergensnek* nevezzük, ha nem konvergens.

- ♣[geometriai sor] A

$$\sum aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \dots$$

sort, ahol $a \neq 0, a \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{R}$ *geometriai sornak* nevezzük. a a sor *első tagja*, q a sor *hányadosa*, vagy *kvociense*.

- [harmónikus sor] A

$$\sum \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

sort *harmónikus sornak* nevezzük.

- [alternáló sor] Egy sort *alternáló sornak* nevezzük, ha tagjainak előjele váltakozik (pozitív tagot negatív tag követ vagy fordítva).
- [pozitív (negatív) tagú sor] Egy sort *pozitív (negatív) tagú sornak* nevezzük, ha tagjai pozitívok (negatívok).
- [abszolút, feltételesen konvergens sor] A $\sum a_n$ sort *abszolút konvergensnek* nevezzük, ha a $\sum |a_n|$ sor konvergens.
A $\sum a_n$ sort *feltételesen konvergensnek* nevezzük, ha a sor konvergens de nem abszolút konvergens.
- [sor átrendezése] Legyen $\sum a_n$ egy adott sor és $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ egy bijektív leképezése $\mathbb{N}$ -nek önmagára, akkor a $\sum a_{\varphi(n)}$ sort a $\sum a_n$ sor (φ) bijekcióhoz tartozó *átrendezésének* nevezzük.
- [Cauchy-féle szorzatsor] A $\sum_0 a_n$ és $\sum_0 b_n$ sorok *Cauchy-féle szorzatsora* a $\sum_0 c_n$ sor, melynek tagjai

$$c_n := a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0 = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

- **[függvénysor, konvergencia, összegfüggvény]** Ha egy sor tagjai (azonos halmazon értelmezett) függvények, akkor a sort *függvénysornak* nevezzük.

Legyenek $f_n : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) a valós számok D részhalmazán értelmezett függvények. A $\sum f_n(x)$ *függvénysor konvergenciahalmazát/divergenciahalmazát* azon $x \in D$ pontok alkotják melyekre a sor konvergens/divergens. A konvergenciahalmaz pontjaiban értelmezhető a sor *összegfüggvénye* (mint a részletösszegek határértéke).

- **[hatványsor]** A $\sum_0 a_n(x-a)^n$ alakú függvénysort *hatványsornak* nevezzük. a_n az n -edik *együttható*, a pedig a *sorfejtés középpontja*.
- **[konvergenciasugár]** Az

$$r := \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \quad \left(\frac{1}{0} := \infty, \frac{1}{\infty} := 0 \right)$$

bővített valós számot a $\sum_0 a_n(x-a)^n$ hatványsor *konvergenciasugarának* nevezzük.

- **[$\pm\infty$ környezetei]** A $+\infty$ *környezetein* a $]K, +\infty[$ intervallumokat, a $-\infty$ *környezetein* a $] - \infty, K[$ intervallumokat értjük, ahol $K \in \mathbb{R}$ tetszőleges.
- **[$\pm\infty$ mint torlódási pont]** Azt mondjuk, hogy $+\infty$ *torlódási pontja* $D \subset \mathbb{R}$ -nek, ha $+\infty$ bármely környezetében van D -beli pont (ami nyilvánvalóan mindig különböző $+\infty$ -tól).
- **♣[függvény határértéke]** Legyen $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és legyen $x_0 \in D'$. Azt mondjuk, hogy f -nek **van (véges, vagy végtelen) határértéke az x_0 pontban**, ha van olyan $a \in \mathbb{R}_b$ bővített valós szám, hogy bármely olyan D -beli $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatra, melyre $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ és $x_n \neq x_0$, teljesül a $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$ egyenlőség.
 a -t az f függvény x_0 pontbeli határértékének nevezzük, és $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ -val, vagy $f(x) \rightarrow a$ ($x \rightarrow x_0$)-lal jelöljük.
- **[függvény határértékének átfogalmazása]** Az f függvény értelmezési tartományának egy $x_0 \in \mathbb{R}_b$ torlódási pontjában akkor és csak akkor lesz f határértéke az $a \in \mathbb{R}_b$ bővített valós szám, ha az értelmezési tartományból bármely x_0 -hoz konvergáló $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatot véve, melynek elemei x_0 -tól különbözőek, a függvényértékek $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ sorozata a -hoz tart.

