

A FONTOSABB DEFINÍCIÓK

A legfontosabb definíciókat ♣ jelöli.

- [Descartes szorzat] Az A és B halmazok *Descartes szorzatán* az A és B elemeiből képezett összes (a, b) $a \in A, b \in B$ rendezett párok halmazát értjük, és e halmazt $A \times B$ -vel jelöljük.
- [binér reláció] Az A és B halmazok $A \times B$ Descartes szorzatának egy R részhalmazát az A és B közötti (*binér*) *relációnak* nevezzük.
- [reláció] Ha $A = B$ akkor egy A és B közötti (binér) relációt egyszerűen *A-n értelmezett relációnak* mondunk.
- [ekvivalencia reláció] Az A halmazon értelmezett R relációt *ekvivalencia relációnak* nevezzük, ha R
 - reflexív*, azaz bármely $a \in A$ esetén $(a, a) \in R$,
 - szimmetrikus*, azaz bármely $a, b \in A$, $(a, b) \in R$ esetén $(b, a) \in R$,
 - transzitív*, azaz bármely $a, b, c \in A$, $(a, b) \in R$ és $(b, c) \in R$ esetén $(a, c) \in R$.
- [félig rendezés] Az A halmazon értelmezett R relációt *félig rendezésnek* nevezzük, ha R
 - reflexív*, azaz bármely $a \in A$ esetén $(a, a) \in R$,
 - antiszimmetrikus*, azaz bármely $a, b \in A$, $(a, b) \in R$ és $(b, a) \in R$ esetén $a = b$,
 - transzitív*, azaz bármely $a, b, c \in A$, $(a, b) \in R$ és $(b, c) \in R$ esetén $(a, c) \in R$.
- [rendezés] Az A halmazon értelmezett R félig rendezést *rendezésnek* nevezzük, ha bármely $a, b \in A$ esetén $(a, b) \in R$ vagy $(b, a) \in R$ teljesül.
- ♣[függvény] Az A és B halmazok közötti F (binér) relációt az A halmazon definiált B -beli értékű *függvénynek* (vagy A -ból B -be ható leképezésnek) nevezzük, ha minden $a \in A$ elemhez pontosan egy olyan $b \in B$ létezik, melyre $(a, b) \in F$ teljesül.
 Az $a \in A$ -hoz egyértelműen létező $b \in B$ elemet $b = F(a)$ -val szokás jelölni, az F függvény jelölésére pedig gyakran $F : A \rightarrow B$ -t használjuk.
 Az A halmazt az F függvény értelmezési tartományának nevezzük, és szoktuk $\mathcal{D}_F$ -fel is jelölni, míg az

$$\mathcal{R}_F := \{ b = F(a) : a \in A \}$$

halmazt az F függvény értékkészletének nevezzük.

- ♣[injektív függvény] Az $F : A \rightarrow B$ függvényt *injektívnek* vagy kölcsönösen egyértelműnek) nevezzük, ha bármely $a, b \in A$, $a \neq b$ esetén $F(a) \neq F(b)$.
 Ezzel ekvivalens feltétel az, hogy bármely $a, b \in A$, $F(a) = F(b)$ esetén $a = b$.
- ♣[szürjektív függvény] Az $F : A \rightarrow B$ függvényt *szürjektívnek* nevezzük, (vagy azt mondjuk, hogy F a B halmazra képez le) ha $\mathcal{R}_F = B$.
- ♣[bijektív függvény] Az $F : A \rightarrow B$ függvényt *bijektívnek* nevezzük, ha injektív és szürjektív.

