

DEFINÍCIÓK ÉS TÉTELEK

A fontosabb definíciókat és tételeket ♣ jelöli.

- **[k -dimenziós euklideszi tér]** A k -dimenziós euklideszi térnek nevezzük és $\mathbb{R}^k$ val jelöljük a valós számokból alkotott k -tagú $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ sorozatok halmazát, azaz

$$\mathbb{R}^k := \overset{1}{\mathbb{R}} \times \overset{2}{\mathbb{R}} \times \dots \times \overset{k}{\mathbb{R}} = \{ x = (x_1, x_2, \dots, x_k) : x_i \in \mathbb{R} \ (i = 1, 2, \dots, k) \}.$$

Az $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ sorozatokat a tér pontjainak mondjuk, az $x_1, x_2, \dots, x_k$ számok az $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ pont koordinátái. □

- **[vektorok összege és skalárral való szorzata]** Az $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^k$ vektorok összegét és az $x \in \mathbb{R}^k$ vektor $\lambda \in \mathbb{R}$ skalárral való szorzatát

$$\begin{aligned} x + y &:= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_k + y_k) \\ \lambda x &:= (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_k) \end{aligned}$$

-val definiáljuk. □

- ♣ **[vektorok skaláris vagy belső szorzata]** Az $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^k$ vektorok skaláris vagy belső szorzatát

$$\langle x, y \rangle := x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_k y_k$$

-val definiáljuk. □

Könnyű ellenőrizni, hogy a skaláris szorzat teljesíti az alábbi tulajdonságokat. Bármely $x, y, z \in \mathbb{R}^k$ és bármely $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} \langle x + y, z \rangle &= \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle, \\ \langle \lambda x, y \rangle &= \lambda \langle x, y \rangle, \\ \langle x, y \rangle &= \langle y, x \rangle, \\ \langle x, x \rangle &\geq 0 \text{ és } \langle x, x \rangle = 0 \text{ akkor és csakis akkor, ha } x = 0. \end{aligned}$$

Ez a 4 tulajdonság alkotja a skaláris szorzás axiómáit.

♣ **TÉTEL** [Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség] Bármely két $x, y \in \mathbb{R}^k$ vektor esetén érvényes a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}.$$

□

- ♣ **[vektor hossza]** Az $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ számot az $x = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ vektor hosszának (vagy normájának ill. abszolút értékének) nevezzük. □

A Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség felhasználásával könnyen igazolhatjuk a norma tulajdonságait: bármely $x, y \in \mathbb{R}^k$ és bármely $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} \|x\| &\geq 0 \text{ és } \|x\| = 0 \text{ akkor és csakis akkor, ha } x = 0 \\ \|\lambda x\| &= |\lambda| \|x\| \\ \|x + y\| &\leq \|x\| + \|y\|. \end{aligned}$$

□

- **[távolság]** Az $x, y \in \mathbb{R}^k$ pontok távolságát

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

-nal definiáljuk. □

- **[környezet]** Egy $a \in \mathbb{R}^k$ pont $\varepsilon > 0$ sugarú (nyílt) környezetén a

$$K(a, \varepsilon) := \{ x \in \mathbb{R}^k : d(x, a) = \|x - a\| < \varepsilon \}$$

halmazt értjük. □

- **[sorozat]** Egy $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^k$ függvényt $\mathbb{R}^k$ -beli sorozatnak nevezünk.
Jelölések

$$a(n) = a_n = (a_{n,1}, a_{n,2}, \dots, a_{n,k}) \quad (n \in \mathbb{N}), \quad a = (a_n).$$

□

- **[konvergens, divergens sorozat]** Az (a_n) ($\mathbb{R}^k$ -beli) sorozatot *konvergensnek* nevezjük, ha van olyan $b \in \mathbb{R}^k$, hogy bármely $\varepsilon > 0$ -hoz létezik olyan $N(\varepsilon) \in \mathbb{R}$ szám, hogy

$$\|a_n - b\| < \varepsilon \quad \text{ha} \quad n > N(\varepsilon).$$

b -t a sorozat *határértékének* (limeszének) nevezük és az

$$a_n \rightarrow b \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{vagy} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$$

jelölést használjuk. $N(\varepsilon)$ -t az ε -hoz tartozó *küszöbszámnak* nevezük.

Egy $\mathbb{R}^k$ -beli sorozatot *divergensnek* nevezünk, ha nem konvergens. □

TÉTEL [$\mathbb{R}^k$ -beli sorozat koordinátáinként konvergens]

$$a_n = (a_{n,1}, a_{n,2}, \dots, a_{n,k}) \rightarrow b = (b_1, b_2, \dots, b_k) \quad (n \rightarrow \infty)$$

akkor és csakis akkor, ha

$$a_{n,i} \rightarrow b_i \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{minden } i = 1, 2, \dots, k \text{ mellett.}$$

Ez azt jelenti, hogy egy vektorsorozat akkor és csakis akkor konvergens, ha a sorozat minden koordinátája konvergens és határértéke a határvektor megfelelő koordinátája. □

- **[függvény határértéke]** Legyen $f : D \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ és legyen $x_0 \in D'$ (a D halmaz torlódási pontja). Azt mondjuk, hogy f -nek van (véges) határértéke az x_0 pontban, ha van olyan $a \in \mathbb{R}$ szám, hogy minden $\epsilon > 0$ -hoz van olyan $\delta(\epsilon) > 0$, hogy

$$|f(x) - a| < \epsilon \quad \text{ha} \quad 0 < \|x - x_0\| < \delta(\epsilon) \text{ és } x \in D$$

teljesül.