Véges pontban vett véges határérték esetén a definíció az alábbi módon is megfogalmazható.

- **[függvény véges határértéke véges torlódási pontban]** Legyen $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és legyen $x_0 \in D'$ (a D halmaz torlódási pontja). Azt mondjuk, hogy f -nek **van (véges) határértéke az x_0 pontban**, ha van olyan $a \in \mathbb{R}$ szám, hogy minden $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $\delta(\varepsilon) > 0$, hogy

$$|f(x) - a| < \varepsilon \quad \text{ha} \quad 0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \text{ és } x \in D$$

teljesül.

Az $a \in \mathbb{R}$ számot az f függvény x_0 pontbeli határértékének nevezzük, és jelölésére az $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, vagy $f(x) \rightarrow a$ ($x \rightarrow x_0$)-t használjuk.

- **[műveletek függvényekkel]** Legyenek $f, g : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, akkor a *függvények (pontonkénti) összegét, f $c \in \mathbb{R}$ -szerezését, szorzatukat, hányadosukat az*

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &:= f(x) + g(x) \quad (x \in D) \\ (cf)(x) &:= cf(x) \quad (x \in D) \\ (fg)(x) &:= f(x)g(x) \quad (x \in D) \\ (f/g)(x) &:= f(x)/g(x) \quad (x \in D, g(x) \neq 0)\end{aligned}$$

képletekkel értelmezzük.

- **[összetett függvény]** A $h(x) := g(f(x)) \quad (x \in D)$ függvényt, ahol $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g : f(D) \rightarrow \mathbb{R}$, az f és g függvényekből *összetett függvénynek nevezzük, f a belső, g a külső függvény. h jelölésére használjuk $h = g \circ f$ -t is (itt $f(D) = \{ f(x) : x \in D \}$ az f függvény értékkészlete).*

- **♣[függvény folytonossága]** Az $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt **folytonosnak** nevezzük az $x_0 \in D$ pontban, ha bármely D -beli x_0 -hoz konvergáló $x_n \in D \ (n \in \mathbb{N}), x_n \rightarrow x_0 \ (n \rightarrow \infty)$ sorozat esetén a függvényértékek $f(x_n) \ (n \in \mathbb{N})$ sorozata az x_0 pontbeli függvényértékhez tart $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Röviden: az f függvény $x_0 \in D$ pontbeli folytonossága azt jelenti, hogy ha $D \ni x_n \rightarrow x_0 \ (n \rightarrow \infty)$ akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = f(x_0)$.

- **[függvény folytonossága ε, δ -s definíció]** Az $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt értelmezési tartományának $x_0 \in D$ pontjában *folytonosnak* nevezzük, ha bármely $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $\delta(\varepsilon) > 0$, hogy

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{ha} \quad |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \text{ és } x \in D$$

teljesül.

- **[függvény korlátossága]** Az $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt *alulról* *felülről* *korlátosnak* nevezzük, ha értékkészlete *alulról* *felülről* korlátos.
- **♣[függvény monotonitása]** Az $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt *monoton* *növekvőnek* *csökkenőnek* nevezzük D -n, ha bármely $x_1 < x_2, (x_1, x_2 \in D)$ esetén

$$\begin{aligned}f(x_1) &\leq f(x_2) \\ f(x_1) &\geq f(x_2)\end{aligned} \quad \text{teljesül.}$$

Az $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt *szigorúan monoton* *növekvőnek* *csökkenőnek* nevezzük D -n, ha bármely $x_1 < x_2, (x_1, x_2 \in D)$ esetén

$$\begin{aligned}f(x_1) &< f(x_2) \\ f(x_1) &> f(x_2)\end{aligned} \quad \text{teljesül.}$$

- **♣[lokális szélsőérték]** Azt mondjuk, hogy az $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek *lokális (helyi)* *maximuma* *minimuma* az $x_0 \in D$ pontban, ha van olyan $\varepsilon > 0$ hogy

$$\begin{aligned}f(x_0) &\geq f(x) \\ f(x_0) &\leq f(x)\end{aligned} \quad \text{teljesül minden } x \in K(x_0, \varepsilon) \cap D$$

esetén.