- **[felülről korlátos számhalmaz]** Az $A \subset \mathbb{R}$ halmazt *felülről korlátosnak* nevezzük, ha van olyan $K \in \mathbb{R}$ szám, hogy bármely $a \in A$ esetén $a \leq K$ teljesül. A K számot az A halmaz egy felső korlátjának mondjuk.
- **[alulról korlátos számhalmaz]** Az $A \subset \mathbb{R}$ halmazt *alulról korlátosnak* nevezzük, ha van olyan $k \in \mathbb{R}$ szám, hogy bármely $a \in A$ esetén $k \leq a$ teljesül. A k számot az A halmaz egy alsó korlátjának mondjuk.
- **[korlátos számhalmaz]** Az $A \subset \mathbb{R}$ halmazt *korlátosnak* nevezzük, ha alulról és felülről is korlátos. (Ekkor van olyan $k' \in \mathbb{R}$ szám, hogy bármely $a \in A$ esetén $|a| \leq k'$ teljesül.)
- **♣[pontos alsó korlát]** Az $s \in \mathbb{R}$ számot az $A \subset \mathbb{R}$ halmaz *pontos felső korlátjának* (vagy szuprémumának) nevezzük, ha
 - (1) s az A halmaz egy felső korlátja,
 - (2) A bármely s' felső korlátja esetén $s \leq s'$.
 Jelölés: $s = \sup A$.
- **♣[pontos felső korlát]** Az $i \in \mathbb{R}$ számot az $A \subset \mathbb{R}$ halmaz *pontos alsó korlátjának* (vagy infimumának) nevezzük, ha
 - (1) i az A halmaz egy alsó korlátja,
 - (2) A bármely i' alsó korlátja esetén $i' \leq i$.
 Jelölés: $i = \inf A$.
- **[környezet]** Egy $a \in \mathbb{R}^n$ pont $\epsilon > 0$ sugarú *környezetén* a

$$G(a, \epsilon) := \{ x \in \mathbb{R}^n : d(x, a) = \|x - a\| < \epsilon \} \subset \mathbb{R}^n$$
 halmazt értjük.
- **[belső, izolált, stb. pontok]** Legyen $A \subset \mathbb{R}^n$ adott halmaz.
 - **♣** Az $a \in \mathbb{R}^n$ pontot az A halmaz *belső pontjának* nevezzük, a -nak van olyan környezete, mely A -ban van (azaz van olyan $\epsilon > 0$ hogy $G(x, \epsilon) \subset A$.)
 - Az $a \in \mathbb{R}^n$ pontot az A halmaz *izolált pontjának* nevezzük, ha $a \in A$ és a -nak van olyan környezete, melyben a -n kívül nincs más A -bel pont (azaz $a \in A$ és van olyan $\epsilon > 0$ hogy $(G(x, \epsilon) \setminus \{a\}) \cap A = \emptyset$.)
 - **♣** Az $a \in \mathbb{R}^n$ pontot az A halmaz *torlódási pontjának* nevezzük, a bármely környezetében van tőle különböző A -beli pont (azaz bármely $\epsilon > 0$ esetén $(G(x, \epsilon) \setminus \{a\}) \cap A \neq \emptyset$.)
 - Az $a \in \mathbb{R}^n$ pontot az A halmaz *határpontjának* nevezzük, a bármely környezetében van A -beli és nem A -beli pont is (azaz bármely $\epsilon > 0$ esetén $G(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$ és $G(x, \epsilon) \cap \bar{A} \neq \emptyset$, ahol $\bar{A}$ az A halmaz komplementerét jelöli.)
- **♣ [nyílt halmaz]** Egy $(A \subset \mathbb{R}^n)$ halmazt *nyíltnak* nevezünk, ha minden pontja belső pont.
- **♣ [zárt halmaz]** Egy $(A \subset \mathbb{R}^n)$ halmazt *zártnak* nevezünk, ha a komplementere nyílt.
- **[sorozat]** A természetes számok halmazán értelmezett (valós értékű) függvényeket (valós) *sorozatoknak* nevezzük.

- ♣[**konvergencia, határérték**] Az (a_n) sorozatot *konvergensnek* nevezzük, ha van olyan $a \in \mathbb{R}$ szám, hogy minden $\epsilon > 0$ -hoz van olyan $N(\epsilon) \in \mathbb{R}$ szám, hogy

$$|a_n - a| < \epsilon \quad \text{ha} \quad n > N(\epsilon).$$

Az a számot a sorozat *határértékének* nevezzük, és jelölésére $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ -t használjuk.