Az $a \in \mathbb{R}$ számot az f függvény x_0 pontbeli határértékének nevezük, és jelölésére az $a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ vagy $f(x) \rightarrow a$ (ha $x \rightarrow x_0$)-t használjuk. □

- **♣[függvény folytonossága]** Az $f : D \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt értelmezési tartományának $x_0 \in D$ pontjában folytonosnak nevezük, ha bármely $\epsilon > 0$ -hoz van olyan $\delta(\epsilon) > 0$, hogy

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon \quad \text{ha} \quad \|x - x_0\| < \delta(\epsilon) \text{ és } x \in D$$

teljesül. □

- **♣[függvény (totális) differenciálhatósága, deriváltja]** Az $f : D \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt az $x_0 \in D$ belső pontban (totálisan) differenciálhatónak nevezük, ha van olyan $A \in \mathbb{R}^k$ vektor melyre

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \langle A, x - x_0 \rangle}{\|x - x_0\|} = 0.$$

Az $f'(x_0) := A$ vektort az f függvény x_0 pontbeli deriváltjának nevezük. □

- **♣[függvény irány menti differenciálhatósága, irány menti deriváltja]** Az $f : D \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt az $x_0 \in D$ belső pontban az e (ahol e egy $\mathbb{R}^k$ -beli egységvektor) irány mentén differenciálhatónak nevezük, ha létezik a

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + te) - f(x_0)}{t}$$

(véges) határérték. E határértéket $D_e f(x_0)$ -al jelöljük, és az f függvény e iránymenti deriváltjának nevezzük az x_0 pontban. $\square$

- **♣[függvény parciális deriváltja]** Legyen $e = u_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ az i -edik tengely irányába mutató egységvektor (az u_i vektor i -edik koordinátája 1, a többi 0) akkor a

$$D_{u_i} f(x_0)$$

iránymenti deriváltat az f függvény i -edik változója szerinti parciális deriváltjának nevezzük az x_0 pontban. Jelölésére az

$$\partial_i f(x_0)$$

szimbólumot használjuk. $\square$

Egyéb jelölések:

$$\partial_{x_i} f(x_0), \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0), \quad f_{x_i}(x_0)$$

- **♣[parciális differenciálhatóság]** Az $f : D \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt az $x_0 \in D$ belső pontban *parciálisan differenciálhatónak* nevezzük, ha $\partial_i f(x_0)$ minden $i = 1, \dots, n$ -re létezik. $\square$

♣TÉTEL [iránymenti derivált kiszámítása] Ha $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ az $x_0 \in D$ belső pontban (totálisan) differenciálható, akkor bármely $e = (e_1, \dots, e_k) \in \mathbb{R}^k$, $\|e\| = \sqrt{e_1^2 + \dots + e_k^2} = 1$ irány mentén is differenciálható x_0 -ban, és az iránymenti deriváltjára

$$D_e f(x_0) = \langle A, e \rangle = A_1 e_1 + \dots + A_k e_k$$

áll fenn, ahol $A = f'(x_0)$. $\square$

♣TÉTEL [(totális) differenciálhatóság $\Rightarrow$ folytonosság] Ha $f : D \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ az $x_0 \in D$ belső pontban (totálisan) differenciálható, akkor f folytonos x_0 -ban. $\square$

♣TÉTEL [parc. deriv. folytonossága $\Rightarrow$ (totális) differenciálhatóság] Ha az $f : D \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek az $x_0 \in D$ belső pont egy környezetében folytonos parciális deriváltjai vannak (ekkor azt úgy mondjuk, hogy a függvény folytonosan parciálisan differenciálható e környezetben) akkor f az x_0 pontbanban (totális) differenciálható, (így folytonos is). $\square$

TÉTEL [láncszabály: összetett függvény differenciálhatósága] Ha a $g_i : D \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, \dots, l$) függvények differenciálhatók az $x_0 \in D$ belső pontban, és $f : E \subset \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható az $y_0 = g(x_0) \in E$ belső pontban, ahol $g(x) := (g_1(x), g_2(x), \dots, g_l(x))$ ($x \in D$), akkor a

$$h(x) := f(g(x))$$

összetett függvény (mely $x_0 \in D$ egy környezetében biztosan értelmezve van) differenciálható $x_0 \in D$ -ben és

$$\partial_i h(x_0) = \sum_{j=1}^l \partial_j f(g(x_0)) \partial_i g_j(x_0) \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Utóbbi képletet nevezzük láncszabálynak. $\square$

- **♣[magasabb rendű parciális deriváltak]** Tegyük fel, hogy az $f : D \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek az $x_0 \in D$ belső pont egy környezetében létezik pl. az i -edik változó szerinti $\partial_i f$ parciális derivált. Ha ez parciálisan differenciálható pl. az j -edik változó szerint, úgy a e deriválást elvégezve kapjuk a

$$\partial_j \partial_i f(x_0) := \partial_j (\partial_i f(x_0))$$

második parciális deriváltját f -nek az x_0 pontban az i -edik és j -edik változók szerint (ebben a sorrendben).

Hasonlóan ha a $\partial_j \partial_i f(x)$ derivált létezik x_0 egy környezetében és ez parciálisan differenciálható pl. a l -edik változó szerint, úgy a e deriválást elvégezve kapjuk a

$$\partial_l \partial_i \partial_j f(x_0) := \partial_l (\partial_i \partial_j f(x_0))$$

harmadik parciális deriváltat. Hasonlóan értelmezhetjük a negyed- és magasabbrendű parciális deriváltakat is. $\square$

♣TÉTEL [Young tétel: a vegyes parciális deriváltak függetlensége a deriválás sorrendjétől] *Ha az $f : D \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek az $x_0 \in D$ belső pont egy környezetében az összes $m \geq 2$ -edik parciális deriváltakai léteznek és folytonosak az x_0 pontban, akkor a függvény m -edik parciális deriváltakai az x_0 pontban a differenciálás sorrendjétől függetlenek.* $\square$

- **♣[maximum, minimum]** Azt mondjuk, hogy az $f : D \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek *lokális (helyi) maximuma (minimuma)* van az $x_0 \in D$ pontban, ha van olyan $\varepsilon > 0$ hogy

$$f(x_0) \geq f(x) \quad (f(x_0) \leq f(x)) \text{ teljesül minden } x \in K(x_0, \varepsilon) \cap D$$

esetén.

Azt mondjuk, hogy az $f : D \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek *szigorú lokális (helyi) maximuma (minimuma)* van az $x_0 \in D$ pontban, ha van olyan $\varepsilon > 0$ hogy

$$f(x_0) > f(x) \quad (f(x_0) < f(x)) \text{ teljesül minden } x \in K(x_0, \varepsilon) \cap D, x \neq x_0$$

esetén.