Azt mondjuk, hogy az $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek *szigorú lokális (helyi) maximuma* az $x_0 \in D$ pontban, ha van olyan $\varepsilon > 0$ hogy

$$\begin{aligned} f(x_0) &> f(x) \\ f(x_0) &< f(x) \end{aligned} \text{ teljesül minden } x \in K(x_0, \varepsilon) \cap D, x \neq x_0$$

esetén.

- ♣[**globális szélsőérték**] Azt mondjuk, hogy az $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek *globális (abszolút) maximuma* van az $x_0 \in D$ pontban, ha

$$\begin{aligned} f(x_0) &\geq f(x) \\ f(x_0) &\leq f(x) \end{aligned} \text{ teljesül minden } x \in D \text{ esetén.}$$

Azt mondjuk, hogy az $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek *szigorú globális (abszolút) maximuma* van az $x_0 \in D$ pontban, ha

$$\begin{aligned} f(x_0) &> f(x) \\ f(x_0) &< f(x) \end{aligned} \text{ teljesül minden } x \in D, x \neq x_0 \text{ esetén.}$$

- [**függvény folytonossága egy halmazon**] Azt mondjuk, hogy az $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény *folytonos* az $A \subset D$ halmazon, ha f az A halmaz minden pontjában folytonos.
- [**függvény egyenletesen folytonossága**] Azt mondjuk, hogy az $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény *egyenletesen folytonos* a $D_1 \subset D$ halmazon, ha bármely $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan (csak ε -tól függő) $\delta(\varepsilon) > 0$ amelyre

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \text{ha} \quad |x - y| < \delta(\varepsilon) \text{ és } x, y \in D_1$$

teljesül.

Az exponenciális és trigonometrikus függvények *középiskolában tanult definícióját* elfogadva további fontos függvényeket definiálunk.

- [**néhány elemi függvény definíciója**]

$$\ln x := \text{az } e^x \text{ függvény inverze, } \ln :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R},$$

$$a^x := e^{x \ln a} \quad (x \in \mathbb{R}) \text{ ahol } a > 0,$$

$$\log_a x := \text{az } a^x \text{ függvény inverze, ahol } 0 < a \neq 1, \log_a :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}.$$

- [**trigonometrikus függvények inverzei**]

$$\arcsin x := \text{a } \sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} \text{ függvény inverze, } \arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],$$

$$\arccos x := \text{a } \cos|_{[0, \pi]} \text{ függvény inverze, } \arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi],$$

$$\arctan x := \text{a } \tan|_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[} \text{ függvény inverze, } \arctan : \mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[,$$

$$\operatorname{arccotg} x := \text{a } \operatorname{ctg}|_{]0, \pi[} \text{ függvény inverze, } \operatorname{arccotg} : \mathbb{R} \rightarrow]0, \pi[$$

- [**elemi függvény**] Az $f(x) = c$ ($x \in \mathbb{R}$), (ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstans), $f(x) = x$ ($x \in \mathbb{R}$), $f(x) = e^x$ ($x \in \mathbb{R}$), $f(x) = \ln x$ ($x > 0$), $f(x) = \sin x$ ($x \in \mathbb{R}$), $f(x) = \arcsin x$ ($x \in [-1, 1]$) függvényeket, és ezekből a

4 alpművelet (összeadás, kivonás, szorzás, osztás),
 összetett függvény képzése,
 leszűkítés egy intervallumra
 operációk véges sokszori alkalmazásával keletkező függvényeket *elemi függvényeknek* nevezzük.