Egy sorozatot *divergensnek* nevezünk, ha nem konvergens.

- [végtelen sor] Egy (a_n) sorozat elemeit az összeadás jelével összekapcsolva kapott

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k := a_1 + a_2 + \dots$$

(végtelen sok tagú) összeget (végtelen) *sornak* nevezzük.

- ♣[**sor konvergenciája, összege**] A $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sort *konvergensnek* nevezzük, ha részletösszegeinek

$$s_n := \sum_{k=1}^n a_k \quad (n \in \mathbb{N})$$

sorozata konvergens. A $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ határértéket pedig a *sor összegének* nevezzük, és azt írjuk, hogy $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$.

- [abszolút, feltételes konvergencia] A $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sort *abszolút konvergensnek* nevezzük, ha a $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ sor konvergens. A $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sort *feltételesen konvergensnek* nevezzük, ha a konvergens, de nem abszolút konvergens.

- [hatványsor] Egy $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$ alakú függvénysort *hatványsornak* nevezünk.

- ♣[**függvény határértéke**] Legyen $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ és legyen $x_0 \in D'$ (a D halmaz torlódási pontja). Azt mondjuk, hogy f -nek van (véges) *határértéke* az x_0 pontban, ha van olyan $a \in \mathbb{R}$ szám, hogy minden $\epsilon > 0$ -hoz van olyan $\delta(\epsilon) > 0$, hogy

$$|f(x) - a| < \epsilon \quad \text{ha} \quad 0 < \|x - x_0\| < \delta(\epsilon) \text{ és } x \in D$$

teljesül.

Az $a \in \mathbb{R}$ számot az f függvény x_0 pontbeli határértékének nevezzük, és jelölésére az $a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ vagy $f(x) \rightarrow a$ ($x \rightarrow x_0$)-t használjuk.

- ♣[**folytonosság**] Az $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt értelmezési tartományának $x_0 \in D$ pontjában *folytonosnak* nevezzük, ha bármely $\epsilon > 0$ -hoz van olyan $\delta(\epsilon) > 0$, hogy

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon \quad \text{ha} \quad \|x - x_0\| < \delta(\epsilon) \text{ és } x \in D$$

teljesül.

• **[függvények tulajdonságai]**

- Az $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt alulról (felülről) *korlátosnak* nevezzük, ha értékkészlete alulról (felülről) korlátos.
- Az $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt *monoton növekvőnek* (csökkenőnek) nevezzük $D \subset \mathbb{R}$, ha bármely $x_1 < x_2, x_1, x_2 \in D$ esetén $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$).
- Ha bármely $x_1 < x_2, x_1, x_2 \in D$ esetén $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$) teljesül, akkor az $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt *szigorúan monoton növekvő* (csökkenő) függvénynek nevezzük.
- Azt mondjuk, hogy az $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek *lokális (helyi) maximuma* (*minimuma*) van az $x_0 \in D$ pontban, ha van olyan $\epsilon > 0$ hogy

$$f(x_0) \geq f(x) \quad (f(x_0) \leq f(x)) \text{ teljesül minden } x \in G(x_0, \epsilon) \cap D$$

esetén.

- Azt mondjuk, hogy az $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek *szigorú lokális (helyi) maximuma* (*minimuma*) van az $x_0 \in D$ pontban, ha van olyan $\epsilon > 0$ hogy

$$f(x_0) > f(x) \quad (f(x_0) < f(x)) \text{ minden } x \in G(x_0, \epsilon) \cap D, x \neq x_0$$

esetén.

- Azt mondjuk, hogy az $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek *globális (abszolút) maximuma* (*minimuma*) van az $x_0 \in D$ pontban, ha

$$f(x_0) \geq f(x) \quad (f(x_0) \leq f(x)) \text{ teljesül minden } x \in D$$

esetén.