Azt mondjuk, hogy az $f : D \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek *globális (vagy abszolút) maximuma (minimuma)* van az $x_0 \in D$ pontban, ha

$$f(x_0) \geq f(x) \quad (f(x_0) \leq f(x)) \text{ teljesül minden } x \in D$$

esetén.

Azt mondjuk, hogy az $f : D \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek *szigorú globális (vagy abszolút) maximuma (minimuma)* van az $x_0 \in D$ pontban, ha

$$f(x_0) > f(x) \quad (f(x_0) < f(x)) \text{ teljesül minden } x \in D, x \neq x_0$$

esetén. $\square$

♣TÉTEL [a szélsőérték létezésének elegendő feltétele] *Korlátos zárt halmazon folytonos függvény felveszi a függvényértékek infimumát és supremumát függvényértékként, ami azt jelenti, hogy a függvénynek van minimuma és maximuma (az illető korlátos zárt halmazon).* $\square$

♣TÉTEL [a szélsőérték elsőrendű szükséges feltétele] *Ha $f : D \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek az $x_0 \in D$ belső pontban lokális szélsőértéke van, és léteznek f első parciális deriváltakai x_0 -ban, akkor*

$$\partial_1 f(x_0) = \partial_2 f(x_0) = \dots = \partial_k f(x_0) = 0.$$

Az előző feltételnek elegettevő x_0 pontokat az f függvény *stacionárius pontjainak* nevezzük. $\square$

♣TÉTEL [a szélsőérték másodrendű elegendő feltétele] *Tegyük fel, hogy az $f : D \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ összes második parciális deriváltakai folytonosak az $x_0 \in D$ belső pont egy környezetében, továbbá*

$$\partial_1 f(x_0) = \partial_2 f(x_0) = \dots = \partial_k f(x_0) = 0,$$

azaz x_0 *stacionárius pontja* f -nek.

I. Ha a

$$Q(h) = Q(h_1, \dots, h_k) := \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^k \partial_j \partial_i f(x_0) h_i h_j$$

kvadratikusan pozitív definit, azaz $Q(h) > 0$ minden $h \in \mathbb{R}^k, h \neq 0$ esetén, akkor f -nek szigorú lokális minimuma van x_0 -ban,

II. ha a Q kvadratikus függvény **negatív definit**, azaz $Q(h) < 0$ minden $h \in \mathbb{R}^k, h \neq 0$ esetén, akkor f -nek **szigorú lokális maximuma** van x_0 -ban,

III. ha a Q kvadratikus függvény **indefinit**, azaz $Q(h)$ felvesz pozitív és negatív értéket is, akkor f -nek **nincs szélsőértéke** x_0 -ban. $\square$

A

$$Q(h_1, h_2) = \partial_1 \partial_1 f(x_0) h_1^2 + 2 \partial_1 \partial_2 f(x_0) h_1 h_2 + \partial_2 \partial_2 f(x_0) h_2^2$$

kvadratikus függvény akkor és csak akkor pozitív definit, ha

$$\Delta_1 := \partial_1 \partial_1 f(x_0) > 0, \quad \Delta_2 := \begin{vmatrix} \partial_1 \partial_1 f(x_0) & \partial_1 \partial_2 f(x_0) \\ \partial_1 \partial_2 f(x_0) & \partial_2 \partial_2 f(x_0) \end{vmatrix} > 0.$$

Hasonlóan bizonyíthatjuk azt, hogy $Q(h_1, h_2)$ akkor és csak akkor negatív definit, ha

$$\Delta_1 < 0, \quad \Delta_2 > 0.$$

Ha

$$\Delta_2 < 0$$

akkor Q indefinit. $\square$

- **[lokális feltételes maximum (minimum)]** Legyenek $f : D \subset \mathbb{R}^{k+m} \rightarrow \mathbb{R}$, $h_i : D \subset \mathbb{R}^{k+m} \rightarrow \mathbb{R}$ $i = 1, \dots, m$ adott függvények. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az $x_0 \in D$ pontban a $h_1(x) = 0, h_2(x) = 0, \dots, h_m(x) = 0$ feltételek mellett **lokális feltételes maximuma (minimuma)** van, ha van olyan $\varepsilon > 0$ hogy

$$f(x_0) \geq f(x) \quad (f(x_0) \leq f(x)) \text{ teljesül minden } x \in D \cap K(x_0, \varepsilon)$$

mellett, melyre

$$h_1(x) = \dots = h_m(x) = 0.$$

$\square$

TÉTEL [a feltételes szélsőérték szükséges feltétele] Tegyük fel, hogy az $f, h_i : D \subset \mathbb{R}^{k+m} \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, \dots, m$), az f függvénynek az $x_0 \in D$ belső pontban a $h_1(x) = 0, h_2(x) = 0, \dots, h_m(x) = 0$ feltételek mellett **lokális feltételes szélsőértéke** van, továbbá az f és h_i ($i = 1, \dots, m$) parciális deriváltjai folytonosak x_0 egy környezetében és a

$$(\partial_j h_i(x_0)) \quad (j = 1, \dots, k+m, i = 1, \dots, m)$$

mátrixnak van nemzérus m -edrendű aldeterminánsa. Akkor vannak olyan $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ valós számok, hogy az

$$F(x) := f(x) + \lambda_1 h_1(x) + \dots + \lambda_m h_m(x) \quad (x \in D)$$

függvényre

$$\partial_1 F(x_0) = \dots = \partial_{k+m} F(x_0) = 0.$$

A $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ számokat *Lagrange-féle multiplikátoroknak* nevezzük, az F függvényt a feltételes szélsőérték probléma *Lagrange-féle függvényének* nevezzük.

en

- **♣[vektorok lineáris kombinációja]** Az $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^k$ vektorok $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ együtthatókkal képezett *lineáris kombinációján* a

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n$$

vektort értjük. $\square$

- **♣[vektorrendszer lineárisan függetlensége, függősége]** Az $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^k$ vektorrendszert *lineárisan függetlennek* nevezzük, ha

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n = 0$$

csak $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ esetén áll fenn.

