

Gazdasági matematika II.

Losonczi László, Pap Gyula

Debreceni Egyetem

Debrecen, 2009/10 tanév, II. félév

Félévközi kötelező házi feladatok beadási határideje:

- 1. házi feladat beadása a március 22-26 héten
- 2. házi feladat beadása a május 17-21 héten

Ezek teljesítése, valamint a gyakorlatokon való aktív részvétel (legfeljebb 3 hiányzás) szükséges az aláíráshoz! A házi feladatot a gyakorlatvezetőnek kell beadni, a házi feladat pótlásáról a beadási határidőtől való eltérésről (egyéni indokból) a gyakorlatvezető dönt. A gyakorlatvezető szűrőpróbaszerűen ellenőrzi, hogy a hallgató érti-e a beadott házi feladatok megoldását.

Félévközi (választható) vizsgadolgozatok:

- 1. dolgozat 2010. március 31, 10-12 (az anyag első feléből)
- 2. dolgozat 2010. május 26, 10-12 (az anyag második feléből)

Ha valaki az első dolgozatot megírja, de a másodikat nem, akkor nem jelent meg bejegyzést kap (az A vizsgára). A vizsgajegyet a dolgozat pontszáma alapján számoljuk ki: 0-49% elégtelen, 50-59% elégséges, 60-69% közepes, 70-79% jó, 80-100% jeles (az A vizsgánál a két dolgozat összeredményéből ugyanígy számoljuk a jegyet).

A **vizsgaidőszakban** írásbeli vizsgán értékeljük a hallgatók felkészültségét. A vizsga kb. 30% elméleti kérdést (főleg definíciókat és tételeket) és 70% feladatmegoldást tartalmaz. A vizsgajegyet ugyanúgy számoljuk ki, mint a félévközi dolgozatoknál.



LOSONCZI LÁSZLÓ

Előadáskövető jegyzet és feladatok

<http://www.math.klte.hu/~losi/huindex.htm>



LOSONCZI LÁSZLÓ ÉS PAP GYULA

Előadáskövető fóliák

<http://www.math.klte.hu/~losi/huindex.htm>

Ajánlott irodalom:

 KNUT SYDSAETER és PETER HAMMOND

Matematika közgazdászoknak
Aula, 1998.

 DENKINGER GÉZA

Analízis: gyakorlatok
Nemzeti Tankönyvkiadó, 1999.

 DENKINGER GÉZA

Valószínűségszámítás
Tankönyvkiadó, 1982.

 HATVANI LÁSZLÓ

Kalkulus közgazdászoknak
Polygon, Szeged, 2007.

Ajánlott irodalom:



KOVÁCS ZOLTÁN

Feladatgyűjtemény lineáris algebra gyakorlatokhoz
Kossuth Egyetemi Kiadó, 2005.



GÁSPÁR LÁSZLÓ

Lineáris algebra példatár
Tankönyvkiadó, 1971.



DENKINGER GÉZA

Valószínűségszámítás példatár
Tankönyvkiadó, 1971.



KOZMA LÁSZLÓ

Matematikai alapok
Studium Kiadó, 1999.

9. AZ $\mathbb{R}^k$ VEKTORTÉR

9.1 Az $\mathbb{R}^k$ vektortér fogalma

Az $\mathbb{R}^k$ vektortér

$\mathbb{R}^k := \{(x_1, x_2, \dots, x_k) : x_i \in \mathbb{R} \text{ minden } i = 1, 2, \dots, k \text{ esetén}\}.$

- Az $x = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ sorozatok **a tér pontjai**.
- Az $x_1, x_2, \dots, x_k$ számok az $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ **pont koordinátái**.
- $\mathbb{R}^k$ **pontjait vektorokként is felfoghatjuk**
(koordináta-rendszer felvétele után az egyes pontoknak a kezdőpontból hozzájuk vezető irányított szakaszt feleltetjük meg).

9. AZ $\mathbb{R}^k$ VEKTORTÉR

9.1 Az $\mathbb{R}^k$ vektortér fogalma

Összeadás $\mathbb{R}^k$ -ban

Az $x = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ és $y = (y_1, y_2, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^k$ **vektorok összege**

$$x + y := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_k + y_k).$$

Skalárral való szorzás $\mathbb{R}^k$ -ban

Az $x = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ **vektor** $\lambda \in \mathbb{R}$ **skalárral való szorzata**

$$\lambda x := (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_k).$$

9. AZ $\mathbb{R}^k$ VEKTORTÉR

9.1 Az $\mathbb{R}^k$ vektortér fogalma

Az összeadás és a skalárral való szorzás tulajdonságai

- Bármely $x, y, z \in \mathbb{R}^k$ esetén a $0 = (0, 0, \dots, 0)$ zérusvektorral és $-x := (-1)x$ ellentett vektorral

$$x + (y + z) = (x + y) + z,$$

$$x + y = y + x,$$

$$x + 0 = x,$$

$$x + (-x) = 0.$$

- Bármely $x, y \in \mathbb{R}^k$ és bármely $\lambda, \mu, 1 \in \mathbb{R}$ esetén

$$\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y,$$

$$(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x,$$

$$(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x),$$

$$1x = x.$$

9. AZ $\mathbb{R}^k$ VEKTORTÉR

9.2 Vektorok lineáris függetlensége, bázis

Lineáris kombináció

Az $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^k$ vektorok $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ együtthatókkal képezett **lineáris kombinációján** a

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n$$

vektort értjük.

Lineáris függetlenség, függőség

Az $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^k$ vektorrendszert **lineárisan függetlennek** nevezzük, ha

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n = 0$$

csak $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ esetén áll fenn.

Egy vektorrendszert **lineárisan függőnek** nevezünk, ha nem lineárisan független.

9. AZ $\mathbb{R}^k$ VEKTORTÉR

9.2 Vektorok lineáris függetlensége, bázis

Ha $a_1, \dots, a_n$ lineárisan függő, akkor léteznek olyan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ együtthatók, melyek nem mind zérusok, és

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n = 0.$$

Ezért van olyan $\ell \in \{1, 2, \dots, n\}$ index, hogy $\lambda_\ell \neq 0$, így osztva λ_ℓ -lel

$$a_\ell = -\frac{\lambda_1}{\lambda_\ell} a_1 - \dots - \frac{\lambda_{\ell-1}}{\lambda_\ell} a_{\ell-1} - \frac{\lambda_{\ell+1}}{\lambda_\ell} a_{\ell+1} - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_\ell} a_n,$$

azaz az a_ℓ vektor kifejezhető a többi vektor lineáris kombinációjaként.

Lineáris függetlenség

Az $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^k$ vektorrendszer akkor és csakis akkor lineárisan független, ha

$$b = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n, \quad b = \lambda'_1 a_1 + \dots + \lambda'_n a_n$$

csak $\lambda_1 = \lambda'_1, \dots, \lambda_n = \lambda'_n$ esetén teljesül.

9. AZ $\mathbb{R}^k$ VEKTORTÉR

9.2 Vektorok lineáris függetlensége, bázis

Az $\mathbb{R}^k$ vektortér k **dimenziós** abban az értelemben, hogy van $\mathbb{R}^k$ -ban k darab lineárisan független vektor, de bárhogyan is választunk $k + 1$ darab vektort $\mathbb{R}^k$ -ból, azok lineárisan függők.

Bázis

Az $\mathbb{R}^k$ vektortér bármely k számú lineárisan független $b_1, \dots, b_k$ vektorát a **tér bázisának** nevezzük.

Koordináták

Ha $b_1, \dots, b_k$ az $\mathbb{R}^k$ vektortér egy bázisa, akkor a tér minden v vektora egyértelműen írható

$$v = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \dots + \beta_k b_k$$

alakban. Az itt szereplő $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ skalárokat a v vektor $b_1, \dots, b_k$ bázisára vonatkozó **koordinátáinak** nevezzük.

9. AZ $\mathbb{R}^k$ VEKTORTÉR

9.2 Vektorok lineáris függetlensége, bázis

Példa. Az

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad e_2 = (0, 1, \dots, 0), \quad \dots \quad e_k = (0, 0, \dots, 1) \in \mathbb{R}^k$$

vektorok az $\mathbb{R}^k$ tér egy bázisát alkotják, melyet **természetes bázisnak** nevezünk.

Ha $v = (v_1, v_2, \dots, v_k) \in \mathbb{R}^k$, akkor

$$v = (v_1, v_2, \dots, v_k) = v_1 e_1 + v_2 e_2 + \dots + v_k e_k,$$

így v koordinátái azonosak v -nek a természetes bázisra vonatkozó koordinátáival.

9. AZ $\mathbb{R}^k$ VEKTORTÉR

9.3 Altér és rang

Altér

Az $\mathbb{R}^k$ vektortér **alterén** $\mathbb{R}^k$ olyan L részhalmazát értjük, mely nem üres és zárt az összeadásra és a skalárral való szorzásra nézve, azaz $a, b \in L$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén $a + b \in L$ és $\lambda a \in L$ teljesül.

Vektorrendszer által generált altér

Egy $a_1, a_2, \dots, a_n$ vektorrendszert tartalmazó legszűkebb alteret a **vektorrendszer által generált/kifeszített altérnek** nevezzük.

Jelölés: $\mathcal{L}(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

$$\mathcal{L}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \{\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n : \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}\},$$

azaz egy vektorrendszer által generált altér azonos a vektorrendszer vektoraiból képezhető **összes lineáris kombinációk halmazával**.

9. AZ $\mathbb{R}^k$ VEKTORTÉR

9.3 Altér és rang

Altér dimenziója

Egy L **altér dimenziója** r , ha van L -ben r darab lineárisan független vektor, de akárhogyan választunk $r + 1$ darab vektort L -ből, azok lineárisan függőek.

Vektorrendszer rangja

Egy $a_1, a_2, \dots, a_n$ **vektorrendszer rangjának** az általa generált $\mathcal{L}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ altér dimenzióját nevezzük.

Vektorrendszer rangja

Az $a_1, a_2, \dots, a_n$ vektorrendszer rangja megegyezik e rendszerből kiválasztható maximális számú, lineárisan független vektorok számával.

Vektorrendszer által generált altér

Az $a_1, a_2, \dots, a_n$ vektorrendszer által generált altér nem változik meg (és így a vektorrendszer rangja sem változik), ha

- megváltoztatjuk a vektorok sorrendjét,
- vagy valamelyik vektort egy $\lambda \neq 0$ skalárral megszorozzuk,
- vagy valamelyik vektorához egy másik vektorát hozzáadjuk.

10. DETERMINÁNSOK

10.1 Mátrix fogalma, műveletek mátrixokkal

$k \times n$ típusú (valós) mátrix

Ha $k \cdot n$ darab (valós) számot, az $\{a_{ij} : i = 1, 2, \dots, k; j = 1, 2, \dots, n\}$ számokat, k sorban és n oszlopban helyezünk el az alábbi módon:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix},$$

akkor egy $k \times n$ **típusú (valós) mátrixot** definiáltunk. Az összes $k \times n$ típusú mátrixok halmazát $\mathbb{R}^{k \times n}$ jelöli. A típus megadásánál **mindig a sorok száma** az első adat!

a_{ij} az A mátrix i -edik sorának j -edik eleme, vagy az A mátrix (i, j) -edik eleme. Használjuk az $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{k \times n}$ tömör jelölést is, ha ez nem okoz félreértést

10. DETERMINÁNSOK

10.1 Mátrix fogalma, műveletek mátrixokkal

Az $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{k \times n}$ mátrix **i -edik sorvektora/sormátrixa** és **j -edik oszlopvektora/oszlopmátrixa**

$$s_i = (a_{i1} \ a_{i2} \ \cdots \ a_{in}), \quad o_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{kj} \end{pmatrix}$$

Speciális mátrixok

- Az A mátrix **négyzetes vagy kvadratikus**, ha n sora és n oszlopa van, azaz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Diagonálisa (főátlója) : $\{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\}$.
- **n -edrendű egységmátrix:** az az n -edrendű $E = E_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ kvadratikus mátrix, melynek főátlójában csupa 1 áll, azon kívül pedig csupa 0 áll.
- **$k \times n$ típusú zérusmátrix:** az a $k \times n$ típusú $O = O_{k \times n} \in \mathbb{R}^{k \times n}$ mátrix, melynek minden eleme 0.

10. DETERMINÁNSOK

10.1 Mátrix fogalma, műveletek mátrixokkal

Mátrix transzponáltja

Az $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{k \times n}$ **mátrix transzponáltján** az

$$A^T := (a_{ji}) \in \mathbb{R}^{n \times k}$$

mátrixot értjük (a mátrix sorait és oszlopait megcserélve kapjuk a mátrix transzponáltját).

Azonos típusú mátrixok összeadása és számmal való szorzása

Legyenek $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{k \times n}$ **azonos típusú mátrixok** és legyen $\lambda \in \mathbb{R}$. Ekkor az $A + B \in \mathbb{R}^{k \times n}$ és $\lambda A \in \mathbb{R}^{k \times n}$ mátrixok definíciója:

$$A + B := (a_{ij} + b_{ij}) \in \mathbb{R}^{k \times n}, \quad \lambda A := (\lambda a_{ij}) \in \mathbb{R}^{k \times n}.$$

10. DETERMINÁNSOK

10.1 Mátrix fogalma, műveletek mátrixokkal

Az összeadás, számmal való szorzás és transzponálás tulajdonságai

Az összes $k \times n$ típusú valós mátrixok $\mathbb{R}^{k \times n}$ halmazában az összeadás és a számmal való szorzás ugyanolyan tulajdonságokkal rendelkezik, mint az $\mathbb{R}^\ell$ vektortérben.