- Azt mondjuk, hogy az $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek *szigorú globális (abszolút) maximuma* (*minimuma*) van az $x_0 \in D$ pontban, ha

$$f(x_0) > f(x) \quad (f(x_0) < f(x)) \text{ teljesül minden } x \in D, x \neq x_0$$

esetén.

- **[egyenletes folytonosság]** Azt mondjuk, hogy az $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvény *egyenletesen folytonos* a $D_1 \subset D$ halmazon, ha bármely $\epsilon > 0$ -hoz van olyan (csak ϵ -tól függő) $\delta(\epsilon) > 0$ amelyre

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon \quad \text{ha} \quad |x - y| < \delta(\epsilon) \text{ és } x, y \in D_1$$

teljesül.

- **[elemi függvény]** Az $f(x) = c$ ($x \in \mathbb{R}$), (ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstans), $f(x) = x$ ($x \in \mathbb{R}$), $f(x) = e^x$ ($x \in \mathbb{R}$), $f(x) = \sin x$ ($x \in \mathbb{R}$) függvényeket, és ezekből a

- 4 alapl művelet (összeadás, kivonás, szorzás, osztás),
- inverz és összetett függvény képzése,
- leszűkítés egy intervallumra

operációk véges sokszori alkalmazásával keletkező függvényeket *elemi függvényeknek* nevezzük.

• [inverz függvények]

$\ln x :=$ az e^x függvény inverze, $\ln :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$,

$a^x := e^{x \ln a}$ ($x \in \mathbb{R}$) ahol $a > 0$,

$\log_a x :=$ az a^x függvény inverze, ahol $0 < a \neq 1$, $\log_a :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$,

$\arcsin x :=$ a $\sin |_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$ függvény inverze, $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,

$\arccos x :=$ a $\cos |_{[0, \pi]}$ függvény inverze, $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$,

$\arctan x :=$ a $\tan |_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}$ függvény inverze, $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,

$\operatorname{arcctg} x :=$ a $\operatorname{ctg} |_{]0, \pi[}$ függvény inverze, $\operatorname{arcctg} : \mathbb{R} \rightarrow]0, \pi[$

- ♣[differenciálhatóság, derivált] Az $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ($I \subset \mathbb{R}$ egy nem elfajult intervallum) függvényt az $x_0 \in I$ pontban *differenciálhatónak* nevezzük, ha létezik a

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

(véges) határérték. Ezt a határértéket az f függvény x_0 -beli *differenciálhányadosának* vagy *deriváltjának* nevezzük, és $f'(x_0)$ -al vagy $\frac{df}{dx}(x_0)$ -al jelöljük.

- [konvex és konkáv függvény] Az $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt *konvexnek* nevezzük I -n, ha bármely $x, y \in I$ és bármely $\lambda \in [0, 1]$ esetén

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

f *konkávnak* nevezzük I -n, ha $-f$ konvex I -n.

- [inflexiós pont] Legyen $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, és x_0 első pontja I -nek. x_0 -t az f függvény *inflexiós pontjának* nevezzük, ha van olyan $\delta > 0$, hogy f konvex (vagy konkáv) $]x_0 - \delta, x_0[$ -on és konkáv (vagy konvex) $]x_0, x_0 + \delta[$ -n.

- [belső szorzat] Az $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ vektorok *skaláris vagy belső szorzatán* az $(x, y) := x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ számot nevezzük.

- ♣[totális differenciálhatóság] Az $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt az $x_0 \in D$ belső pontban (*totálisan*) *differenciálhatónak* nevezzük, ha van olyan $A = (A_1, \dots, A_n) \in \mathbb{R}^n$ (konstans) vektor és $\epsilon : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, hogy

$$f(x) - f(x_0) = (A, x - x_0) + \epsilon(x) \quad x \in D \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\epsilon(x)}{\|x - x_0\|} = 0$$

teljesül. Itt $(A, x - x_0)$ az A és $x - x_0$ vektorok belső szorzata. Az $A = (A_1, \dots, A_n)$ vektort az f függvény x_0 *pontbeli deriváltjának* nevezzük, és $f'(x_0)$ -al jelöljük.