Egy vektorrendszert *lineárisan függőnek* nevezzük, ha nem lineárisan független. □

A definíció alapján könnyen belátható, hogy *lineárisan független vektorrendszer bármely részrendszere is lineárisan független*, és *lineárisan függő vektorrendszert további vektorokkal bővítve, a bővített rendszer is lineárisan függő*. □

TÉTEL Az $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^k$ vektorrendszer akkor és csak akkor lineárisan független, ha

$$b = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n, \quad b = \lambda'_1 a_1 + \dots + \lambda'_n a_n$$

csak $\lambda_1 = \lambda'_1, \dots, \lambda_n = \lambda'_n$ esetén teljesül. □

Megjegyzés. Az $\mathbb{R}^k$ vektortér *k dimenziós* a következő értelemben: van $\mathbb{R}^k$ -ban *k* darab lineárisan független vektor, de bárhol is választunk *k + 1* darab vektort $\mathbb{R}^k$ -ból, azok lineárisan függők.

- **♣[bázis]** Az $\mathbb{R}^k$ (*k* dimenziós) vektortér bármely *k* számú lineárisan független $b_1, \dots, b_k$ vektorát a *tér bázisának* nevezzük. □

TÉTEL Ha $b_1, \dots, b_k$ a (*k* dimenziós) $\mathbb{R}^k$ vektortér egy bázisa, akkor a tér minden *b* vektora egyértelműen

$$b = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \dots + \beta_k b_k$$

alakba írható. Az itt szereplő $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ skalárokat a *b* vektor $b_1, \dots, b_k$ bázisára vonatkozó **koordinátáinak** nevezzük. □

- **♣[természetes bázis]** Az

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots \quad e_k = (0, 0, \dots, 1) \in \mathbb{R}^k$$

vektorok az $\mathbb{R}^k$ tér egy bázisát alkotják, melyet *természetes bázisnak* nevezzük. □

- **[altér]** Az $\mathbb{R}^k$ vektortér *alterén* $\mathbb{R}^k$ olyan (nemüres) *L* részhalmazát értjük, mely zárt az összeadásra és a skalárral való szorzásra nézve, azaz $a, b \in L, \lambda \in \mathbb{R}$ esetén $a + b \in L, \lambda a \in L$ teljesül. □

Az egész $\mathbb{R}^k$ és a $\{0\}$ alterek, melyeket *triviális altereknek* nevezzük.

Tetszőleges $a_1, a_2, \dots, a_n$ vektorrendszer általában nem alkot alteret. Van viszont olyan altér mely tartalmazza ezt a vektorrendszert, pl. az egész vektortér.

- **[vektorrendszer által generált (vagy kifeszített) altér]** Egy $a_1, a_2, \dots, a_n$ vektorrendszert tartalmazó legszűkebb alteret a *vektorrendszer által generált (vagy kifeszített) altérnek* nevezzük, és $\mathcal{L}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ -nel jelöljük. □

Mivel alterek metszete is altér, így $\mathcal{L}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ éppen az $a_1, a_2, \dots, a_n$ vektorrendszert tartalmazó összes alterek metszete. Könnyű bebizonyítani, hogy ez a metszet (vagy a generált altér) azonos a vektorrendszer vektoraiból képezhető *összes lineáris kombinációk halmazával*, azaz

$$\mathcal{L}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \{ \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n : \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \}.$$

- **♣[vektorrendszer rangja]** Az $\mathcal{L}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ generált altér dimenzióját az $a_1, a_2, \dots, a_n$ vektorrendszer *rangjának* nevezzük, és $\text{rang}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ -nel jelöljük. □

♣TÉTEL Az $a_1, a_2, \dots, a_n$ vektorrendszer rangja megegyezik e rendszerből kiválasztható maximális számú, lineárisan független vektorok számával. $\square$

♣TÉTEL Az $a_1, a_2, \dots, a_n$ vektorrendszer által generált altér nem változik meg, (és így a vektorrendszer rangja sem változik) ha

- megváltoztatjuk az vektorok sorrendjét,
- valamelyik vektort egy $\lambda \neq 0$ skalárral megszorozzuk,
- valamely vektorához egy másik vektorát hozzáadjuk.

$\square$

- **♣[$k \times n$ típusú mátrix]** Ha $k \cdot n$ darab (valós) számot, az a_{ij} ($i = 1, 2, \dots, k; j = 1, 2, \dots, n$) számokat, k sorban és n oszlopban helyezünk el (és zárójelbe tesszük) az alábbi módon:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

akkor egy $k \times n$ típusú (valós) mátrixot definiáltunk. Az összes $k \times n$ típusú mátrixok halmazát $\mathcal{M}_{k \times n}$ -nel jelöljük.

$\square$

A típus megadásánál **mindig a sorok száma** az első adat!

Az előbbi mátrixot A -val jelölve, mondhatjuk, hogy a_{ij} az A mátrix i -edik sorának j -edik eleme, vagy az A mátrix (i, j) -edik eleme.

Gyakran használjuk az $A = (a_{ij})$ tömör jelölést, ha ez nem okoz félreértést.

- **♣[mátrix transzponáltja]** Az $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{k \times n}$ mátrix transzponáltján az $A^\top = (a_{ji}) \in \mathcal{M}_{n \times k}$ mátrixot, értjük (a mátrix sorait és oszlopait megcserélve kapjuk a mátrix transzponáltját).

$\square$

- **♣[mátrixok összege és skalárral való szorzása]** Legyenek $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{k \times n}$ azonos típusú mátrixok, és legyen $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor az $A + B$ és λA mátrixokat

$$A + B := (a_{ij} + b_{ij}), \quad \lambda A := (\lambda a_{ij})$$

-vel definiáljuk.

$\square$

TÉTEL [az összeadás, számmal való szorzás és transzponálás tulajdonságai] Az összes $k \times n$ típusú valós mátrixok $\mathcal{M}_{k \times n}$ halmaza $k \cdot n$ dimenziós valós vektortér a fenti műveletekre nézve. Továbbá bármely $A, B \in \mathcal{M}_{k \times n}, \lambda \in \mathbb{R}$ mellett

$$(A + B)^\top = A^\top + B^\top, \quad (\lambda A)^\top = \lambda A^\top.$$

$\square$

Két mátrix szorzata csak akkor értelmezett, ha az első tényező(mátrixnak) annyi oszlopa van, mint ahány sora van a második tényező(mátrixnak).