Továbbá bármely $A, B \in \mathbb{R}^{k \times n}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$(A + B)^T = A^T + B^T, \quad (\lambda A)^T = \lambda A^T.$$

10. DETERMINÁNSOK

10.1 Mátrix fogalma, műveletek mátrixokkal

Két **mátrix szorzata csak akkor értelmezett**, ha az első mátrixnak annyi oszlopa van, mint ahány sora van a második mátrixnak.

Mátrixok szorzata

$A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{k \times n}$ és $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ mátrixok $C = AB$ **szorzatán** azt a $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{k \times m}$ mátrixot értjük, melyre

$$c_{ij} := \sum_{s=1}^n a_{is}b_{sj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

ha $i = 1, 2, \dots, k ; j = 1, 2, \dots, m$.

Ezt a szorzást röviden "**sor-oszlop kombinációnak**" mondjuk, mert a szorzatmátrix c_{ij} eleme éppen az A mátrix i -edik sorvektorának és a B mátrix j -edik oszlopvektorának a belső szorzata $\mathbb{R}^n$ -ben.

10. DETERMINÁNSOK

10.1 Mátrix fogalma, műveletek mátrixokkal

Mátrixok szorzásának tulajdonságai

$$A(BC) = (AB)C,$$

$$(A + B)C = AC + BC,$$

$$A(B + C) = AB + AC,$$

$$(AB)^{\top} = B^{\top} A^{\top},$$

$$AO = OA = O,$$

ahol A , B , C , O olyan mátrixok, melyekre a felírt műveleteknek van értelme. Kvadratikus A mátrixokra

$$AE = EA = A.$$

A mátrixszorzás **nem kommutatív**, azaz általában $AB \neq BA$.

10. DETERMINÁNSOK

10.1 Mátrix fogalma, műveletek mátrixokkal

Kvadratikus mátrix inverze

Egy A kvadratikus mátrixot **invertálhatónak nevezünk**, ha van olyan B (kvadratikus) mátrix, melyre

$$AB = BA = E$$

teljesül. Ezt a B mátrixot A **inverzének nevezzük** és A^{-1} -gyel jelöljük.

Ha A invertálható, akkor csak egy inverze van. Ugyanis, ha B' is A inverze volna, akkor $AB' = B'A = E$ miatt

$$B = BE = B(AB') = (BA)B' = EB' = B' \quad \text{azaz} \quad B = B'.$$

10. DETERMINÁNSOK

10.2 Determináns fogalma, alaptulajdonágai

Permutációk

Az $\{1, 2, \dots, n\}$ számok egy $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ elrendezését ezen elemek egy **permutációjának** nevezzük.

Az $\{1, 2, \dots, n\}$ számok összes permutációinak halmazát $\mathcal{S}_n$ jelöli.

Egy $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_n) \in \mathcal{S}_n$ permutációban a (α_i, α_j) **pár inverzióban** áll, ha $i < j$ és $\alpha_i > \alpha_j$.

Egy α permutáció inverzióinak számát (az inverzióban álló párok számát) $I(\alpha)$ jelöli.

Az $\{1, 2, \dots, n\}$ számok összes permutációinak száma $n!$.

10. DETERMINÁNSOK

10.2 Determináns fogalma, alaptulajdonágai

Determináns definíciója

Egy n -edrendű kvadratikus A mátrix *determinánsán* az

$$|A| := \sum_{\alpha \in S_n} (-1)^{l(\alpha)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n}$$

számot értjük, ahol az összegezés kiterjed az $1, 2, \dots, n$ számok összes $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ permutációjára, és $l(\alpha)$ az α permutáció inverzióinak száma.

10. DETERMINÁNSOK

10.2 Determináns fogalma, alaptulajdonágai

Másod és harmadrendű determinánsok kiszámítása a definíció alapján

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

10. DETERMINÁNSOK

10.2 Determináns fogalma, alaptulajdonágai

A determináns alaptulajdonságai

- 1 Bármely A kvadratikus mátrixra teljesül $\det(A^T) = \det(A)$.
- 2 Ha egy sor minden elemét c -vel szorozzuk, akkor a determináns értéke c -szeresére változik.
- 3 Ha két sort felcserélünk, akkor a determináns előjelet vált.
- 4 Ha két sor megegyezik, akkor a determináns értéke nulla.
- 5 A determináns értéke nem változik, ha egy sorának elemeihez egy másik sor megfelelő elemeinek c -szeresét hozzáadjuk.
- 6 Ha egy sor minden eleme két tag összegére bomlik, akkor a determináns felírható két olyan determináns összegeként, melyek megfelelő soraiban éppen az egyes összeadandók állnak.
- 7 Ha egy sorban csupa 0 áll, akkor a determináns értéke nulla.
- 8 Az egységmátrixok determinánsa 1 .

10. DETERMINÁNSOK

10.3 Kifejtési tétel, szorzástétel

Adjungált aldetermináns

Egy n -edrendű kvadratikus $A = (a_{ij})$ mátrixból, elhagyva az a_{ij} elem sorát és oszlopát, és a visszamaradó $n - 1$ -edrendű kvadratikus mátrix determinánsát $(-1)^{i+j}$ -vel megszorozva kapott számot az A mátrix a_{ij} eleméhez tartozó adjungált aldeterminánsnak nevezzük, és A_{ij} -vel jelöljük.

Kifejtési tétel

Bármely n -edrendű kvadratikus A mátrix esetén

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} = \begin{cases} |A| & \text{ha } i = i' \\ 0 & \text{ha } i \neq i' \end{cases} \quad (i, i' = 1, \dots, n, \text{ ez a sor szerinti kifejtés})$$
$$\sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij'} = \begin{cases} |A| & \text{ha } j = j' \\ 0 & \text{ha } j \neq j' \end{cases} \quad (j, j' = 1, \dots, n, \text{ ez az oszlop szerinti kifejtés})$$

10. DETERMINÁNSOK

10.3 Kifejtési tétel, szorzástétel

Determinánsok szorzástétele

Ha $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ azonos rendű kvadratikus mátrixok, akkor

$$|AB| = |A| |B|.$$

Inverz mátrix előállítása

Egy (kvadratikus) mátrix akkor és csak akkor invertálható, ha determinánsa nem nulla. Egy $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ n -edrendű invertálható kvadratikus mátrix $A^{-1} = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ inverzének elemei

$$b_{ij} = \frac{A_{ji}}{|A|} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

ahol A_{ji} a j -edik sor i -edik eleméhez tartozó adjungált aldetermináns.

10. DETERMINÁNSOK

10.4 Mátrix rangja, rangszámtétel

Mátrix rangja

Egy A **mátrix** $\text{rang}(A)$ **rangján** oszlopvektorainak rangját értjük (ami a maximális lineárisan független oszlopvektorok száma).

A zérusmátrixok rangja nulla.

Aldetermináns

Legyen $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$ egy $k \times n$ típusú mátrix, és $1 \leq \ell \leq \min\{k, n\}$. Az A **egy ℓ -edrendű aldeterminánsát** úgy kapjuk, hogy kiválasztjuk a mátrix ℓ darab sorát és ℓ darab oszlopát, és képezzük az ezek metszetében lévő elemekből alkotott ℓ -edrendű determinánst.

Rangszámtétel

Bármely (nemzérus) mátrix rangja megegyezik a maximális rendű nullától különböző aldeterminánsainak rendjével.

10. DETERMINÁNSOK

10.4 Mátrix rangja, rangszámtétel

Egy mátrix sorvektorainak rangja egyenlő az oszlopvektorainak rangjával. Egy (kvadratikus) mátrix akkor és csak akkor invertálható, ha a mátrix oszlopvektorai (vagy sorvektorai) lineárisan függetlenek.

11. LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK

11.1 Lineáris egyenletrendszer fogalma, Gauss-elimináció

Lineáris egyenletrendszernek nevezzük az

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n = b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{k1} x_1 + a_{k2} x_2 + \cdots + a_{kn} x_n = b_k$$

egyenletrendszert, ahol a_{ij}, b_i ($i = 1, \dots, k; j = 1, \dots, n$) **adott** valós számok, x_i ($i = 1, \dots, n$) **ismeretlen** valós számok.

Az a_{ij} számokat a rendszer **együtthatóinak** nevezzük, b_i az i -edik egyenlet **szabad tagja**.

Az egyenletrendszert **homogénnek** nevezzük, ha $b_1 = \cdots = b_k = 0$, ellenkező esetben **inhomogénnek** mondjuk.

Az egyenletrendszert **szabályosnak** nevezzük, ha $k = n$, azaz ha az egyenletek és ismeretlenek száma egyenlő.

11. LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK

11.1 Lineáris egyenletrendszer fogalma, Gauss-elimináció

Tömören:

$$Ax = b,$$

ahol

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k \times n},$$

$$x := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 1}, \quad b := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k \times 1}.$$

11. LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK

11.1 Lineáris egyenletrendszer fogalma, Gauss-elimináció

Alapvető kérdések:

- Van-e az egyenletrendszernek megoldása, és ha igen, akkor egyértelmű-e?
- Hogyan határozhatjuk meg az összes megoldást?

Egy (lineáris) egyenletrendszer

- **megoldható**, ha van megoldása;
- **ellentmondásos**, ha nincs megoldása;
- **határozott**, ha pontosan egy megoldás létezik;
- **határozatlan**, ha több megoldás van.

11. LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK

11.1 Lineáris egyenletrendszer fogalma, Gauss-elimináció

Ekvivalens átalakítások

Két **egyenletrendszert ekvivalensnek** nevezünk, ha megoldásaik halmaza egyenlő.

Ekvivalens átalakítások

Lineáris egyenletrendszerek esetén az alábbi átalakítások ekvivalens rendszereket eredményeznek:

- *az egyenletek sorrendjének megváltoztatása;*
- *az egyenletekben szereplő tagok sorrendjének megváltoztatása;*
- *a rendszer bármelyik egyenletének szorzása (minden tag szorzása) egy nemzérus számmal;*
- *a rendszer bármelyik egyenletének hozzáadása egy másik egyenletéhez.*

11. LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK

11.1 Lineáris egyenletrendszer fogalma, Gauss-elimináció

Trapéz alakú lineáris egyenletrendszer

Az egyenletrendszert akkor nevezzük **trapéz alakúnak**, ha van olyan $r \in \{1, \dots, n\}$ szám, hogy

- $a_{11} \neq 0, a_{22} \neq 0, \dots, a_{rr} \neq 0,$
- $a_{ij} = 0$, ha $i = 1, 2, \dots, r$ és $j < i$,
- $a_{ij} = 0$, ha $i > r$ és $j = 1, 2, \dots, n$.

Ha $r = n$, akkor a rendszert **háromszögalakúnak** nevezzük.

11. LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK

11.1 Lineáris egyenletrendszer fogalma, Gauss-elimináció

Gauss-elimináció

Az ismeretlenek szukcesszív (fokozatos) kiküszöbölésével az egyenletrendszert trapéz alakra hozzuk a következő lépésekkel:

- Tegyük fel, hogy $a_{11} \neq 0$. Az első egyenlet $-\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ -szeresét az i -edik egyenlethez hozzáadva $i = 2, 3, \dots, k$ esetén, az x_1 ismeretlen eltűnik a második, harmadik, $\dots$ k -edik egyenletből. Ha $a_{11} = 0$, akkor az első egyenletben keresünk egy ismeretlent, melynek együtthatója $\neq 0$, és ez veszi át x_1 szerepét.
- Ezután a második egyenlet alkalmas konstanszorosainak a harmadik $\dots$ k -edik egyenlethez való hozzáadásával kiküszöböljük a harmadik ismeretlent a negyedik, $\dots$ k -edik egyenletből.
- Az eljárást hasonlóan folytatjuk, míg van mit kiküszöbölni.

11. LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK

11.1 Lineáris egyenletrendszer fogalma, Gauss-elimináció

Trapéz alakú lineáris egyenletrendszer megoldhatósága

Egy trapéz alakú egyenletrendszernek

- *akkor és csakis akkor van megoldása, ha a trapéz alakban az $r + 1$ -edik egyenlettől kezdve a szabad tagok mind nullák;*
- *megoldható esetben akkor és csakis akkor van pontosan egy megoldása, ha $r = n$, azaz ha a rendszer háromszögalakú;*
- *akkor és csakis akkor van több megoldása, ha $r < n$; ebben az esetben végtelen sok megoldása van, és a megoldások egy $n - r$ paraméteres sereget alkotnak.*

11. LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK

11.2 Lineáris egyenletrendszerek megoldhatósága

Lineáris egyenletrendszer megoldhatósága

Az $Ax = b$ ($A \in \mathbb{R}^{k \times n}$, $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $b \in \mathbb{R}^{k \times 1}$) *inhomogén lineáris egyenletrendszernek akkor és csak akkor van megoldása, ha a*

$$\text{rang } A = \text{rang } (A | b)$$

rangfeltétel teljesül, ahol A a rendszer együtthatómátrixa, $(A | b)$ pedig a bővített mátrix, melyet az A mátrixból úgy kapunk, hogy az A mátrixhoz $n + 1$ -edik oszlopként hozzáírjuk a szabad tagok b oszlopvektorát.

11. LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK

11.2 Lineáris egyenletrendszerek megoldhatósága

Homogén rendszer esetén (amikor $b_1 = \dots = b_k = 0$), mindig van megoldás: az $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ **triviális megoldás**.