- ♣[**differenciálhatóság, derivált**] Az $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ($I \subset \mathbb{R}$ egy nem elfajult intervallum) függvényt *differenciálhatónak* nevezzük az $x_0 \in I$ pontban, ha létezik a

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

(véges) határérték.

E határértéket az f függvény x_0 pontbeli *differenciálhányadosának* vagy *deriváltjának* nevezzük, és $\frac{df}{dx}(x_0)$ -l, vagy $f'(x_0)$ -l jelöljük.

- ♣[**magasabbrendű deriváltak**] Tegyük fel, hogy az $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény első deriváltja létezik az $x_0 \in I$ pontnak egy (legalább egyoldali) környezetében, akkor f *második deriváltját*

$$f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$$

-szel, vagy

$$f''(x_0) := (f')'(x_0)$$

-l definiáljuk, és hasonlóan, az f függvény $(n+1)$ -edik *deriváltja*

$$f^{(n+1)}(x_0) := \left(f^{(n)}\right)'(x_0).$$

- ♣[**konvex, konkáv függvény**] Az $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt *konvexnek* nevezzük az I intervallumon, ha

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \quad (x_1, x_2 \in I, \lambda \in [0, 1])$$

teljesül.

f -et *konkávnak* nevezzük I -n, ha $-f$ konvex I -n.

- ♣[**inflexiós hely**] Legyen $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ és $x_0 \in I^\circ$ belső pontja I -nek. x_0 -t az f függvény *inflexiós helyének*, $(x_0, f(x_0))$ -t *inflexiós pontjának* nevezzük, ha x_0 az I intervallum konvex és konkáv szakaszait választja el, azaz, ha van olyan $\delta > 0$, hogy
 f konvex $]x_0 - \delta, x_0[$ -n, konkáv $]x_0, x_0 + \delta[$ -n, vagy
 f konkáv $]x_0 - \delta, x_0[$ -n, konvex $]x_0, x_0 + \delta[$ -n.

- [**Taylor polinom**] A

$$T_n(x) := f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

polinomot az f függvény n -edfokú *Taylor polinomjának* ($x_0 = 0$ esetén *Mc Laurin polinomjának*) nevezzük az x_0 pont körül, míg az

$$R_n(x) := \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

a Taylor formula n -edik *maradéktagja* a Lagrange-féle alakban.

- ♣[**stacionárius pont**] Azokat az x_0 pontokat, amelyekre $f'(x_0) = 0$ teljesül, az f függvény *stacionárius pontjainak* nevezzük.

E pontokban az érintő párhuzamos az x tengellyel. *Stacionárius pontban lehet lokális szélsőérték, de nem biztos, hogy van.*

- **♣[primitív függvény]** Legyen $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ adott függvény ($I \subset \mathbb{R}$ egy intervallum). A $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt a f függvény *primitív függvényének* nevezzük I -n, ha

$$F \text{ differenciálható } I\text{-n,}$$

$$F'(x) = f(x) \quad (x \in I).$$

- **♣[határozatlan integrál]** Egy f függvény összes primitív függvényeinek halmazát f *határozatlan integráljának* nevezzük, és $\int f(x) dx$ -szel, vagy $\int f$ -fel jelöljük.
- **[elemien integrálható függvény]** Egy függvényt *elemien integrálhatónak* nevezünk, ha primitív függvénye elemi.
- **[racionális törtfüggvény]** A két polinom hányadosaként előállítható függvényeket *racionális törtfüggvényeknek* nevezzük.
- **♣[intervallum felosztása]** Legyen $[a, b] \subset \mathbb{R}$ egy zárt intervallum. A

$$P = \{ x_i : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \} \quad (n \in \mathbb{N})$$

ponthalmazt az $[a, b]$ intervallum egy *felosztásának* nevezzük. x_i az i -edik *osztópont*, $[x_{i-1}, x_i]$ az i -edik intervallum, $x_i - x_{i-1}$ az i -edik *intervallum hossza*, a

$$\|P\| = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$$

számot a P felosztás *finomságának* nevezzük.