- **♣[mátrixok szorzása]** Az $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{k \times n}$ és $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n \times m}$ mátrixok $C = AB$ szorzatán azt a $C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{k \times m}$ mátrixot értjük melyre

$$c_{ij} := \sum_{s=1}^n a_{is}b_{sj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} \quad (i = 1, 2, \dots, k; j = 1, 2, \dots, m).$$

$\square$

Ezt a szorzást röviden "sor-oszlop kombinációnak" mondjuk, mert a szorzatmátrix c_{ij} eleme, éppen az A mátrix (első tényező) i -edik sorvektorának és a B mátrix (második tényező) j -edik oszlopvektorának a belső szorzata (mindkét vektor n dimenziós).

TÉTEL [mátrixok szorzásának tulajdonságai] *Mátrixok szorzására teljesülnek az*

$$\begin{aligned} A(BC) &= (AB)C \\ (A+B)C &= AC+BC \\ A(B+C) &= AB+AC \\ (AB)^\top &= B^\top A^\top \end{aligned}$$

azonosságok, ahol A, B, C tetszőleges mátrixok, melyekre a felírt műveleteknek van értelme.

□

Megjegyezzük, hogy a mátrixszorzás *nem kommutatív*, azaz általában $AB \neq BA$, továbbá kvadratikus mátrixokra

$$AE = EA = A, \quad AO = OA = O.$$

- ♣[**mátrix invertálhatósága és inverze**] Egy A kvadratikus mátrixot *invertálhatónak* nevezünk, ha van olyan B (kvadratikus) mátrix melyre

$$AB = BA = E$$

teljesül. Ezt a B mátrixot A *inverzének* nevezzük és A^{-1} -gyel jelöljük.

□

- [**permutáció**] Az $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \dots, n\}$ számok egy elrendezését (valamely sorrendben való felírását) ezen elemek egy *permutációjának* nevezzük. Két permutációt akkor tekintünk különbözőnek, ha azok legalább egy elem elhelyezésében különböznek. $\mathbb{N}_n$ összes permutációinak halmazát S_n -nel jelöljük.

□

- [**inverzió**] Legyen $(a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_n)$ az $1, 2, 3, \dots, n$ elemek egy permutációja. Azt mondjuk, hogy e permutációban az a_i és a_j pár *inverzióban* áll, ha $i < j$ és $a_i > a_j$.

□

Aszerint, hogy az inverzióban álló párok száma páros vagy páratlan, szokás *páros vagy páratlan permutációról* beszélni.

- ♣[**determináns**] Legyen $A = (a_{ij})$ egy n -edrendű kvadratikus mátrix. Az A mátrix *determinánsán* az

$$|A| := \sum_{\alpha \in S_n} (-1)^{I(\alpha)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n}$$

számot értjük, ahol az összegezés kiterjed az $1, 2, \dots, n$ számok összes $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ permutációjára, és $I(\alpha)$ az α permutáció inverzióinak számát (az inverzióban álló párok számát) jelöli.

□

♣*Másod és harmadrendű determinánsok kiszámítására* vannak egyszerű (és könnyen megjegyezhető) képletek:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

a főátlóban lévő elemek szorzatából kivonjuk a mellékátlóban lévő elemek szorzatát.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Ez a *Sarrus szabály*, melyet úgy lehet megjegyezni, hogy a determináns első két oszlopát a determináns jobboldalhoz hozzáírva képzeljük, majd a mellékátlóban és vele párhuzamosan tőle jobbra lévő két másik átlóban lévő elemeket összeszorozzuk, e szorzatokat összeadjuk, majd a mellékátlóban és vele párhuzamosan tőle jobbra lévő két másik átló elemeit összeszorozzuk, e szorzatokat kivonjuk az előző összegből.

♣**TÉTEL** [a determináns alaptulajdonságai]

- (1) *Ha egy determináns sorait és oszlopait felcseréljük, akkor a determináns értéke nem változik (vagy egy négyzetes mátrixnak és transzponáltjának determinánsa megegyezik).*

- (2) Ha egy determináns valamely sorának minden eleme tartalmaz egy c faktort, akkor ez kiemelhető a determináns jele elé.
- (3) Ha egy determináns két sorát felcseréljük akkor a determináns előjelet vált.
- (4) Ha egy determináns két sora megegyezik, akkor a determináns értéke nulla.
- (5) A determináns értéke nem változik, ha egy sorának elemeihez egy másik sor megfelelő elemeinek c -szeresét hozzáadjuk.
- (6) Ha egy determináns valamely sorának minden eleme két tag összegére bomlik, akkor a determináns felírható két olyan determináns összegeként melyeknek megfelelő sorukban éppen az egyes összeadandók állnak.
- (7) Ha egy determináns egy sorában csupa 0 áll, akkor a determináns értéke nulla.
- (8) Ha egy determináns főátlójában minden elem 1 és a determináns többi eleme 0, akkor a determináns értéke 1.

□

♣TÉTEL [a determinánsok szorzástétele] (Kvadratikus) mátrixok szorzatának determinánsa a tényezőmátrixok determinánsainak szorzata, azaz ha A, B (azonos rendű) kvadratikus mátrixok, akkor

$$|AB| = |A| \cdot |B|.$$

□

Következmény. Egy (kvadratikus) mátrix akkor és csakis akkor invertálható, ha determinánsa nem nulla.

□

- **♣[adjungált aldetermináns]** Egy n -edrendű kvadratikus $A = (a_{ij})$ mátrixból, hagyjuk el az a_{ij} elem sorát és oszlopát (azaz az i -edik sort és a j -edik oszlopot), a visszamaradó $n - 1$ -edrendű kvadratikus mátrix determinánsát $(-1)^{i+j}$ -vel megszorozva, a kapott számot az A mátrix a_{ij} eleméhez tartozó adjungált aldeterminánsnak nevezzük, és A_{ij} -vel jelöljük.