Homogén rendszer nemtriviális megoldásának létezése

Az $Ax = 0$ ($A \in \mathbb{R}^{k \times n}$, $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$) *homogén lineáris egyenletrendszernek akkor és csak akkor van triviálistól különböző megoldása, ha*

$$\text{rang } A < n,$$

azaz ha a rendszer A mátrixának rangja kisebb mint az ismeretlenek száma. Ha ez teljesül, akkor a homogén rendszer összes megoldásai $\mathbb{R}^n$ -nek egy

$$n - \text{rang } A$$

dimenziós alterét alkotják.

11. LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK

11.2 Lineáris egyenletrendszerek megoldhatósága

Lineáris egyenletrendszer megoldáshalmazának szerkezete

Az

$$Ax = b \quad (A \in \mathbb{R}^{k \times n}, \quad x \in \mathbb{R}^{n \times 1}, \quad b \in \mathbb{R}^{k \times 1})$$

inhomogén lineáris egyenletrendszer bármely x megoldása

$$x = x' + x^h$$

alakba írható, ahol x' az inhomogén egyenlet egy **rögzített** (partikuláris) megoldása, x^h pedig a megfelelő

$$Ax = 0$$

homogén egyenletrendszer egy tetszőleges megoldása. Így a megoldások halmaza a homogén egyenletrendszer megoldásterének az x' vektorral való eltoltja.

11. LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK

11.3 Cramer-szabály lineáris egyenletrendszerek megoldására

Cramer-szabály

Legyen A egy n -edrendű kvadratikus mátrix. Az

$$Ax = b \quad (A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad x \in \mathbb{R}^{n \times 1}, \quad b \in \mathbb{R}^{n \times 1})$$

(szabályos) lineáris egyenletrendszernek akkor és csak akkor van pontosan egy megoldása, ha

$$|A| \neq 0.$$

Ha ez teljesül, akkor a rendszer egyetlen megoldása

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

ahol A_i az a mátrix, melyet az A mátrixból úgy kapunk, hogy annak i -edik oszlopát a szabad tagok b (oszlop)vektorára cseréljük ki.

11. LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK

11.3 Cramer-szabály lineáris egyenletrendszerek megoldására

Szabályos homogén lineáris egyenletrendszer nemtriviális megoldásának létezése

Legyen A egy n -edrendű kvadratikus mátrix. Az

$$Ax = 0 \quad (A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad x \in \mathbb{R}^{n \times 1})$$

(szabályos) homogén lineáris egyenletrendszernek akkor és csakis akkor van nemtriviális megoldása, ha

$$|A| = 0.$$

12. LINEÁRIS TRANSZFORMÁCIÓK

12.1 Lineáris leképezés és mátrixa

Lineáris leképezés/operátor/transzformáció

A $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ leképezést **lineáris leképezésnek** nevezzük, ha bármely $x, y \in \mathbb{R}^n$ és bármely $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}\varphi(x + y) &= \varphi(x) + \varphi(y) && \text{(azaz } \varphi \text{ additív),} \\ \varphi(\lambda x) &= \lambda \varphi(x) && \text{(azaz } \varphi \text{ homogén).}\end{aligned}$$

12. LINEÁRIS TRANSZFORMÁCIÓK

12.1 Lineáris leképezés és mátrixa

Lineáris leképezés megadása mátrix segítségével

Ha $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineáris leképezés, $b_1, \dots, b_n$ az $\mathbb{R}^n$ egy bázisa, és $A_\varphi = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ az a mátrix, melyre

$$\varphi(b_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} b_i \quad \text{minden } j = 1, \dots, n \text{ esetén,}$$

akkor minden $x = \sum_{j=1}^n x_j b_j \in \mathbb{R}^n$ esetén $\varphi(x) = y = \sum_{i=1}^n y_i b_i$, ahol

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \quad \text{minden } i = 1, \dots, n \text{ esetén.}$$

Bizonyítás:

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^n x_j \varphi(b_j) = \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^n a_{ij} b_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) b_i.$$

12. LINEÁRIS TRANSZFORMÁCIÓK

12.1 Lineáris leképezés és mátrixa

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

azaz mátrixos formában:

$$\varphi(x) = y = A_\varphi x.$$

Lineáris leképezés mátrixa

Azt mondjuk, hogy az A_φ (n -edrendű kvadratikus) mátrix a φ **lineáris leképezés mátrixa a $b_1, \dots, b_n$ bázisban.**

Rögzített bázis esetén a $\varphi \mapsto A_\varphi$ hozzárendelés kölcsönösen egyértelmű a $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineáris leképezések és az $A_\varphi \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixok között.

12. LINEÁRIS TRANSZFORMÁCIÓK

12.1 Lineáris leképezés és mátrixa

Lineáris leképezések összege, számszorosa és kompozíciója

$$(\varphi + \psi)(x) := \varphi(x) + \psi(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n),$$

$$(\lambda\varphi)(x) := \lambda\varphi(x) \quad (\lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n),$$

$$(\varphi \circ \psi)(x) := \varphi(\psi(x)) \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

A $\varphi \mapsto A_\varphi$ hozzárendelés tulajdonságai

Rögzített bázis és tetszőleges $\varphi, \psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineáris leképezések esetén

$$A_{\varphi+\psi} = A_\varphi + A_\psi,$$

$$A_{\lambda\varphi} = \lambda A_\varphi,$$

$$A_{\varphi \circ \psi} = A_\varphi A_\psi.$$

Továbbá $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ akkor és csak akkor kölcsönösen egyértelmű, ha A_φ invertálható.

12. LINEÁRIS TRANSZFORMÁCIÓK

12.1 Lineáris leképezés és mátrixa

Lineáris leképezés mátrixa különböző bázisokban

Legyen $b_1, \dots, b_n$ és $b'_1, \dots, b'_n$ az $\mathbb{R}^n$ tér két bázisa, és

$$A_\varphi = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \text{ahol} \quad \varphi(b_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} b_i,$$

$$A'_\varphi = (a'_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \text{ahol} \quad \varphi(b'_j) = \sum_{i=1}^n a'_{ij} b'_i$$

a $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineáris leképezés mátrixai. Akkor van olyan $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertálható mátrix, hogy

$$A'_\varphi = S^{-1} A_\varphi S.$$

12. LINEÁRIS TRANSZFORMÁCIÓK

12.2 Sajátértékek és sajátvektorok

Kvadratikus mátrix sajátértéke, sajátvektora

A $\lambda \in \mathbb{R}$ számot az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix **sajátértékének** nevezzük, ha van olyan nullától különböző $x \in \mathbb{R}^n$ vektor, melyre

$$Ax = \lambda x$$

teljesül. Az x vektort az A mátrix λ sajátértékéhez tartozó **sajátvektorának** nevezzük.

Más alakban:

$$(A - \lambda E)x = 0.$$

Ennek a homogén lineáris egyenletrendszernek akkor és csakis akkor van nemtriviális megoldása, ha

$$\det(A - \lambda E) = 0.$$

Ezt a determinánst kifejtve egy λ -ban n -edfokú polinomot kapunk. Ennek zérushelyei adják A sajátértékeit.

12. LINEÁRIS TRANSZFORMÁCIÓK

12.3 Mátrixok diagonális alakra hozása

Diagonális mátrix

Egy $n \times n$ -es D mátrixot **diagonálisnak** nevezünk, ha a főátlón kívüli elemei mind zérusok. Jelölés:

$$\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Kvadratikus mátrix diagonális alakra hozása

Egy $n \times n$ -es A mátrixot **diagonalizálhatónak** (diagonális alakra hozhatónak) nevezünk, ha van olyan invertálható $n \times n$ -es S mátrix és egy D diagonális mátrix, melyekre

$$S^{-1}AS = D.$$

12. LINEÁRIS TRANSZFORMÁCIÓK

12.3 Mátrixok diagonális alakra hozása

Ha A és S két $n \times n$ -es mátrix és S invertálható, akkor az A és $S^{-1}AS$ mátrixok sajátértékei megegyeznek.

Bizonyítás:

$$\begin{aligned}\det(S^{-1}AS - \lambda E) &= \det(S^{-1}AS - S^{-1}(\lambda E)S) = \det(S^{-1}(A - \lambda E)S) \\ &= \det(S^{-1}) \det(A - \lambda E) \det(S) = \det(A - \lambda E).\end{aligned}$$

A diagonalizálhatóság kritériuma

Egy $n \times n$ -es A mátrix akkor és csak akkor diagonalizálható, ha van n lineárisan független sajátvektora, $x_1, \dots, x_n$. Ekkor

$$S^{-1}AS = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

ahol az S mátrix oszlopvektorai rendre $x_1, \dots, x_n$, a $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ számok pedig a hozzájuk tartozó sajátértékek.

12. LINEÁRIS TRANSZFORMÁCIÓK

12.4 Szimmetrikus és ortogonális mátrixok

Szimmetrikus és ortogonális mátrixok

Egy kvadratikus A mátrixot **szimmetrikusnak** nevezünk, ha $A^T = A$, illetve **ortogonálisnak** nevezünk, ha $A^T A = E$.

Ortogonalis/merőleges vektorok

Az $x, y \in \mathbb{R}^n$ vektorok akkor **ortogonálisak**, ha $\langle x, y \rangle = 0$.

Ortogonalis mátrixok

Egy kvadratikus A mátrix esetén a következő állítások ekvivalensek:

- A ortogonális;
- A invertálható, és $A^{-1} = A^T$;
- A sorvektorai egységvektorok és páronként ortogonálisak;
- A oszlopvektorai egységvektorok és páronként ortogonálisak.

12. LINEÁRIS TRANSZFORMÁCIÓK

12.4 Szimmetrikus és ortogonális mátrixok

Szimmetrikus mátrixok sajátértékei és sajátvektorai

Ha A egy kvadratikus szimmetrikus mátrix, akkor

- *A sajátértékei mind valós számok;*
- *A különböző sajátértékeihez tartozó sajátvektorok ortogonálisak.*

Szimmetrikus mátrixok spektráltétele

Ha A egy $n \times n$ -es szimmetrikus mátrix, akkor létezik olyan ortogonális U mátrix, amelyre

$$U^{-1} A U = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

ahol $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ az A sajátértékei, az U mátrix i -edik oszlopa pedig a λ_i -hez tartozó sajátvektora ($i = 1, \dots, n$).

12. LINEÁRIS TRANSZFORMÁCIÓK

12.5 Kvadratikus függvények

Bilineáris és kvadratikus függvények

Ha $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, akkor

- az $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x, y) := \langle Ax, y \rangle$, $(x, y \in \mathbb{R}^n)$ függvényt **bilineáris függvénynek/formának** nevezzük;
- a $Q : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $Q(x) := \langle Ax, x \rangle$, $(x \in \mathbb{R}^n)$ függvényt **kvadratikus függvénynek/formának** nevezzük.

12. LINEÁRIS TRANSZFORMÁCIÓK

12.5 Kvadratikus függvények

Tehát ha $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, akkor

$$Q(x) = Q(x_1, \dots, x_n) = \langle Ax, x \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j,$$

így feltehető, hogy A **szimmetrikus mátrix**. Ezért létezik olyan U ortogonális mátrix, melyre

$$U^{-1} A U = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

ahol $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ az A sajátértékei. Innen

$$A = U D U^{-1} = U D U^{\top},$$

ezért $y := U^{\top} x$ jelöléssel

$$Q(x) = \langle Ax, x \rangle = \langle U D U^{\top} x, x \rangle = \langle D U^{\top} x, U^{\top} x \rangle = \langle D y, y \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2.$$

Ezt a Q kvadratikus forma **kanonikus alakjának** nevezzük.

12. LINEÁRIS TRANSZFORMÁCIÓK

12.5 Kvadratikus függvények

Kvadratikus függvény pozitív/negatív definitisége

Egy szimmetrikus $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixszal képezett

$$Q(x) := \langle Ax, x \rangle \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

kvadratikus függvényt

- **pozitív definitnek nevezünk**, ha $Q(x) > 0$ minden $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ mellett,
- **negatív definitnek nevezünk**, ha $Q(x) < 0$ minden $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ mellett,
- **indefinitnek nevezünk**, ha Q felvesz pozitív és negatív értékeket is.

12. LINEÁRIS TRANSZFORMÁCIÓK

12.5 Kvadratikus függvények

Kritérium kvadratikus függvény definitségére

Egy szimmetrikus $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixszal képezett

$$Q(x) := \langle Ax, x \rangle \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

kvadratikus függvény akkor és csak akkor

- **pozitív definit**, ha A összes sajátértéke pozitív,
- **negatív definit**, ha A összes sajátértéke negatív,
- **indefinit**, ha A -nak van pozitív és negatív sajátértéke is.

12. LINEÁRIS TRANSZFORMÁCIÓK

12.5 Kvadratikus függvények

Kritérium kvadratikus függvény definitségére

Legyen $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ szimmetrikus mátrix, és legyen Δ_k ($k = 1, \dots, n$) az A mátrix bal felső k -adrendű sarokdeterminánsa (sarokfőminora), azaz

$$\Delta_1 := a_{11}, \quad \Delta_2 := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \dots \quad \Delta_n := |A|,$$

akkor a

$$Q(x) := \langle Ax, x \rangle \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

kvadratikus függvény akkor és csakis akkor

- **pozitív definit**, ha $\Delta_k > 0$ minden $k = 1, \dots, n$ esetén;
- **negatív definit**, ha $(-1)^k \Delta_k > 0$ minden $k = 1, \dots, n$ esetén.

13. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

13.1 Metrika és topológia $\mathbb{R}^k$ -ban

Skaláris/belső szorzás $\mathbb{R}^k$ -ban

Az $x = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ és $y = (y_1, y_2, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^k$ **vektorok skaláris vagy belső szorzata**

$$\langle x, y \rangle := x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_k y_k.$$

A skaláris/belső szorzás tulajdonságai

Bármely $x, y, z \in \mathbb{R}^k$ és bármely $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle,$$

$$\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle,$$

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle,$$

$$\langle x, x \rangle \geq 0, \quad \text{és} \quad \langle x, x \rangle = 0 \text{ akkor és csakis akkor, ha } x = 0.$$

13. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

13.1 Metrika és topológia $\mathbb{R}^k$ -ban

Cauchy-Schwarz-egyenlőtlenség

Bármely két $x, y \in \mathbb{R}^k$ vektor esetén $|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}$.

Vektor hossza/normája

Az $x = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ vektor hossza/normája $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

A hossz/norma tulajdonságai

Bármely $x, y \in \mathbb{R}^k$ és bármely $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$\|x\| \geq 0$, és $\|x\| = 0$ akkor és csakis akkor, ha $x = 0$,

$\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$,

$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

13. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

13.1 Metrika és topológia $\mathbb{R}^k$ -ban

Pontok távolsága

Az $x, y \in \mathbb{R}^k$ pontok **távolsága** $d(x, y) := \|x - y\|$.

Pont (nyílt) környezete

Egy $a \in \mathbb{R}^k$ **pont** $\varepsilon > 0$ **sugarú (nyílt) környezetén** a

$$K(a, \varepsilon) := \{x \in \mathbb{R}^k : d(x, a) = \|x - a\| < \varepsilon\}$$

halmazt értjük.

$k = 1$ esetén $K(a, \varepsilon)$ az a pontra nézve **szimmetrikus** 2ε hosszúságú $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ **nyílt intervallum**.

$k = 2$ esetén $K(a, \varepsilon)$ az $a = (a_1, a_2)$ pont körüli ε sugarú **nyílt körlap**.

$k = 3$ esetén $K(a, \varepsilon)$ az $a = (a_1, a_2, a_3)$ pont körüli ε sugarú **nyílt gömb**.

13. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

13.1 Metrika és topológia $\mathbb{R}^k$ -ban

- Az $a \in \mathbb{R}^k$ pontot az $A \subset \mathbb{R}^k$ **halmaz belső pontjának** nevezzük, ha a -nak van olyan környezete, mely A -ban van (azaz van olyan $\varepsilon > 0$, hogy $K(a, \varepsilon) \subset A$).
- Az $a \in \mathbb{R}^k$ pontot az $A \subset \mathbb{R}^k$ **halmaz izolált pontjának** nevezzük, ha $a \in A$, és a -nak van olyan környezete, melyben a -n kívül nincs A -beli pont (azaz $a \in A$, és van olyan $\varepsilon > 0$, hogy $(K(a, \varepsilon) \setminus \{a\}) \cap A = \emptyset$).
- Az $a \in \mathbb{R}^k$ pontot az $A \subset \mathbb{R}^k$ **halmaz torlódási pontjának** nevezzük, ha a bármely környezetében van tőle különböző A -beli pont (azaz bármely $\varepsilon > 0$ esetén $(K(a, \varepsilon) \setminus \{a\}) \cap A \neq \emptyset$).
- Az $a \in \mathbb{R}^k$ pontot az $A \subset \mathbb{R}^k$ **halmaz határpontjának** nevezzük, ha a bármely környezetében van A -beli és nem A -beli pont is (azaz bármely $\varepsilon > 0$ esetén $K(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ és $K(a, \varepsilon) \cap \bar{A} \neq \emptyset$, ahol $\bar{A} := \mathbb{R}^k \setminus A$ az A halmaz komplementere).

13. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

13.1 Metrika és topológia $\mathbb{R}^k$ -ban

- Az $A \subset \mathbb{R}^k$ halmazt **nyílt**nek nevezzük, ha minden pontja belső pontja A -nak.
- Az $A \subset \mathbb{R}^k$ halmazt **zárt**nek nevezzük, ha komplementere nyílt.

13. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

13.1 Metrika és topológia $\mathbb{R}^k$ -ban

Sorozat $\mathbb{R}^k$ -ban

Egy $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^k$ függvényt $\mathbb{R}^k$ -beli **sorozatnak** nevezünk. Jelölés: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ahol $a_n := a(n)$, és $a_n = (a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nk})$, ha $n \in \mathbb{N}$.

Konvergens sorozat $\mathbb{R}^k$ -ban

Az $\mathbb{R}^k$ -beli $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sortozatot **konvergensnek** nevezzük, ha van olyan $b \in \mathbb{R}^k$, hogy bármely $\varepsilon > 0$ -hoz létezik olyan $N(\varepsilon) \in \mathbb{R}$ szám, hogy

$$\|a_n - b\| < \varepsilon \quad \text{amennyiben} \quad n > N(\varepsilon).$$

A b pontot a sorozat **határértékének** (limeszének) nevezzük. Jelölés:

$$a_n \rightarrow b \quad \text{ha} \quad n \rightarrow \infty, \quad \text{vagy} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b.$$

Egy $\mathbb{R}^k$ -beli sortozatot **divergensnek** nevezünk, ha nem konvergens.

13. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

13.1 Metrika és topológia $\mathbb{R}^k$ -ban

$\mathbb{R}^k$ -beli konvergencia = koordinátánkénti konvergencia

$$a_n = (a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nk}) \rightarrow b = (b_1, b_2, \dots, b_k) \quad \text{ha} \quad n \rightarrow \infty$$

akkor és csakis akkor, ha

$$a_{ni} \rightarrow b_i \quad \text{ha} \quad n \rightarrow \infty \quad \text{minden } i = 1, 2, \dots, k \text{ esetén.}$$

Ez azt jelenti, hogy egy vektorsorozat akkor és csakis akkor konvergens, ha a sorozat minden koordinátája konvergens, és határértéke a határvektor megfelelő koordinátája.

13. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

13.2 Többváltozós függvény határértéke és folytonossága

Egy $D \subset \mathbb{R}^k$ halmaz torlódási pontjainak halmazát D' -vel jelöljük.

Többváltozós függvény határértéke

Legyen $f : D \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ és legyen $x_0 \in D'$. Azt mondjuk, hogy f -nek van (véges, vagy végtelen) **határértéke** az x_0 pontban, ha van olyan $a \in \mathbb{R}_b$ bővített valós szám, hogy bármely olyan D -beli $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatra, melyre $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ és $x_n \neq x_0$, teljesül a $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$ egyenlőség.

$a \in \mathbb{R}_b$ -t az f függvény x_0 pontbeli határértékének nevezzük és $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ -vel, vagy $f(x) \rightarrow a$ ($x \rightarrow x_0$)-vel jelöljük.

13. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

13.2 Többváltozós függvény határértéke és folytonossága

Átfogalmazás

Másképpen megfogalmazva: az f függvény értelmezési tartományának egy $x_0 \in \mathbb{R}_b$ torlódási pontjában akkor és csakis akkor lesz f határértéke az $a \in \mathbb{R}_b$ bővített valós szám, ha az értelmezési tartományból bármely x_0 -hoz konvergáló $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatot véve, melynek elemei x_0 -tól különbözőek, a függvényértékek $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ sorozata a -hoz tart.

Határérték egyértelműsége

Függvény határértéke, ha létezik, akkor egyértelmű.

Határérték **létezhet az x_0 pontban akkor is, ha a függvény nincs értelmezve a pontban**, de torlódási pontja annak (egy halmaz torlódási pontja ugyanis nem feltétlenül pontja a halmaznak).

A műveletek, egyenlőtlenségek és határérték kapcsolata most is érvényes.

13. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

13.2 Többváltozós függvény határértéke és folytonossága

Függvény folytonossága

Az $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt **folytonosnak** nevezzük az $x_0 \in D$ pontban, ha bármely D -beli x_0 -hoz konvergáló $D \ni x_n \rightarrow x_0$ ($n \rightarrow \infty$) sorozat esetén a függvényértékek $f(x_n)$ ($n \in \mathbb{N}$) sorozata az x_0 pontbeli függvényértékhez tart, azaz $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Röviden: az f függvény $x_0 \in D$ pontbeli folytonossága azt jelenti, hogy ha $D \ni x_n \rightarrow x_0$ ($n \rightarrow \infty$) akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = f(x_0)$.

- Ha $x_0 \in D \cap D'$, akkor f folytonos x_0 -ban akkor, és csakis akkor, ha $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.
- Ha $x_0 \in D$, de $x_0 \notin D'$, akkor x_0 a D **izolált pontja**, izolált pontokban f a definíció alapján mindig folytonos.

Folytonos függvények tulajdonságai ugyanazok, mint az egyváltozós esetben.

13. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

13.3 Többváltozós függvények differenciálhatósága

(Totális) differenciálhatóság

Az $f : D \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt az $x_0 \in D$ belső pontban **(totálisan) differenciálhatónak** nevezzük, ha van olyan $A \in \mathbb{R}^k$ vektor, hogy

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \langle A, x - x_0 \rangle}{\|x - x_0\|} = 0.$$

Az $f'(x_0) := A$ vektort az f függvény x_0 **pontbeli deriváltjának** nevezzük.

GEOMETRIAI JELENTÉS: a függvény $f(x) - f(x_0)$ növekményét az $\langle f'(x_0), x - x_0 \rangle$ lineáris függvény jól közelíti x_0 közelében; a függvény által meghatározott felületnek x_0 -ban **van érintősíkja**, mégpedig az

$$x_{k+1} = f(x_0) + \langle f'(x_0), x - x_0 \rangle$$

hipersík az $\mathbb{R}^{k+1}$ térben.

13. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

13.3 Többváltozós függvények differenciálhatósága

Írány menti differenciálhatóság

Legyen $e \in \mathbb{R}^k$ egy egységvektor, azaz $\|e\| = 1$. Az $f : D \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt az $x_0 \in D$ belső pontban az e **irány mentén differenciálhatónak** nevezzük, ha létezik a

$$D_e f(x_0) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + te) - f(x_0)}{t}$$

(véges) határérték, melyet az f függvény e **iránymenti deriváltjának** nevezünk az x_0 pontban.

$D_e f(x_0)$ jelentése: az f **függvény változási sebessége** az e irányában.

13. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

13.3 Többváltozós függvények differenciálhatósága

Parciális derivált

Legyen $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, és legyen $u_i \in \mathbb{R}^k$ az i -edik tengely irányába mutató egységvektor (az u_i vektor i -edik koordinátája 1, a többi 0).

Az $f : D \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek az $x_0 \in D$ belső pontban létezik az **i -edik változója szerinti parciális deriváltja**, ha differenciálható az u_i irányban. Jelölése: $\partial_i f(x_0) := D_{u_i} f(x_0)$.

Egyéb jelölések: $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ és $f_{x_i}(x_0)$

Parciális differenciálhatóság

Az $f : D \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt az $x_0 \in D$ belső pontban **parciálisan differenciálhatónak** nevezzük, ha $\partial_i f(x_0)$ minden $i = 1, 2, \dots, k$ esetén létezik.

13. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

13.3 Többváltozós függvények differenciálhatósága

Parciális derivált kiszámítása

Mivel $x_i = x_{0i} + t$ helyettesítéssel

$$\begin{aligned}\partial_i f(x_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_{01}, \dots, x_{0i} + t, \dots, x_{0k}) - f(x_{01}, \dots, x_{0i}, \dots, x_{0k})}{t} \\ &= \lim_{x_i \rightarrow x_{0i}} \frac{f(x_{01}, \dots, x_i, \dots, x_{0k}) - f(x_{01}, \dots, x_{0i}, \dots, x_{0k})}{x_i - x_{0i}},\end{aligned}$$

így az i -edik változó szerinti parciális deriváltat úgy számítjuk ki, hogy az i -edik változó szerint deriválunk, miközben a többi változót konstansnak tekintjük.

13. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

13.3 Többváltozós függvények differenciálhatósága

Írány menti derivált kiszámítása

Ha $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ az $x_0 \in D$ belső pontban (totálisan) differenciálható, akkor bármely $e \in \mathbb{R}^k$ egységvektor iránya mentén is differenciálható x_0 -ban, és

$$D_e f(x_0) = \langle f'(x_0), e \rangle.$$

Ha $e = u_i$ az i -edik tengely irányába mutató egységvektor, akkor

$$\partial_i f(x_0) = D_{u_i} f(x_0) = \langle f'(x_0), u_i \rangle,$$

így $e = (e_1, e_2, \dots, e_k) = e_1 u_1 + e_2 u_2 + \dots + e_k u_k$ alapján

$$D_e f(x_0) = \partial_1 f(x_0) e_1 + \partial_2 f(x_0) e_2 + \dots + \partial_k f(x_0) e_k.$$

Ezért (totális) differenciálhatóság $\implies$ parciális differenciálhatóság.

Az is következik, hogy

$$f'(x_0) = (\partial_1 f(x_0), \dots, \partial_k f(x_0)),$$

így az $f'(x_0)$ (totális) derivált (vektor) koordinátái a parciális deriváltak.

13. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

13.3 Többváltozós függvények differenciálhatósága

(Totális) differenciálhatóság $\implies$ folytonosság

Ha $f : D \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ az $x_0 \in D$ belső pontban (totálisan) differenciálható, akkor f folytonos x_0 -ban.

parciális differenciálhatóság $\nRightarrow$ folytonosság

parciális derivált folytonossága $\implies$ (totális) differenciálhatóság

Ha az $f : D \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek az $x_0 \in D$ belső pont egy környezetében folytonos parciális deriváltjai vannak (ekkor azt mondjuk, hogy a függvény folytonosan parciálisan differenciálható e környezetben), akkor f az x_0 pontban (totálisan) differenciálható (így folytonos is).

13. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

13.3 Többváltozós függvények differenciálhatósága

Láncszabály: összetett függvény differenciálhatósága

Ha mindegyik $j = 1, 2, \dots, \ell$ esetén a $g_j : D \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ függvények differenciálhatók az $x_0 \in D$ belső pontban, és $f : E \subset \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható az $y_0 := g(x_0) \in E$ belső pontban, ahol a $g : D \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ függvény értelmezése $x \in D$ esetén $g(x) := (g_1(x), g_2(x), \dots, g_\ell(x))$, akkor létezik olyan $\varepsilon > 0$, hogy $g(K(x_0, \varepsilon)) \subset E$, így a

$$h : K(x_0, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) := f(g(x)) \text{ ha } x \in K(x_0, \varepsilon)$$

összetett függvény differenciálható az x_0 pontban, és

$$\partial_i h(x_0) = \sum_{j=1}^{\ell} \partial_j f(g(x_0)) \partial_i g_j(x_0) \quad \text{ha } i = 1, 2, \dots, k.$$

13. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

13.4 Magasabbrendű parciális deriváltak

Magasabbrendű parciális deriváltak

Tegyük fel, hogy az $f : D \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek az $x_0 \in D$ belső pont egy környezetében létezik az i -edik változó szerinti $\partial_i f$ parciális deriváltja. Ha ez parciálisan differenciálható a j -edik változó szerint, úgy a deriválást elvégezve kapjuk a

$$\partial_j \partial_i f(x_0) := \partial_j(\partial_i f(x_0))$$

második parciális deriváltját f -nek az x_0 pontban az i -edik és j -edik változók szerint (ebben a sorrendben!).

Hasonlóan, ha a $\partial_j \partial_i f(x)$ derivált létezik x_0 egy környezetében és ez parciálisan differenciálható az l -edik változó szerint, úgy a deriválást elvégezve kapjuk a

$$\partial_l \partial_j \partial_i f(x_0) := \partial_l(\partial_j \partial_i f(x_0))$$

harmadik parciális deriváltat. Hasonlóan értelmezhetjük a negyedrendű stb. parciális deriváltakat is. Egyéb jelölések a parciális deriváltakra: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)$, ill. $f_{x_i, x_j}(x_0)$.

13. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

13.4 Magasabbrendű parciális deriváltak

Példa. Számítsuk ki az

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) := x^2 + y^2 e^{xy}$$

függvény összes első- és másodrendű parciális deriváltját, és hasonlítsuk össze a $\partial_1 \partial_2 f(x, y)$ és $\partial_2 \partial_1 f(x, y)$ vegyes deriváltakat.

Young tétel: a vegyes parciális deriváltak függetlensége a deriválás sorrendjétől

Ha az $f : D \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek az $x_0 \in D$ belső pont egy környezetében valamely $m \geq 2$ esetén az összes m -edik parciális deriváltja létezik és az x_0 pontban azok folytonosak, akkor az f függvény m -edik parciális deriváltjai az x_0 pontban a differenciálás sorrendjétől függetlenek.

13. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

13.5 Többváltozós függvények szélsőértéke

Azt mondjuk, hogy az $f : D \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek az $x_0 \in D$ pontban

- **lokális/helyi maximuma (minimuma)** van, ha $\exists \varepsilon > 0$, hogy

$$f(x_0) \geq f(x) \quad (f(x_0) \leq f(x)) \quad \forall x \in K(x_0, \varepsilon) \cap D \text{ esetén.}$$

- **szigorú lokális/helyi maximuma (minimuma)** van, ha $\exists \varepsilon > 0$, hogy

$$f(x_0) > f(x) \quad (f(x_0) < f(x)) \quad \forall x \in K(x_0, \varepsilon) \cap D, x \neq x_0 \text{ esetén.}$$

- **globális/abszolút maximuma (minimuma)** van, ha

$$f(x_0) \geq f(x) \quad (f(x_0) \leq f(x)) \quad \forall x \in D \text{ esetén.}$$

- **szigorú globális/abszolút maximuma (minimuma)** van, ha

$$f(x_0) > f(x) \quad (f(x_0) < f(x)) \quad \forall x \in D, x \neq x_0 \text{ esetén.}$$

13. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

13.5 Többváltozós függvények szélsőértéke

A szélsőérték létezésének elegendő feltétele

Korlátos, zárt halmazon folytonos függvény felveszi a függvényértékek infimumát és szuprémumát függvényértékként, ami azt jelenti, hogy a függvénynek van minimuma és maximuma (az illető korlátos, zárt halmazon).

A szélsőérték létezésének szükséges feltétele

Ha az $f : D \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek az $x_0 \in D$ belső pontban lokális szélsőértéke van, és léteznek f első parciális deriváltjai x_0 -ban, akkor

$$\partial_1 f(x_0) = \partial_2 f(x_0) = \dots = \partial_k f(x_0) = 0.$$

(E feltételnek eleget tevő x_0 pontokat az f függvény **stacionárius pontjainak** nevezzük.)

13. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

13.5 Többváltozós függvények szélsőértéke

A szélsőérték létezésének másodrendű elegendő feltétele

Tegyük fel, hogy az $f : D \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ összes második parciális deriváltja folytonos az $x_0 \in D$ belső pont egy környezetében, továbbá

$$\partial_1 f(x_0) = \partial_2 f(x_0) = \dots = \partial_k f(x_0) = 0.$$

1 Ha a

$$Q : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}, \quad Q(h) = Q(h_1, \dots, h_k) := \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^k \partial_j \partial_i f(x_0) h_i h_j$$

kvadratikus függvény **pozitív definit**, azaz $Q(h) > 0$ ha $h \in \mathbb{R}^k$ és $h \neq 0$, akkor f -nek **szigorú lokális minimuma** van x_0 -ban.

2 Ha Q **negatív definit**, azaz $Q(h) < 0$ minden $h \in \mathbb{R}^k$, $h \neq 0$ esetén, akkor f -nek **szigorú lokális maximuma** van x_0 -ban.

3 Ha Q **indefinit**, azaz $Q(h)$ felvesz pozitív és negatív értéket is, akkor f -nek **nincs szélsőértéke** x_0 -ban.

13. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

13.5 Többváltozós függvények szélsőértéke

Másodrendű elegendő feltétel, determinánsokkal

Tegyük fel, hogy az $f : D \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ összes második parciális deriváltja folytonos az $x_0 \in D$ belső pont egy környezetében, továbbá

$$\partial_1 f(x_0) = \partial_2 f(x_0) = \dots = \partial_k f(x_0) = 0.$$

Legyen $A = (\partial_i \partial_j f(x_0)) \in \mathbb{R}^{k \times k}$ az f függvény x_0 pontbeli második parciális deriváltjaiból álló mátrix, és legyen Δ_j ($j = 1, \dots, k$) az A bal felső j -edrendű sarokdeterminánsa, azaz

$$\Delta_1 := \partial_1 \partial_1 f(x_0), \quad \Delta_2 := \begin{vmatrix} \partial_1 \partial_1 f(x_0) & \partial_1 \partial_2 f(x_0) \\ \partial_2 \partial_1 f(x_0) & \partial_2 \partial_2 f(x_0) \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad \Delta_k := |A|.$$

- ❶ Ha $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0, \dots, \Delta_k > 0$, akkor f -nek **szigorú lokális minimuma** van x_0 -ban,
- ❷ ha $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \dots, (-1)^k \Delta_k > 0$, akkor f -nek **szigorú lokális maximuma** van x_0 -ban.

13. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

13.5 Kétváltozós függvények szélsőértéke

Kétváltozós függvény szélsőértéke

Tegyük fel, hogy az $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ összes második parciális deriváltja folytonos az $x_0 \in D$ belső pont egy környezetében, továbbá

$$\partial_1 f(x_0) = \partial_2 f(x_0) = 0.$$

1 Ha $\Delta_1 = \partial_1 \partial_1 f(x_0) > 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} \partial_1 \partial_1 f(x_0) & \partial_1 \partial_2 f(x_0) \\ \partial_1 \partial_2 f(x_0) & \partial_2 \partial_2 f(x_0) \end{vmatrix} > 0$,

akkor f -nek **szigorú lokális minimuma** van x_0 -ban,

2 ha $\Delta_1 = \partial_1 \partial_1 f(x_0) < 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} \partial_1 \partial_1 f(x_0) & \partial_1 \partial_2 f(x_0) \\ \partial_1 \partial_2 f(x_0) & \partial_2 \partial_2 f(x_0) \end{vmatrix} > 0$,

akkor f -nek **szigorú lokális maximuma** van x_0 -ban,

3 ha $\Delta_2 = \begin{vmatrix} \partial_1 \partial_1 f(x_0) & \partial_1 \partial_2 f(x_0) \\ \partial_1 \partial_2 f(x_0) & \partial_2 \partial_2 f(x_0) \end{vmatrix} < 0$,

akkor f -nek **nincs szélsőértéke** x_0 -ban.

Példa.

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) := x^3 + y^3 - 3xy$$

lokális szélsőértékeinek meghatározása.

13. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

13.5 Többváltozós függvények feltételes szélsőértéke

Többváltozós függvények feltételes szélsőértéke

Legyenek $f : D \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$, $g_i : D \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ $i = 1, \dots, l$, $l < k$ adott függvények. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az $x_0 \in D$ pontban a $g_1(x) = 0$, $g_2(x) = 0$, $\dots$, $g_l(x) = 0$ feltételek mellett **lokális/helyi feltételes maximuma (minimuma)** van, ha $g_1(x_0) = \dots = g_l(x_0) = 0$, és van olyan $\varepsilon > 0$ hogy

$$f(x_0) \geq f(x) \quad (f(x_0) \leq f(x)) \text{ teljesül minden } x \in D \cap K(x_0, \varepsilon)$$

mellett, melyre $g_1(x) = \dots = g_l(x) = 0$. Ha $g_1(x_0) = \dots = g_l(x_0) = 0$, és $f(x_0) > f(x)$ ($f(x_0) < f(x)$) teljesül minden $x_0 \neq x \in D \cap K(x_0, \varepsilon)$ mellett, melyre $g_1(x) = \dots = g_l(x) = 0$, akkor **szigorú lokális feltételes maximum (minimum)**-ról beszélünk.

13. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

13.5 Többváltozós függvények feltételes szélsőértéke

A feltételes szélsőérték szükséges feltétele

- Tegyük fel, hogy az $f, g_i : D \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, \dots, l$, $l < k$), az f függvénynek az első parciális deriváltjai folytonosak az $x_0 \in D$ belső egy környezetében
- f -nek az $x_0 \in D$ pontban a $g_1(x) = 0$, $g_2(x) = 0$, $\dots$, $g_l(x) = 0$ feltételek mellett lokális feltételes szélsőértéke van,
- a
$$\begin{pmatrix} \partial_1 g_1(x_0) & \cdots & \partial_k g_1(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 g_l(x_0) & \cdots & \partial_k g_l(x_0) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{l \times k}$$
 mátrix rangja l .

Akkor van olyan $\lambda_0 = (\lambda_{01}, \dots, \lambda_{0l}) \in \mathbb{R}^l$ pont, hogy az

$$L(\lambda, x) := f(x) + \lambda_1 g_1(x) + \cdots + \lambda_l g_l(x) \quad (\lambda \in \mathbb{R}^l, x \in D)$$

függvényre $\partial_1 L(\lambda_0, x_0) = \cdots = \partial_{l+k} L(\lambda_0, x_0) = 0$.

13. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

13.5 Többváltozós függvények feltételes szélsőértéke

A $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ számokat Lagrange-féle multiplikátoroknak nevezzük, az L függvényt pedig a feltételes szélsőérték probléma **Lagrange-féle függvényének** nevezzük.

A feltételes szélsőérték probléma megoldása úgy történik, hogy a

$$\partial_1 L(\lambda, x) = \dots = \partial_{l+k} L(\lambda, x) = 0$$

$l + k$ egyenletből álló rendszert (**melynek első l db. egyenlete éppen $g_1(x) = \dots = g_l(x) = 0$**) megoldjuk a $\lambda_1, \dots, \lambda_l, x_1, \dots, x_k$, ismeretlenekre, a $(\lambda_0, x_0) = (\lambda_{01}, \dots, \lambda_{0l}, x_{01}, \dots, x_{0k}) \in \mathbb{R}^l \times D$ megoldások a Lagrange függvény stacionárius pontjai. Ennek az $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0k})$ koordinátái adják a **feltételes szélsőérték lehetséges helyeit**.

13. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

13.5 Többváltozós függvények feltételes szélsőértéke

A feltételes szélsőérték elegendő feltétele

- Tegyük fel, hogy az $f, g_i : D \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, \dots, l$, $l < k$), második parciális deriváltjai folytonosak az $x_0 \in D$ belső pont egy környezetében,
- $(\lambda_0, x_0) \in \mathbb{R}^l \times D$ a Lagrange függvény stacionárius pontja, azaz a
$$\partial_1 L(\lambda_0, x_0) = \dots = \partial_{l+k} L(\lambda_0, x_0) = 0$$
rendszer megoldása,

- és
$$\begin{vmatrix} \partial_{k-l+1} g_1(x_0) & \dots & \partial_k g_1(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{k-l+1} g_l(x_0) & \dots & \partial_k g_l(x_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Ha $\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k h_i h_j \partial_i \partial_j f(x_0) > 0$ (< 0) minden olyan

$h = (h_1, \dots, h_k) \in \mathbb{R}^k$, $h \neq 0$ esetén, melyre $\sum_{j=1}^k h_j \partial_j g_i(x_0) = 0$ minden $i = 1, \dots, l$ mellett, akkor f -nek **szigorú lokális feltételes minimuma (maximuma)** van x_0 -ban.

13. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

13.5 Többváltozós függvények feltételes szélsőértéke

A feltételes szélsőérték elégséges feltétele determinánsokkal

Legyen Δ_j , ($j = 2l + 1, \dots, l + k$) a

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \partial_1 g_1(x_0) & \cdots & \partial_k g_1(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \partial_1 g_l(x_0) & \cdots & \partial_k g_l(x_0) \\ \partial_1 g_1(x_0) & \cdots & \partial_1 g_l(x_0) & \partial_{l+1} \partial_{l+1} L(\lambda_0, x_0) & \cdots & \partial_{l+1} \partial_{l+k} L(\lambda_0, x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_k g_1(x_0) & \cdots & \partial_k g_l(x_0) & \partial_{l+k} \partial_{l+1} L(\lambda_0, x_0) & \cdots & \partial_{l+k} \partial_{l+k} L(\lambda_0, x_0) \end{pmatrix}$$

szimmetrikus **blokkmátrix** bal felső $j \times j$ -s sarokmátrixának determinánsa.

- 1 Ha $(-1)^l \Delta_j > 0$ minden $j = 2l + 1, \dots, l + k$ esetén, akkor f -nek **szigorú lokális feltételes minimuma** van x_0 -ban.
- 2 Ha $(-1)^{l+j} \Delta_j > 0$ minden $j = 2l + 1, \dots, l + k$ esetén, akkor f -nek **szigorú lokális feltételes maximuma** van x_0 -ban.

13. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

13.5 Többváltozós függvények feltételes szélsőértéke

A blokkmátrix másik alakja

Vegyük észre, hogy blokkmátrixunk éppen az $L(\lambda, x)$ Lagrange függvény összes második parciális deriváltjaiból álló mátrix a (λ_0, x_0) stacionárius pontban véve, azaz a $(\partial_i \partial_j L(\lambda_0, x_0)) \in \mathbb{R}^{(l+k) \times (l+k)}$ mátrix.

Példa. Határozzuk meg az

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) := x + 2y$$

feltételes szélsőértékeit a

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad \text{körvonal}$$

feltétel mellett.

13. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

13.5 Többváltozós függvények feltételes szélsőértéke

Megoldás. A probléma Lagrange függvénye

$$L(\lambda, x, y) = x + 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 1) \quad ((\lambda, x, y) \in \mathbb{R}^3).$$

A lehetséges szélsőértékhelyeket a

$$\begin{aligned}\partial_\lambda L(\lambda, x, y) &= x^2 + y^2 - 1 = 0, & \partial_x L(\lambda, x, y) &= 1 + 2\lambda x = 0, \\ \partial_y L(\lambda, x, y) &= 2 + 2\lambda y = 0\end{aligned}$$

megoldásai adják. Könnyű kiszámolni, hogy a megoldások:

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad x_1 = -\frac{\sqrt{5}}{5}, \quad y_1 = -\frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\lambda_2 = -\frac{\sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{\sqrt{5}}{5}, \quad y_2 = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

a feltételes szélsőérték lehetséges helyei.

13. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

13.5 Többváltozós függvények feltételes szélsőértéke

Azt, hogy feltételes maximum vagy minimum van-e ezen pontokban a fenti tétel alapján döntjük el. Az L második parciális deriváltjaiból felépített a blokkmátrix (a (λ, x, y) pontban)

$$\begin{pmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 2\lambda \end{pmatrix}.$$

13. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

13.5 Többváltozós függvények feltételes szélsőértéke

Most $k = 2, l = 1$, mivel $2l + 1 = 3 = k + l$ így csak az blokkmátrix determinánsának előjelét kell meghatározni. Egyszerű számítás mutatja, hogy ez

$$\Delta_3(\lambda_1, x_1, y_1) = \frac{1}{\sqrt{5^3}} \begin{vmatrix} 0 & -2 & -4 \\ -2 & 5 & 0 \\ -4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \frac{-100}{\sqrt{5^3}} < 0$$

és hasonlóan $\Delta_3(\lambda_2, x_2, y_2) = \frac{100}{\sqrt{5^3}}$ vagyis a

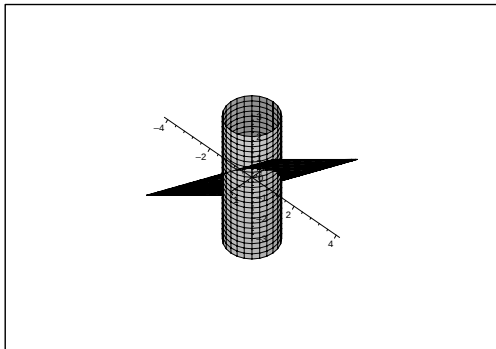
$(-1)^l \Delta_{k+l} = (-1) \Delta_3(\lambda_1, x_1, y_1) > 0$ feltétel teljesül, (x_1, y_1) -ben szigorú feltételes lokális minimum van, míg a

$(-1)^{l+(l+k)} \Delta_3(\lambda_2, x_2, y_2) = (-1)^4 \Delta_3(\lambda_2, x_2, y_2) > 0$ ezért (x_2, y_2) -ben szigorú feltételes lokális maximum van.

13. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

13.5 Többváltozós függvények feltételes szélsőértéke

Megjegyzés. Érdeemes a feladatot geometriailag is szemléltetni: az $f(x, y) = x + 2y$ sík és az $x^2 + y^2 = 1$ által meghatározott hengerfelület metszészvonala (mely egy az $\mathbb{R}^3$ térbeli ellipszis) melyik pontja van "legmagasabban" és "legalacsonyabban" (a magasságot a z tengely irányában mérve).



14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.1 Véletlen kísérletek, eseményalgebrák

Véletlen események

Valószínűsége **véletlen eseményeknek** van,

- melyekről nem tudjuk előre megmondani, hogy bekövetkeznek-e, vagy sem;
- és amelyek
 - vagy **véletlen jelenségek** megfigyelésével kapcsolatosak (amikor a körülményeket nem tudjuk befolyásolni),
 - vagy pedig **véletlen kimenetelű kísérletekkel** kapcsolatosak (amikor befolyásolni tudjuk a körülményeket).

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.1 Véletlen kísérletek, eseményalgebrák

Példák:

- Minőségellenőrzés: n termékből kiválasztunk m darabot ($m \leq n$), és megszámloljuk, hogy hány selejtes van;
lehetséges kimenetek: az $\Omega := \{0, 1, 2, \dots, m\}$ halmaz elemei;
- Hagyományos lottó: megjelölünk 5 számot 90-ből, és megszámloljuk, hogy hány találatunk van;
lehetséges kimenetek: az $\Omega := \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ halmaz elemei;
- Ragályos fertőzés terjedése, csapadékmennyiség alakulása, szeizmográf mozgása, sorhosszúság alakulása pénztáraknál, szerencsejátékok, tőzsdei áringadozások.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.1 Véletlen kísérletek, eseményalgebrák

- **Elemi események:** a kísérlet/megfigyelés lehetséges kimenetelei.
- **Eseménytér:** az elemi események halmaza; jelölés: Ω .
- **Esemény:** az eseménytér bizonyos $A \subset \Omega$ részhalmaza, amit úgy értünk, hogy ha az $\omega \in \Omega$ elemi esemény következik be, akkor
 - $\omega \in A$ esetén bekövetkezik az A esemény is,
 - $\omega \notin A$ esetén az A esemény nem következik be.
- **Biztos esemény:** amely mindig bekövetkezik; be lehet azonosítani az $\Omega \subset \Omega$ részhalmazzal.
- **Lehetetlen esemény:** amely sohasem következik be; be lehet azonosítani az $\emptyset \subset \Omega$ üres részhalmazzal.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.1 Véletlen kísérletek, eseményalgebrák

Logikai műveletek eseményekkel

- Minden A eseménnyel kapcsolatban tekinthetjük az A **ellentett (komplementer) eseményét**: ez pontosan akkor következik be, amikor az A esemény nem következik be; jelölése: $\bar{A}$.
- Az A és B események **összege (uniója)** az az esemény, amely pontosan akkor következik be, amikor az A és B események közül legalább az egyik bekövetkezik; jelölése: $A + B$ vagy $A \cup B$.
- Az A és B események **szorzata (metszete)** az az esemény, amely pontosan akkor következik be, amikor az A és B események mindegyike bekövetkezik; jelölése: $A \cdot B$ vagy $A \cap B$.
- Az A és B események **különbsége** az az esemény, mely pontosan akkor következik be, amikor az A esemény bekövetkezik, a B esemény pedig nem; jelölése: $A - B$ vagy $A \setminus B$.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.1 Véletlen kísérletek, eseményalgebrák

A logikai műveletek tulajdonságai

- kommutativitás: $A + B = B + A,$
 $A \cdot B = B \cdot A.$
- asszociativitás: $A + (B + C) = (A + B) + C,$
 $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C.$
- idempotencia: $A + A = A,$
 $A \cdot A = A.$
- disztributivitás: $A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C),$
 $A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C).$
- de Morgan-féle azonosságok: $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B},$
 $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}.$
- különbség: $A - B = A \cdot \overline{B}.$

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.1 Véletlen kísérletek, eseményalgebrák

Diszjunkt események

Azt mondjuk, hogy az A és B események **diszjunktak (kizárják egymást)**, ha egyszerre nem következhetnek be.

Az A és B események akkor és csak akkor diszjunktak, ha $A \cdot B = \emptyset$.

$\Rightarrow$

Azt mondjuk, hogy az A esemény **maga után vonja** a B eseményt, ha az A esemény bekövetkezése esetén mindig bekövetkezik a B esemény is; jelölése: $A \Rightarrow B$.

A következő állítások ekvivalensek:

- $A \Rightarrow B$;
- $A \subset B$;
- $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.1 Véletlen kísérletek, eseményalgebrák

Eseményalgebra

Egy Ω eseménytér bizonyos eseményeiből álló $\mathcal{A}$ rendszert **eseményalgebrának** nevezünk, ha tartalmazza a biztos eseményt, és zárt a komplementerképzésre és a véges unióképzésre.

Például Ω összes részhalmazainak $\mathcal{A} := 2^\Omega$ rendszere

σ -algebra

Egy eseményalgebrát **σ -algebrának** nevezünk, ha zárt a megszámlálható unióképzésre.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.1 Véletlen kísérletek, eseményalgebrák

Példák:

- 1 Egy pénzdarab feldobása esetén

$$\Omega = \{\text{fej}, \text{írás}\}.$$

De lehet a fejhez a 0, az íráshoz pedig az 1 számot hozzárendelni, és így

$$\Omega = \{0, 1\}.$$

Nyilván

$$\mathcal{A} = 2^{\Omega} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \Omega\}.$$

Ekkor az elemi események száma: $|\Omega| = 2$, az összes események száma pedig $|2^{\Omega}| = 4$.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.1 Véletlen kísérletek, eseményalgebrák

2 n -szer **egymás után dobva** egy pénzdarabbal:

$$\Omega = \{\omega = (a_1, a_2, \dots, a_n) : a_1, a_2, \dots, a_n \in \{0, 1\}\}.$$

Ekkor $|\Omega| = 2^n$, $|2^\Omega| = 2^{2^n}$.

Ha n darab egyforma pénzdarabot **egyidőben dobunk fel**, akkor is lehet ugyanezt az eseményteret tekinteni, hiszen a kísérlet kimenetelét nem változtatja meg, ha megszámozzuk a pénzdarabokat. De lehet csak a megkülönböztethető kimenetekre szorítkozni: ezek száma $n + 1$. Az első eseménytér általában alkalmasabb, mert például szabályos pénzdarab esetén az elemi események egyforma esélyűek!

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.1 Véletlen kísérletek, eseményalgebrák

- 8 Egy zsákban n különböző színű golyó van. Kihúzzunk ezek közül k darabot; négy lehetőség van aszerint, hogy **visszatevéssel** vagy **visszatevés nélkül** húzzunk (az utóbbi esetben $k \leq n$ szükséges), és aszerint, hogy a **sorrend számít** vagy a **sorrend nem számít**.

Ez a kísérlet ekvivalens azzal a kísérlettel, amikor n rekeszbe helyezünk el k tárgyat; az előbbi négy lehetőség annak felel meg, hogy egy rekeszbe több tárgy is kerülhet vagy csak egy, illetve a tárgyak meg vannak különböztetve, vagy nem.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.1 Véletlen kísérletek, eseményalgebrák

	sorrend számít (variáció)	sorrend nem számít (kombináció)	
visszatevés nélkül (ismétlés nélkül)	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$	egy rekeszbe legfeljebb egy tárgy kerülhet
visszatevéssel (ismétléses)	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$	egy rekeszbe több tárgy is kerülhet
	a tárgyak különbözőek	a tárgyak nem különböznek	

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.1 Véletlen kísérletek, eseményalgebrák

- Ha n különböző elem közül húzunk visszatevés nélkül úgy, hogy a sorrend számít, és kihúzzuk az összes n elemet (ami azzal ekvivalens, hogy n elemet sorbaállítunk; ezeket **permutációknak** nevezzük), akkor a lehetőségek száma

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n,$$

hiszen az első húzásnál még n lehetőség van, a másodiknál $n - 1$, stb., és ezek szorzata adja az eredményt.