- ♣[**iránymenti differenciálhatóság**] Az $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt az $x_0 \in D$ belső pontban az e (ahol e egy $\mathbb{R}^n$ -beli egységvektor) *irány mentén differenciálhatónak* nevezzük, ha létezik a

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + te) - f(x_0)}{t}$$

(véges) határérték. E határértéket $D_e f(x_0)$ -al jelöljük, és az f függvény e *iránymenti deriváltjának* nevezzük az x_0 pontban.

- ♣[**parciális differenciálhatóság**] Az f függvénynek a $e = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (= az i -edik tengely irányába mutató egységvektor, az i -edik komponens 1, a többi 0) irány menti deriváltját az x_0 pontban a függvény i -edik *változója szerinti parciális deriváltjának* nevezzük az x_0 pontban. Jelölésére az

$$D_i f(x_0), \quad \partial_i f(x_0), \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0), \quad f_{x_i}(x_0)$$

szimbólumokat is használjuk.

A LEGFONTOSABB TÉTELEK

Cantor-féle metszettétel. Zárt halmazok jellemzése. Bolzano-Weierstrass tétel. Monoton sorozat konvergenciája. Műveletek és konvergencia kapcsolata. Monotonitás és konvergencia kapcsolata, jeltartás, rendőr tétel. Nevezetes sorozatok konvergenciája és határértéke. Sor konvergenciájának szükséges feltétele. Leibniz tétel. Majoráns, hányados és gyök kritérium. Hatványsor konvergenciasugara. A határérték egyértelműsége, **átviteli elv**. Műveletek, monotonitás és határérték kapcsolata, rendőrtétel.

Folytonos függvények összegének számszorosának, szorzatának, hányadosának folytonossága, összetett függvény folytonossága.

Folytonos függvény jeltartósága, korlátos zárt intervallumon folytonos függvény korlátos, felveszi a függvényértékek sup, inf-jét (van maximum, minimum), egyenletesen folytonos. Egy intervallumon folytonos függvény felvesz minden közbenső értéket, ha szigorúan monoton is, akkor injektív, és inverze is folytonos, szigorúan monoton.

A derivált geometriai, fizikai jelentése, differenciálhatóságból következik a folytonosság. **Differenciálási szabályok, összeg, szorzat, tört, összetett függvény, inverz függvény differenciálhatósága, differenciálhatóság és lineáris approximálhatóság ekvivalenciája.**

Az e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\ln x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, a^x , x^α , $\log_a x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arccotg} x$ függvények differenciálhatósága és deriváltjaik.

Cauchy-féle középértéktétel, és következményei: Lagrange és Rolle tételei. A monotonitás jellemzése deriváltakkal. A L'Hospital szabály.

Differenciálható konvex és konkáv függvények jellemzése.

Taylor tétele, **a szélsőérték szükséges feltétele, a szélsőérték elegendő feltétele.**

Schwarz egyenlőtlenség, a norma tulajdonságai, vektorértékű sorozat konvergenciájának jellemzése a komponensek segítségével.

Íránymenti derivált kiszámítása ha a függvény (totálisan) differenciálható, (totálisan) differenciálhatóság és folytonosság kapcsolata, (totálisan) differenciálhatóság és parciális differenciálhatóság kapcsolata.

A vegyes parciális deriváltak függetlensége a differenciálás sorrendjétől.

A szélsőérték szükséges feltétele, a szélsőérték elegendő feltétele. több változós függvényeknél.

Szükséges feltétel a feltételes szélsőértékre, Lagrange multiplikátorok módszere.

A LEGFONTOSABB FELADATTÍPUSOK

Műveletek komplex számokkal. Sorozatok monotonitásának, korlátosságának vizsgálata, határértékének meghatározása.

Határértékek kiszámítása. Függvények ábrázolása. Differenciálás, függvényvizsgálat: monotonitás, konvexitás, szélsőérték, határérték a végtelenben. Parciális deriválás, többváltozós szélsőértékszámítás.