□

Az adjungált aldetermináns tehát egy részmátrix determinánsa, vagy annak negatívja, attól függően, hogy mi az elhagyott sor és oszlop indexe. Az előjel megállapítására a sakktábla szabály szolgál: helyezzük el mátrixunkat egy képzeletbeli $n \times n$ -es sakktáblán, de a mezőket színezés helyett $+$ és $-$ jelekkel látjuk el, úgy, hogy a bal felső sarokban $+$ jel van. Ha egy mezőben $+$ jel van akkor $(-1)^{i+j} = 1$, ha $-$ jel van, akkor $(-1)^{i+j} = -1$.

♣TÉTEL[kifejtési tétel] Legyen A egy n -edrendű kvadratikus mátrix, akkor

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} A_{i'j} = \begin{cases} |A| & \text{ha } i = i' \\ 0 & \text{ha } i \neq i' \end{cases}$$

ez a sor szerinti kifejtés, továbbá

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij'} = \begin{cases} |A| & \text{ha } j = j' \\ 0 & \text{ha } j \neq j' \end{cases}$$

ez az oszlop szerinti kifejtés.

□

♣TÉTEL [az inverz mátrix előállítás] Legyen A egy n -edrendű invertálható mátrix (azaz legyen $|A| \neq 0$, akkor az $A^{-1} = (b_{ij})$ inverz mátrix elemei

$$b_{ij} = \frac{A_{ji}}{|A|} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

alakúak (azaz A inverze az A adjungált aldeterminánsaiból alkotott mátrix transzponáltjának $\frac{1}{|A|}$ -szorosa).

□

- **[mátrix rangja]** Egy tetszőleges $k \times n$ típusú *mátrix rangján* oszlopvektorainak rangját értjük (ami azonos a maximális lineárisan független oszlopvektorok számával). A rangját $\text{rang } A$ -val jelöljük. $\square$

Legyen $1 \leq l \leq \min\{k, n\}$, akkor A egy l -edrendű *aldeterminánsát* úgy kapjuk, hogy kiválasztjunk a mátrix l darab sorát és l darab oszlopát, és ezek metszetében lévő elemekből alkotott l -edrendű determinánst képezzük. $\square$

TÉTEL[rangszámtétel] *Bármely (nemzérus) mátrix rangja megegyezik a maximális rendű nullától különböző aldeterminánsainak rendjével. A zérusmátrix rangja nulla.* $\square$

- **♣[lineáris egyenletrendszer]** Lineáris egyenletrendszernek nevezzük az

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n &= b_k \end{aligned}$$

egyenletrendszert, ahol a_{ij}, b_i ($i = 1, \dots, k; j = 1, \dots, n$) *adott* valós számok, x_i ($i = 1, \dots, k$) *ismeretlen* valós (vagy komplex) számok.

Az a_{ij} számokat a fenti egyenletrendszer *együtthatóinak* nevezzük (pontosabban a_{ij} a rendszer i -edik egyenletében az x_j ismeretlen együtthatója, a b_i az i -edik egyenlet *szabad tagja*).

A fenti egyenletrendszert *homogénnek* nevezzük, ha $b_1 = \cdots = b_k = 0$, ellenkező esetben *inhomogénnek* mondjuk. Azt mondjuk, hogy a $c_1, \dots, c_n$ számok az egyenletrendszer *egy megoldását* adják, ha az ismeretlenek helyére helyettesítve őket a rendszer minden egyes egyenletében egyenlőség áll.

A egyenletrendszert *szabályosnak* nevezzük, ha $k = n$, azaz ha az egyenletek és ismeretlenek száma egyenlő. $\square$

Bevezetve az

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

együtthatómátrixot, és az

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$$

oszlop mátrixokat (oszlopvektorokat) a rendszerünk tömören az

$$Ax = b$$

alakba írható. $\square$

- ♣ Két *egyenletrendszert ekvivalensnek* nevezünk, ha megoldásaik halmaza egyenlő.

Lineáris egyenletrendszerek esetén (nyilvánvaló módon) az alábbi átalakítások eredményeznek ekvivalens rendszereket (ezeket *ekvivalens átalakításoknak* mondjuk):

- az egyenletek sorrendjének megváltoztatása,
- az egyenletekben szereplő tagok sorrendjének megváltoztatása,
- a rendszer bármelyik egyenletének szorzása (minden tag szorzása) egy nemzérus számmal,
- a rendszer bármelyik egyenletének hozzáadása egy másik egyenletéhez.

$\square$

A Gauss elimináció az ismeretlenek szukcesszív kiküszöbölése.

A Gauss elimináció lépései:

Tegyük fel, hogy $a_{11} \neq 0$. Az első egyenlet $-\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ -szeresét az i -edik egyenlethez hozzáadva $i = 2, 3, \dots, k$ esetén, az x_1 ismeretlen eltűnik a második, harmadik, ... k -edik egyenletből. Ha $a_{11} = 0$, akkor az első egyenletben keresünk egy ismeretlent melynek együtthatója $\neq 0$ és ez veszi át x_1 szerepét.

Ezután a második egyenlet alkalmas konstanszorosaival a harmadik ... k -edik egyenlethez való hozzáadásával kiküszöböljük a harmadik ismeretlent a negyedik, ... k -edik egyenletből.

□

♣TÉTEL [lin. egyenletrendszer megoldhatósága] Az

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n &= b_k \end{aligned}$$

lineáris egyenletrendszer akkor is csakis akkor oldható meg, ha a

$$\text{rg}A = \text{rg}(A|b)$$

rangfeltétel teljesül, ahol A a rendszer mátrixa, $(A|b)$ a bővített mátrix, melyet az A mátrixból úgy kapunk, hogy az A mátrixhoz $n+1$ -edik oszlopként hozzáírjuk a szabad tagok b oszlopvektorát.