- Ha n különböző elem közül k elemet húzunk visszatevés nélkül (ahol $k \leq n$) úgy, hogy a sorrend számít (ezeket **ismétlés nélküli variációknak** nevezzük), akkor a lehetőségek száma

$$n(n-1) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!},$$

amit az előzőhöz hasonló gondolatmenettel bizonyíthatunk.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.1 Véletlen kísérletek, eseményalgebrák

- Ha n különböző elem közül k elemet húzunk visszatevéssel úgy, hogy a sorrend számít (ezeket **ismétléses variációknak** nevezzük), akkor a lehetőségek száma

$$n^k,$$

hiszen minden húzásnál n lehetőség van.

- Ha n különböző elem közül k elemet húzunk visszatevés nélkül (ahol $k \leq n$) úgy, hogy a sorrend nem számít (ezeket **ismétlés nélküli kombinációknak** nevezzük), akkor a lehetőségek száma

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!},$$

hiszen a megfelelő ismétlés nélküli variációkat úgy lehet megkapni, hogy a kihúzott k elemet az összes lehetséges módon sorbarakjuk; ezek száma pedig mindig $k!$.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.1 Véletlen kísérletek, eseményalgebrák

- Ha n különböző elem közül k elemet húzunk visszatevéssel úgy, hogy a sorrend nem számít (ezeket **ismétléses kombinációknak** nevezzük), akkor a lehetőségek száma

$$\binom{n+k-1}{k}.$$

Ezt úgy lehet belátni, hogy a kísérlet kimeneteleihez egyértelműen hozzá lehet rendelni egy olyan sorozatot, mely $n-1$ darab egyesből és k darab nullából áll, mégpedig úgy, hogy az első egyes elé írt nullák száma (ami 0 is lehet) jelenti az első fajta elemből húzottak számát, az első és második egyes közé írt nullák száma jelenti a második fajta elemből húzottak számát, stb., az $(n-1)$ -edik egyes után írt nullák száma jelenti az n -edik fajta elemből húzottak számát; az ilyen nulla–egy sorozatok száma pedig nyilván $\binom{n+k-1}{k}$, hiszen azt kell megmondani, hogy az $n+k-1$ hely közül melyik k helyre kerüljön nulla.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.1 Véletlen kísérletek, eseményalgebrák

- 4 Adva van n kártya; ezeket osztjuk szét k játékos között úgy, hogy sorban $n_1, n_2, \dots, n_k$ kártyát kapjanak, ahol $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$, és az egy játékoshoz kerülő lapok sorrendje nem számít (ezeket **ismétléses permutációknak** nevezzük). Ekkor az eseménytér elemeinek száma

$$|\Omega| = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!},$$

hiszen a kártyák $n!$ számú permutációit úgy lehet ezekből a leosztásokból megkapni, hogy az egy játékoshoz került $n_1, n_2, \dots, n_k$ kártyát tetszőleges sorrendbe helyezzük.

- 5 Addig dobálunk egy érmével, míg az első fejet sikerül elérni. Ekkor

$$\Omega = \{f, if, iif, iiif, \dots, i_\infty\},$$

ahol i_∞ azt a lehetséges kimenetelt jelöli, amikor csak írást dobunk a végtelenségig.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.2 Valószínűség

Gyakoriság, relatív gyakoriság

Ha egy A eseménnyel kapcsolatban n darab véletlen, független kísérletet hajtunk végre, akkor A **gyakorisága** az a szám, ahányszor A bekövetkezik; ez egy **véletlen mennyiség**, melynek lehetséges értékei: $0, 1, \dots, n$; jelölése: $k_n(A)$.

Az A esemény **relatív gyakorisága**: $r_n(A) := \frac{k_n(A)}{n}$.

Tapasztalat:

ha n -et növeljük, azaz egyre több kísérletet hajtunk végre, akkor az A esemény relatív gyakorisága egyre kisebb kilengésekkel ingadozik egy $P(A)$ szám körül; ezt nevezzük A **valószínűségének**.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.2 Valószínűség

Relatív gyakoriság tulajdonságai

- $0 \leq r_n(A) \leq 1$ tetszőleges A esemény esetén.
- $r_n(\emptyset) = 0$, $r_n(\Omega) = 1$.
- ha A és B egymást kizáró események, akkor

$$r_n(A \cup B) = r_n(A) + r_n(B).$$

- ha $A_1, A_2, \dots$ páronként egymást kizáró események, akkor

$$r_n\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} r_n(A_j).$$

- $r_n(\bar{A}) = 1 - r_n(A)$ tetszőleges A esemény esetén.
- ha $A \subset B$ események, akkor $r_n(A) \leq r_n(B)$.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.2 Valószínűség

Valószínűségi mező

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ hármas, ahol

- Ω egy nemüres halmaz (az eseménytér);
- $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$ az Ω bizonyos részhalmazából álló σ -algebra (az események rendszere);
- $P : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ olyan leképezés, melyre
 - 1 $P(A) \in [0, 1]$ tetszőleges $A \in \mathcal{A}$ esetén,
 - 2 $P(\Omega) = 1$,
 - 3 ha $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ páronként diszjunktak, akkor

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j).$$

(Ezt a tulajdonságot **σ -additivitásnak** nevezzük).

Egy A esemény esetén a $P(A)$ számot az A **valószínűségének**, a $P : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ leképezést pedig **valószínűségeloszlásnak** nevezzük.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.2 Valószínűség

A valószínűségeloszlások tulajdonságai

- $P(\emptyset) = 0$. (Hiszen ha $P(\emptyset) > 0$ volna, akkor a σ -additivitásban $A_1 = A_2 = \dots = \emptyset$ választással ellentmondásra jutnánk.)
- Ha $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ páronként diszjunktak, akkor

$$P\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = \sum_{j=1}^n P(A_j).$$

(Használjuk a σ -additivitást $A_{n+1} = A_{n+2} = \dots = \emptyset$ esetére, és alkalmazzuk azt, hogy $P(\emptyset) = 0$.)

Ezt a tulajdonságot **véges additivitásnak** nevezzük.

- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
(Hiszen $\Omega = A \cup \bar{A}$ diszjunkt felbontás, így a véges additivitással $1 = P(\Omega) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$.)

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.2 Valószínűség

A valószínűségeloszlások tulajdonságai

- Ha $A \Rightarrow B$, azaz $A \subset B$, akkor

$$P(A) \leq P(B), \quad P(B \setminus A) = P(B) - P(A).$$

(Hiszen $A \subset B$ esetén $B = A \cup (B \setminus A)$ diszjunkt felbontás, ezért $P(B) = P(A) + P(B \setminus A) \geq P(A)$.)

Ezt a tulajdonságot **monotonitásnak** nevezzük.

- Tetszőleges $A, B \in \mathcal{A}$ esetén

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B),$$

hiszen

$$A \cup B = [A \setminus (A \cap B)] \cup [B \setminus (A \cap B)] \cup (A \cap B)$$

diszjunkt felbontás, ezért $A \cap B \subset A$ és $A \cap B \subset B$ miatt

$$P(A \cup B) = [P(A) - P(A \cap B)] + [P(B) - P(A \cap B)] + P(A \cap B).$$

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.2 Valószínűség

A valószínűségeloszlások tulajdonságai

- Tetszőleges $A, B, C \in \mathcal{A}$ esetén

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) \\ &\quad - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) \\ &\quad + P(A \cap B \cap C), \end{aligned}$$

hiszen

$$P((A \cup B) \cup C) = P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C)$$

és

$$\begin{aligned} P((A \cup B) \cap C) &= P((A \cap C) \cup (B \cap C)) \\ &= P(A \cap C) + P(B \cap C) - P((A \cap C) \cap (B \cap C)), \end{aligned}$$

ahol $(A \cap C) \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.2 Valószínűség

Diszkrét valószínűségi mező

Ω véges vagy megszámlálhatóan végtelen, azaz

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$$

vagy

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$$

alakú, és $\mathcal{A} = 2^\Omega$.

Valószínűségek kiszámolása diszkrét valószínűségi mezőben

Tetszőleges $A \in \mathcal{A}$ esemény előáll az

$$A = \bigcup_{i: \omega_i \in A} \{\omega_i\}$$

diszjunkt felbontás alakjában, így

$$P(A) = \sum_{i: \omega_i \in A} P(\{\omega_i\}).$$

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.2 Valószínűség

Ezért diszkrét valószínűségi mezőben elég megadni az elemi események valószínűségeit, a

$$p_i := P(\{\omega_i\}), \quad i = 1, 2, \dots$$

számokat ahhoz, hogy tetszőleges esemény valószínűségét ki tudjuk számolni.

Nyilván szükséges az, hogy ezek a $\{p_1, p_2, \dots\}$ számok nemnegatívak legyenek és összegük 1 legyen, hiszen

$$\sum_i p_i = \sum_i P(\{\omega_i\}) = P\left(\bigcup_i \{\omega_i\}\right) = P(\Omega) = 1.$$

Ekkor azt mondjuk, hogy a $\{p_1, p_2, \dots\}$ számok **eloszlást** alkotnak.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.2 Valószínűség

Egyenletes eloszlás véges halmazon

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\},$$

és az elemi események egyenlő esélyűek, azaz

$$P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = \dots = P(\{\omega_N\}) = \frac{1}{N}$$

Valószínűségek véges halmazon egyenletes eloszlás esetén

$$P(A) = \sum_{i: \omega_i \in A} P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{N} \sum_{i: \omega_i \in A} 1 = \frac{|A|}{N},$$

vagyis

$$P(A) = \frac{\text{kedvező kimenetek száma}}{\text{összes kimenetek száma}}.$$

Ez a **valószínűség kiszámításának klasszikus képlete**.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.2 Valószínűség

Példák:

- ❶ *Két érmét feldobva mennyi annak a valószínűsége, hogy egy fej és egy írás legyen az eredmény?*

Ekkor a két érmét megkülönböztetve az

$$\Omega = \{ff, fi, if, ii\}$$

eseményteret kapjuk, amelyben a kimenetek egyforma valószínűségűek, így az

$$A = \{fi, if\}$$

esemény valószínűsége

$$P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.2 Valószínűség

Példák:

- 2 Mennyi a valószínűsége, hogy egy n tagú társaságban van legalább két olyan személy, akiknek ugyanakkor van a születésnapja? (Feltesszük, hogy a szökőnap nem lehet.)

Nyilván $n > 365$ esetén (a „skatulya-elv” miatt) ez a biztos esemény, így ekkor a valószínűség 1.

Ha pedig $n \leq 365$, akkor az ellentett eseménnyel számolva

$$P(A) = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdots (365 - n + 1)}{365^n}$$
$$= 1 - \frac{365!}{(365 - n)! \cdot 365^n} \approx \begin{cases} 0.284 & \text{ha } n = 16 \\ 0.476 & \text{ha } n = 22 \\ 0.507 & \text{ha } n = 23 \\ 0.891 & \text{ha } n = 40 \end{cases}$$

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.2 Valószínűség

Egyenletes eloszlás $\mathbb{R}^k$ véges mértékű részalmazain

$\Omega \subset \mathbb{R}^k$ véges mértékű, és „minden pont egyenlő esélyű”, azaz egy $A \subset \Omega$ részalmaz valószínűsége A mértékével arányos, vagyis

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)},$$

ahol μ az illető halmaz mértékét jelöli:

- $k = 1$ esetén összhossz,
- $k = 2$ esetén terület,
- $k = 3$ esetén térfogat.

Ez a **valószínűségek geometriai kiszámítási módja**.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.2 Valószínűség

Példa: Egy egységnyi hosszúságú szakaszt két, találomra kiválasztott ponttal három szakaszra bontunk fel. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a három szakaszból háromszöget lehet szerkeszteni?

Az eredmény a $[0, 1] \times [0, 1]$ négyzet azon részhalmazának területe, melynek pontjaira fennállnak a következő egyenlőtlenségek:

$$\begin{cases} 0 < x < y < 1, \\ 1 - y < x, \\ x < 1 - x, \\ y - x < 1 - y + x, \end{cases} \quad \text{vagy} \quad \begin{cases} 0 < y < x < 1, \\ 1 - x < y, \\ y < 1 - y, \\ x - y < 1 - x + y, \end{cases}$$

azaz

$$\begin{cases} 0 < x < \frac{1}{2} < y < 1, \\ y - x < \frac{1}{2}, \end{cases} \quad \text{vagy} \quad \begin{cases} 0 < y < \frac{1}{2} < x < 1, \\ x - y < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Ezért a keresett valószínűség $1/4$.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.3 Feltételes valószínűség

Feltételes relatív gyakoriság

Ha n független kísérletet végzünk, akkor az A esemény **feltételes relatív gyakorisága azon feltétel mellett, hogy a B esemény bekövetkezett**

$$r_n(A | B) := \frac{k_n(A \cap B)}{k_n(B)} = \frac{r_n(A \cap B)}{r_n(B)}.$$

Feltételes valószínűség

Az A esemény **feltételes valószínűsége** a B feltétel mellett (azaz ha tudjuk, hogy a B esemény bekövetkezett)

$$P(A | B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

hacsak $P(B) > 0$.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.3 Feltételes valószínűség

Példák:

- ① *Mennyi a valószínűsége, hogy egy kétgyermekes családban mindkét gyerek fiú, ha feltételezzük, hogy egy gyerek egyenlő valószínűséggel lehet fiú vagy lány, és tudjuk, hogy*
- *az idősebb gyerek fiú;*
 - *legalább az egyik gyerek fiú ?*

Ekkor az eseménytér

$$\Omega = \{FF, FL, LF, LL\},$$

melynek elemei egyformán $1/4$ valószínűségűek. Legyen

$$A := \{\text{mindkét gyerek fiú}\} = \{FF\},$$

$$B_1 := \{\text{az idősebb gyerek fiú}\} = \{FF, FL\},$$

$$B_2 := \{\text{legalább az egyik gyerek fiú}\} = \{FF, FL, LF\}.$$

Nyilván $A \cap B_1 = A \cap B_2 = \{FF\}$, így

$$P(A \mid B_1) = 1/2, \quad P(A \mid B_2) = 1/3.$$

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.3 Feltételes valószínűség

- 2 *Bridzsnél osztáskor 2 ászt kapott valaki. Mennyi a valószínűsége, hogy a másik 2 ász a partnerénél van?*

Az összes leosztások száma $\frac{52!}{(13!)^4}$,

ezek egyforma valószínűségűek. Ezekből $\binom{4}{2} \cdot \binom{48}{11} \cdot \frac{39!}{(13!)^3}$

olyan leosztás van, melynél az első játékos 2 ászt kap, és ezek között pedig

$$\binom{4}{2} \cdot \binom{48}{11} \cdot \binom{37}{11} \cdot \frac{26!}{(13!)^2}$$

olyan leosztás van, melynél a másik 2 ász a partnerénél van.