- **♣[integrálközelítő összeg]** Legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ egy korlátos függvény, P az $[a, b]$ egy felosztása, $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, \dots, n$) közbenső értékek. Az

$$s(f, P, t) = \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1})$$

összeget az f függvény P felosztáshoz és $t = (t_1, \dots, t_n)$ közbenső érték rendszerhez tartozó *integrálközelítő összegének* nevezzük.

- **♣[a Riemann integrálhatóság és Riemann integrál definíciója]** Az $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvényt *Riemann integrálhatónak* nevezzük $[a, b]$ -n, ha van olyan $\mathcal{I} \in \mathbb{R}$ szám, hogy bármely $\epsilon > 0$ -hoz létezik olyan $\delta(\epsilon)$, hogy

$$(1) \quad |s(f, P, t) - \mathcal{I}| < \epsilon \quad \text{ha } \|P\| < \delta(\epsilon)$$

bármely $t = (t_1, \dots, t_n)$ közbenső érték rendszer mellett teljesül.

Az $\mathcal{I}$ számot az f függvény $[a, b]$ -n vett *Riemann integráljának* nevezzük és $\int_a^b f(x) dx$ vagy $\int_a^b f$ -fel jelöljük.

(1)-gyel egy (új típusú) határértéket definiáltunk, így az **integrál definícióját egyszerűen**

$$\mathcal{I} = \int_a^b f(x) dx := \lim_{\|P\| \rightarrow 0} s(f, P, t) \quad \text{ahol } s(f, P, t) = \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1})$$

alakban is írhatjuk (ahol természetesen meg kell mondani, hogy f, P, t_i, t mit jelentenek).

- ♣[területmérő függvény] Legyen $f \in \mathcal{R}[a, b]$, akkor a

$$T(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (x \in [a, b])$$

függvényt f területmérő függvényének nevezzük.

- [improprius integrál végtelen intervallumon] Legyen $f :]-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy minden $t < b$ mellett $f \in \mathcal{R}[t, b]$, akkor

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx := \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x) dx$$

feltéve, hogy a jobboldali határérték véges. Ekkor azt mondjuk, hogy az $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ *improprius integrál konvergens*, ellenkező esetben (amikor a jobboldali határérték nem létezik, vagy létezik de végtelen) *divergens*.

Legyen $f : [a, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy minden $a < t$ mellett $f \in \mathcal{R}[a, t]$, akkor

$$\int_a^\infty f(x) dx := \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) dx$$

feltéve, hogy a jobboldali határérték véges. Ekkor azt mondjuk, hogy az $\int_a^\infty f(x) dx$ *improprius integrál konvergens*, ellenkező esetben (amikor a jobboldali határérték nem létezik, vagy létezik de végtelen) *divergens*.

Végül, ha $f :]-\infty, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, és minden $s < t$, $s, t \in \mathbb{R}$ mellett $f \in \mathcal{R}[s, t]$, akkor tetszőleges $c \in \mathbb{R}$ mellett

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty f(x) dx : &= \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^\infty f(x) dx \\ &= \lim_{s \rightarrow -\infty} \int_s^c f(x) dx + \lim_{t \rightarrow \infty} \int_c^t f(x) dx \end{aligned}$$

feltéve, hogy mindkét jobboldali határérték véges. Ekkor azt mondjuk, hogy az $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx$ *improprius integrál konvergens*, ellenkező esetben (amikor a jobboldali határértékek közül legalább az egyik nem létezik, vagy létezik de végtelen) *divergens*.

- [improprius integrál nem korlátos függvényre] Legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy f nem korlátos $[a, b]$ -n, de minden $a < t < b$ mellett $f \in \mathcal{R}[t, b]$, (így f korlátos $[t, b]$ -n!), akkor

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{t \rightarrow a+0} \int_t^b f(x) dx$$

feltéve, hogy a jobboldali határérték véges. Ekkor azt mondjuk, hogy az $\int_a^b f(x) dx$ *improprius integrál konvergens*, ellenkező esetben (amikor a jobboldali határérték nem létezik, vagy létezik de végtelen) *divergens*.

Legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy f nem korlátos $[a, b]$ -n, de minden $a < t < b$ mellett $f \in \mathcal{R}[a, t]$, (így f korlátos $[a, t]$ -n!), akkor

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{t \rightarrow b-0} \int_a^t f(x) dx$$

feltéve, hogy a jobboldali határérték véges. Ekkor azt mondjuk, hogy az $\int_a^b f(x) dx$ *improprius integrál konvergens*, ellenkező esetben (amikor a jobboldali határérték nem létezik, vagy létezik de végtelen) *divergens*.

Végül, ha $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, és f nem korlátos $[a, b]$ -n, de van olyan c , $a < c < b$ hogy minden $a < s < c < t < b$ mellett $f \in \mathcal{R}[a, s]$, $f \in \mathcal{R}[t, b]$ (így f korlátos $[a, s]$ -n és $[t, b]$ -n, azaz f a c pont egy környezetében nem korlátos!), akkor

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &:= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \\ &= \lim_{s \rightarrow c-0} \int_a^s f(x) dx + \lim_{t \rightarrow c+0} \int_t^b f(x) dx \end{aligned}$$

feltéve, hogy mindkét jobboldali határérték véges. Ekkor azt mondjuk, hogy az $\int_a^b f(x) dx$ *improprius integrál konvergens*, ellenkező esetben (amikor a jobboldali határértékek közül legalább az egyik nem létezik, vagy létezik de végtelen) *divergens*.

- **[téglalap felosztása, integrálközelítő összeg]** Legyen $D = [a, b] \times [c, d]$ egy téglalap, és

$$\begin{aligned} P_x &= \{ x_i : a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b \}, \\ P_y &= \{ y_j : c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d \} \end{aligned}$$

az $[a, b]$, $[c, d]$ intervallumok felosztásai, akkor a

$$P = P_x \times P_y = \{ (x_i, y_j) : i = 0, 1, \dots, m; j = 0, 1, \dots, n \}$$

pontrendszert a D egy felosztásának nevezzük, $D_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ ($i = 0, 1, \dots, m; j = 0, 1, \dots, n$) a felosztás téglalapjai

$$\|P\| = \max_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2}$$

a felosztás finomsága (a D_{ij} téglalapok átlói hosszának a maximuma).

Legyen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény a D téglalapon, P a D egy felosztása, $(s_i, t_j) \in D_{ij}$ közbenső pontok,

$$v = ((s_1, t_1), (s_1, t_2), \dots, (s_m, t_n))$$

a közbenső pontok rendszere/vektora. Az

$$s(f, P, v) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(s_i, t_j) m(D_{ij})$$

összeget, ahol $m(D_{ij}) = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$ a D_{ij} téglalap területe (mértéke), az f függvény P felosztáshoz és v közbenső pontrendszerhez tartozó *integrálközelítő összegének* nevezzük.

$s(f, P, v)$ *geometriai jelentése* : a felosztás és a közbenső értékek által meghatározott hasábok térfogatának (előjeles) összege, ami annál jobban közelíti az f által meghatározott felület alatti (előjeles) térfogatot, minél finomabb a felosztás.

- **[kettős Riemann integrál definíciója]** Az $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvényt *Riemann integrálhatónak* nevezzük a D téglalapon, ha van olyan $\mathcal{I} \in \mathbb{R}$ szám, hogy bármely $\epsilon > 0$ -hoz létezik olyan $\delta(\epsilon)$, hogy

$$(2) \quad |s(f, P, v) - \mathcal{I}| < \epsilon \quad \text{ha} \quad \|P\| < \delta(\epsilon)$$

bármely $v = ((s_1, t_1), (s_1, t_2), \dots, (s_m, t_n))$ közbenső pontrendszer mellett teljesül.

Az $\mathcal{I}$ számot az f függvény D -n vett *Riemann integráljának* nevezzük és $\iint_D f(x, y) \, dx dy$ -szel jelöljük.