□

♣TÉTEL [homogén rendszernek nemtriviális megoldásának létezése] Az

$$Ax = 0 \quad (A \in \mathcal{M}_{k \times n}, x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathcal{M}_{n \times 1})$$

homogén lineáris egyenletrendszernek akkor is csakis akkor van triviálisól különböző megoldása, ha

$$\text{rang} A < n$$

(azaz a rendszer A mátrixának rangja kisebb mint az ismeretlenek száma). Ha ez teljesül, akkor a homogén rendszer összes megoldásai $\mathbb{R}^n$ -nek egy

$$n - \text{rang} A$$

dimenziós alterét alkotják.

□

TÉTEL [lin. egyenletrendszer megoldásának szerkezete] Az

$$Ax = b \quad (A \in \mathcal{M}_{k \times n}, x \in \mathcal{M}_{n \times 1}, b \in \mathcal{M}_{k \times 1})$$

inhomogén lineáris egyenletrendszer bármely x megoldása

$$x = x' + x^h$$

alakba írható, ahol x' az inhomogén egyenlet egy rögzített (partikuláris) megoldása, x^h pedig a megfelelő

$$Ax = 0$$

homogén egyenlet egy tetszőleges megoldása. Így a megoldások halmaza az utóbbi egyenletrendszer megoldásterének az x' vektorral való eltolója.

□

♣TÉTEL [Cramer szabály] Legyen A egy n -edrendű kvadratikus mátrix. A

$$Ax = b \quad (A \in \mathcal{M}_{n \times n}, x, b \in \mathcal{M}_{n \times 1})$$

(szabályos) lineáris egyenletrendszer akkor és csakis akkor határozott (egyértelműen megoldható), ha

$$|A| \neq 0.$$

Ha ez teljesül akkor a rendszer egyetlen megoldása

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

ahol A_i az a mátrix melyet az A mátrixból úgy kapunk, hogy annak i -edik oszlopát a szabad tagok b (oszlop)vektorára cseréljük ki.

□

TÉTEL [szabályos homogén egy.rendszer nemtriviális megoldásának létezése] *Legyen A egy n -edrendű kvadratikus mátrix. A*

$$Ax = 0 \quad (A \in \mathcal{M}_{n \times n}, x \in \mathcal{M}_{n \times 1})$$

(szabályos) homogén lineáris egyenletrendszernek akkor és csakis akkor van nemtriviális megoldása, ha

$$|A| = 0.$$

□

- **[lineáris leképezés]** A $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ leképezést *lineáris leképezésnek* nevezzük, ha bármely $x, y \in \mathbb{R}^n$ és bármely $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} \varphi(x + y) &= \varphi(x) + \varphi(y) & (\text{azaz } \varphi \text{ additív}), \\ \varphi(\lambda x) &= \lambda \varphi(x) & (\text{azaz } \varphi \text{ homogén}). \end{aligned}$$

□

- **[lineáris leképezés mátrixa]** A φ *lineáris leképezés mátrixán* azt az $A_\varphi = (a_{ij})$ (n -edrendű kvadratikus) mátrixot értjük, melynek j -edik oszlopában a $\varphi(b_j)$ képvektornak a $b_1, \dots, b_n$ bázisra vonatkozó koordinátái állnak.

□

Az összes $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineáris leképezések és a hozzájuk rendelt $A_\varphi \in \mathcal{M}_{n \times n}$ mátrixok közötti

$$\varphi \rightarrow A_\varphi \quad (A_\varphi = (a_{ij}), \text{ ahol } \varphi(b_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} b_i)$$

leképezés bijektív, minden φ lineáris leképezéshez egyetlen n -edrendű A_φ mátrix tartozik, és minden ilyen mátrix egyetlen lineáris leképezést határoz meg. Sőt, ez a bijektív leképezés megőrzi a mátrixműveleteket is.

□

Ha $\varphi, \psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineáris leképezések, úgy összegüket, számszorosukat és kompozíciójukat az alábbi módon értelmezzük:

$$\begin{aligned} (\varphi + \psi)(x) &:= \varphi(x) + \psi(x) & (x \in \mathbb{R}^n), \\ (\lambda \varphi)(x) &:= \lambda \varphi(x) & (\lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n), \\ (\varphi \circ \psi)(x) &:= \varphi(\psi(x)) & (x \in \mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

□

TÉTEL [a lineáris leképezések és hozzájuk tartozó mátrixok kapcsolata] *Rögzített bázis és tetszőleges $\varphi, \psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineáris leképezések esetén*

$$\begin{aligned} A_{\varphi+\psi} &= A_\varphi + A_\psi & a \varphi \rightarrow A_\varphi \text{ leképezés megtartja az összeadást,} \\ A_{\lambda\varphi} &= \lambda A_\varphi & a \varphi \rightarrow A_\varphi \text{ leképezés megtartja az számmal való szorzást,} \\ A_{\varphi \circ \psi} &= A_\varphi A_\psi & a \varphi \rightarrow A_\varphi \text{ leképezés a kompozíciót szorzatba viszi át.} \end{aligned}$$

Továbbá $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ akkor és csakis akkor bijektív, ha A_φ invertálható.

□

Tétel. *Legyen $b_1, \dots, b_n$ és $b'_1, \dots, b'_n$ az $\mathbb{R}^n$ tér két bázisa, és*

$$A_\varphi = (a_{ij}), \quad \text{ahol} \quad \varphi(b_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} b_i$$

$$A'_\varphi = (a'_{ij}), \quad \text{ahol} \quad \varphi(b'_j) = \sum_{i=1}^n a'_{ij} b'_i$$

a $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineáris leképezés mátrixai. Akkor van olyan $S = (s_{ij}) \in \mathcal{M}_{n \times n}$ invertálható mátrix, hogy

$$A'_\varphi = S^{-1} A_\varphi S.$$

□

- ♣[**mátrix sajátértéke, sajátvektora**] Legyen A egy $n \times n$ -es mátrix. A $\lambda \in \mathbb{R}$ számot A *sajátértékének* nevezzük, ha van olyan nullától különböző $x \in \mathbb{R}^n$ vektor, melyre

$$Ax = \lambda x$$

teljesül. Az x vektort A (λ sajátértékhez tartozó) *sajátvektorának* nevezzük. □

A sajátértékeket a

$$|A - \lambda E| = 0$$

egyenletből határozzuk meg, a sajátvektorokat pedig a

$$(A - \lambda E)x = 0$$

lineáris homogén egyenletrendszerből. □

- ♣[**mátrix diagonalizálhatósága**] Egy $n \times n$ -es A mátrixot *diagonalizálhatónak* nevezünk, ha van olyan invertálható $n \times n$ -es S mátrix és egy D diagonális mátrix, melyekre

$$S^{-1}AS = D$$

teljesül. □

Diagonális mátrixokra használni fogjuk a

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

jelölést is.

TÉTEL Ha A, S $n \times n$ -es mátrixok, S invertálható, akkor az A és $S^{-1}AS$ mátrixok sajátértékei megegyeznek. □

♣**TÉTEL**[a diagonalizálhatóság kritériuma] Egy $n \times n$ -es A mátrix akkor és csakis akkor diagonalizálható, ha van n lineárisan független sajátvektora, $x_1, \dots, x_n$. Ekkor

$$S^{-1}AS = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

ahol az S mátrix oszlopvektorai rendre $x_1, \dots, x_n$, a $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ számok pedig a hozzájuk tartozó sajátértékek. □

Nem minden mátrix diagonalizálható! Nincs a diagonalizálhatóságra könnyen ellenőrizhető szükséges és elegendő feltétel.

Ha az $n \times n$ -es A mátrixnak n különböző sajátértéke van, akkor A diagonalizálható. Ez elegendő, de nem szükséges feltétel.

- ♣[**szimmetrikus, ortogonális mátrixok**] Egy $n \times n$ -es A mátrixot *szimmetrikusnak* nevezünk, ha $A^\top = A$, *ortogonálisnak* nevezünk, ha $A^\top A = E$. □

Egy mátrix akkor és csakis akkor szimmetrikus, ha elemei a főátlóra nézve szimmetrikusak.

- ♣[**ortogonális vektorok**] Két ($\mathbb{R}^n$ -beli) vektort akkor mondunk *ortogonálisnak*, ha belső szorzatuk zérus. □
- ♣[**ortonormált bázis**] Az $\mathbb{R}^n$ tér egy bázisát *ortonormált bázisnak* nevezzük, ha vektorai páronként ortogonális egységvektorok. □

Azaz a $b_1, \dots, b_n$ bázis akkor és csakis akkor ortonormált ha

$$\langle b_i, b_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{ha } i = j, \\ 0 & \text{ha } i \neq j, \end{cases} \quad (i, j = 1, \dots, n).$$

Tétel. Ha $b_1, \dots, b_n$ és $b'_1, \dots, b'_n$ az $\mathbb{R}^n$ tér két ortonormált bázisa, $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ egy lineáris leképezés és $A_\varphi = (a_{ij})$, $A'_\varphi = (a'_{ij})$ a leképezés mátrixai a megfelelő bázisokra nézve, akkor a

$$A'_\varphi = S^{-1} A_\varphi S$$

transzformációs képletben szereplő S mátrix ortogonális.

□

♣TÉTEL[szimmetrikus mátrixok sajátértékei és sajátvektorai] Legyen A egy $n \times n$ -es szimmetrikus mátrix, akkor

- A sajátértékei mind valós számok,
- A különböző sajátértékeihez tartozó sajátvektorok ortogonálisak.

□

♣TÉTEL[szimmetrikus mátrixok spektráltétele] Legyen A egy $n \times n$ -es szimmetrikus mátrix, akkor létezik olyan ortogonális U mátrix, amelyre

$$U^{-1}AU = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

ahol $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ az A sajátértékei, az U mátrix i -edik oszlopa pedig a λ_i -hez tartozó sajátértéke ($i = 1, \dots, n$).

□

- **♣[bilineáris, kvadratikus függvény]** Legyen $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n \times n}$, akkor
 - a $F(x, y) := \langle Ax, y \rangle$ ($x, y \in \mathbb{R}^n$) függvényt *bilineáris függvénynek* nevezzük,
 - a $Q(x) := \langle Ax, x \rangle$ ($x \in \mathbb{R}^n$) függvényt *kvadratikus függvénynek* nevezzük.

□

Szokás $\langle Ax, y \rangle$ -t *bilineáris formának*, $\langle Ax, x \rangle$ -et *kvadratikus formának* nevezni.

Korábbi számításunkat felhasználva kapjuk, hogy

$$Q(x) = Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j,$$

Mivel $x_i x_j = x_j x_i$ így feltehető, hogy A szimmetrikus mátrix.

- **♣[pozitív, negatív definit, indefinit kvadratikus függvények]** Azt mondtuk, hogy
 - a $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ kvadratikus függvény *pozitív definit*, ha $Q(x) > 0$ minden $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$ esetén,
 - a $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ kvadratikus függvény *negatív definit*, ha $Q(x) < 0$ minden $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$ esetén,
 - a $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ kvadratikus függvény *indefinit*, ha $Q(x)$ felvesz pozitív és negatív értékeket is.

□

Hogyan lehet eldönteni azt hogy $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ pozitív, negatív, vagy indefinit?

♣TÉTEL[kritérium kvadratikus függvény definitségére] A szimmetrikus $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n \times n}$ mátrixszal képezett

$$Q(x) := \langle Ax, x \rangle \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

kvadratikus függvény akkor és csakis akkor

- pozitív definit, ha A összes sajátértéke pozitív,
- negatív definit, ha A összes sajátértéke negatív,
- indefinit, ha A -nak van pozitív és negatív sajátértéke is.

□

♣TÉTEL[kritérium kvadratikus függvény definittségére] Legyen $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n \times n}$ szimmetrikus mátrix, és legyen Δ_k ($k = 1, \dots, n$) az A mátrix bal felső $k \times k$ -s sarokmátrixának determinánsa, azaz

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \dots \quad \Delta_n = |A|$$

(Δ_k -k az A mátrix sarokfőminorjai), akkor

$$Q(x) := \langle Ax, x \rangle \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

kvadratikus függvény akkor és csakis akkor

- pozitív definit, ha $\Delta_k > 0$ ha $k = 1, \dots, n$,
- negatív definit, ha $(-1)^k \Delta_k > 0$ ha $k = 1, \dots, n$.