Tehát a keresett feltételes valószínűség

$$\frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{48}{11} \cdot \binom{37}{11} \cdot \frac{26!}{(13!)^2}}{\binom{4}{2} \cdot \binom{48}{11} \cdot \frac{39!}{(13!)^3}} = \frac{2}{19}.$$

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.3 Feltételes valószínűség

Láncszabály

$$\begin{aligned} & P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \\ &= P(A_1) P(A_2 \mid A_1) P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \dots P(A_n \mid A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}), \\ & \text{hacsak } P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0. \end{aligned}$$

A jobb oldal

$$P(A_1) \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{P(A_1 \cap A_2)} \dots \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1} \cap A_n)}{P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})}$$

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.3 Feltételes valószínűség

Példa: *Húzzunk ki a 32 lapos magyar kártyából hármat visszatevés nélkül. Mennyi a valószínűsége, hogy az első és a harmadik kihúzott lap piros, a második pedig nem az?*

Jelölje $i = 1, 2, 3$ esetén A_i azt az eseményt, hogy az i -edik húzás eredménye piros. Ekkor

$$P(A_1) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}, \quad P(\bar{A}_2 | A_1) = \frac{24}{31}, \quad P(A_3 | A_1 \cap \bar{A}_2) = \frac{7}{30},$$

így

$$P(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) = \frac{1}{4} \cdot \frac{24}{31} \cdot \frac{7}{30} = \frac{7}{155}.$$

Persze lehetne használni azt az eseményteret is, amely az első három kihúzott lapból áll a sorrendet is figyelembe véve; ekkor $|\Omega| = 32 \cdot 31 \cdot 30$, és a kimenetek egyenlő valószínűségűek. Mivel a kedvező esetek száma $8 \cdot 24 \cdot 7$, így a keresett valószínűség $\frac{8 \cdot 24 \cdot 7}{32 \cdot 31 \cdot 30} = \frac{7}{155}$.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.3 Feltételes valószínűség

Teljes eseményrendszer

Az eseménytér megszámlálható diszjunkt felbontása, azaz események $A_1, A_2, \dots$ véges vagy végtelen sorozata, melyek egymást páronként kizárják, és uniójuk az egész eseménytér, vagyis

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad \text{ha} \quad i \neq j, \quad \text{és} \quad \bigcup_i A_i = \Omega.$$

Egy teljes eseményrendszer eseményei közül mindig pontosan egy következik be, és

$$\sum_i P(A_i) = 1.$$

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.3 Feltételes valószínűség

Teljes valószínűség tétele

Ha az $A_1, A_2, \dots$ pozitív valószínűségű események teljes eseményrendszert alkotnak, akkor tetszőleges B eseményre

$$P(B) = \sum_i P(B \mid A_i) \cdot P(A_i).$$

Bizonyítás. Nyilván $B = \bigcup_i (B \cap A_i)$ diszjunkt felbontás, hiszen

$$B = B \cap \Omega = B \cap \left(\bigcup_k A_k \right) = \bigcup_k (B \cap A_k),$$

és $i \neq j$ esetén

$$(B \cap A_i) \cap (B \cap A_j) = B \cap A_i \cap A_j = \emptyset,$$

ugyanis $A_i \cap A_j = \emptyset$. Ezért

$$P(B) = \sum_i P(B \cap A_i) = \sum_i P(B \mid A_i) \cdot P(A_i).$$

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.3 Feltételes valószínűség

Példa: Három gép csavarokat gyárt. A selejt aránya az első gépnél 1 %, a másodiknál 2 %, a harmadiknál 3 %. Az össztermék 50 %-át az első gép, 30 %-át a második, 20 %-át pedig a harmadik állítja elő. Mi a valószínűsége annak, hogy az össztermékből véletlenszerűen választott csavar selejtes?

Jelölje B azt az eseményt, hogy selejtet húzunk, $i = 1, 2, 3$ esetén pedig A_i azt, hogy a kihúzott csavar az i -edik gépen készült. Ekkor

$$\begin{aligned} P(B|A_1) &= 0.01, & P(B|A_2) &= 0.02, & P(B|A_3) &= 0.03, \\ P(A_1) &= 0.5, & P(A_2) &= 0.3, & P(A_3) &= 0.2, \end{aligned}$$

így

$$P(B) = 0.01 \cdot 0.5 + 0.02 \cdot 0.3 + 0.03 \cdot 0.2 = 0.017.$$

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.3 Feltételes valószínűség

Bayes-formula

Ha A és B pozitív valószínűségű események, akkor

$$P(A | B) = \frac{P(A) \cdot P(B | A)}{P(B)}.$$

Bizonyítás: $P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ és $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B | A)$.

Bayes-tétel

Ha az $A_1, A_2, \dots$ pozitív valószínűségű események teljes eseményrendszert alkotnak és $P(B) > 0$, akkor

$$P(A_i | B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B | A_i)}{\sum_j P(B | A_j) \cdot P(A_j)}.$$

Bizonyítás: A Bayes-formulával $P(A_i | B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B | A_i)}{P(B)}$. A teljes valószínűség tételével $P(B) = \sum_j P(B | A_j) \cdot P(A_j)$.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.3 Feltételes valószínűség

Példa: *Mennyi a feltételes valószínűsége az előző példában annak, hogy az első, második, illetve harmadik gépen gyártották a kiválasztott csavart azon feltétel mellett, hogy az selejtesnek bizonyult?*

$$P(A_1 | B) = \frac{0.01 \cdot 0.5}{0.017} = \frac{5}{17}, \quad P(A_2 | B) = \frac{6}{17}, \quad P(A_3 | B) = \frac{6}{17}.$$

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.4. Független események

Független események

Azt mondjuk, hogy az A és B események **függetlenek**, ha

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Ha A és B pozitív valószínűségű események, akkor a következő állítások ekvivalensek:

- A és B függetlenek;
- $P(A | B) = P(A)$;
- $P(B | A) = P(B)$.

Ha $P(A) = 0$ vagy $P(A) = 1$, akkor A tetszőleges B eseménytől független.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.4. Független események

Páronként független események

Azt mondjuk, hogy az $A_1, A_2, \dots$ események **páronként függetlenek**, ha közülük bármely két esemény független.

(Teljesen) független események

Azt mondjuk, hogy az $A_1, A_2, \dots$ események **(teljesen) függetlenek**, ha tetszőleges $i_1, i_2, \dots, i_k$ **különböző** indexekre

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_k}).$$

Lehetséges, hogy például három esemény páronként függetlenek, de nem (teljesen) függetlenek.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.5 Valószínűségi változók

Valószínűségi változó / véletlen mennyiség, eloszlásfüggvény

Ha $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező, akkor a $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ leképezés **valószínűségi változó / véletlen mennyiség**, ha tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén $\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{A}$. Ekkor az $F_\xi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$,

$$F_\xi(x) := P\{\xi < x\}$$

függvényt ξ **(kumulatív) eloszlásfüggvényének** nevezzük.

Eloszlásfüggvény

Egy $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ függvény akkor és csak akkor lehet eloszlásfüggvénye valamely $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ valószínűségi változónak, ha

- ❶ F monoton növekvő,
- ❷ F balról folytonos,
- ❸ $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1.$

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.5 Valószínűségi változók

Diszkrét valószínűségi változó

A $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ valószínűségi változó **diszkrét**, ha lehetséges értékeinek halmaza, a $\{\xi(\omega) : \omega \in \Omega\}$ értékkészlet megszámlálható.

A ξ diszkrét valószínűségi változó **eloszlása** az a P_ξ valószínűségi mérték a ξ lehetséges értékeinek $X := \{x_1, x_2, \dots\}$ halmazán, melyre $P_\xi(\{x_i\}) = P(\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) = x_i\})$, $x_i \in X$.

Diszkrét valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

Egy ξ diszkrét valószínűségi változó eloszlásfüggvénye olyan lépcsős függvény, mely a lehetséges értékeknél ugrik, és az ugrás nagysága az illető érték valószínűsége. Ha a ξ lehetséges értékeinek halmaza $X := \{x_1, x_2, \dots\}$, akkor

$$F_\xi(x) = \sum_{\{i : x_i < x\}} P_\xi(\{x_i\}), \quad x \in \mathbb{R}.$$

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.5 Valószínűségi változók

Példák:

- ❶ *Két kockát dobva a dobott számok összegét jelölje ξ . Határozzuk meg ξ eloszlását!*

Ekkor ξ diszkrét valószínűségi változó; lehetséges értékeinek halmaza:

$$X = \{2, 3, \dots, 12\},$$

eloszlása:

$$P\{\xi = k\} = \begin{cases} \frac{k-1}{36} & \text{ha } 2 \leq k \leq 7, \\ \frac{13-k}{36} & \text{ha } 7 \leq k \leq 12. \end{cases}$$

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.5 Valószínűségi változók

2 Binomiális eloszlás.

n független kísérlet

A esemény, $p := P(A)$

A gyakorisága: $\xi := k_n(A)$

diszkrét valószínűségi változó;

lehetséges értékeinek halmaza:

$$X = \{0, 1, 2, \dots, n\},$$

eloszlása

$$P\{\xi = k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

melyet (n, p) **paraméterű binomiális eloszlásnak** nevezünk.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.5 Valószínűségi változók

8 Elsőrendű negatív binomiális eloszlás.

A esemény, $p := P(A)$

Addig végzünk független kísérleteket, míg A először bekövetkezik.

$\xi :=$ az ehhez szükséges kísérletek száma;

lehetséges értékeinek halmaza:

$$X = \{1, 2, \dots, \infty\},$$

eloszlása: $k = 1, 2, \dots$ esetén

$$P\{\xi = k\} = p \cdot (1 - p)^{k-1},$$

így

$$P\{\xi = \infty\} = 1 - P\{\xi < \infty\} = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} P\{\xi = k\} = 1 - p \sum_{k=1}^{\infty} (1 - p)^{k-1} = 0.$$

Ekkor ξ eloszlását **elsőrendű p paraméterű negatív binomiális eloszlásnak** (vagy geometriai eloszlásnak) nevezzük.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.5 Valószínűségi változók

4 Hipergeometrikus eloszlás.

Egy dobozban M piros és $N - M$ fekete golyó van ($M < N$).
Visszatevés nélkül húzunk ki n golyót ($n \leq N$).

$\xi :=$ a kihúzott piros golyók száma;

lehetséges értékeinek halmaza: olyan k értékek, melyekre
teljesül $0 \leq k \leq n$, $k \leq M$, és $n - k \leq N - M$,
eloszlása:

$$P\{\xi = k\} = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Ekkor ξ eloszlását $(n, M, N - M)$ **paraméterű hipergeometrikus eloszlásnak** nevezzük.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.5 Valószínűségi változók

5 Poisson eloszlás.

Mazsolás kalácsot sütünk; 1000 gramm tésztába $n = 50$ darab mazsolát teszünk. Egy szelet súlya 25 gramm, tehát $N = 40$ szelet készül. Minden mazsola egyforma valószínűséggel kerülhet bele bármely szeletbe, és a mazsolák egymástól függetlenül „mozognak”. Jelölje ξ egy kiválasztott szeletbe kerülő mazsolák számát. Lehetséges értékeinek halmaza $X = \{0, 1, \dots, 50\}$, eloszlása

$$P\{\xi = k\} = \binom{50}{k} \left(\frac{1}{40}\right)^k \left(1 - \frac{1}{40}\right)^{50-k},$$

tehát ξ eloszlása n -edrendű $1/N$ paraméteru binomiális eloszlás.

Mi történik, ha növeljük a tészta mennyiségét?

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.5 Valószínűségi változók

Ha n mazsolát használunk fel $20 \cdot n$ gramm tésztába, akkor $N = 20 \cdot n/25$ szelet készül, így a binomiális eloszlás paramétere $p_n := 1/N = \lambda/n$, ahol $\lambda := 5/4$ az egy szeletre átlagosan jutó mazsolák száma. Ekkor

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}. \end{aligned}$$

Ha egy η valószínűségi változó lehetséges értékei a nemnegatív egész számok és $k = 0, 1, \dots$ esetén

$$P(\eta = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

ahol $\lambda > 0$, akkor azt mondjuk, hogy η eloszlása λ **paraméterű Poisson-eloszlás**.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.5 Valószínűségi változók

Valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

Ha $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező, $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ valószínűségi változó és létezik olyan $f_\xi : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ függvény, melyre

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^x f_\xi(t) dt, \quad x \in \mathbb{R},$$

akkor az f_ξ függvényt a ξ **sűrűségfüggvényének** nevezzük.
(Nem egyértelműen definiált!)

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.5 Valószínűségi változók

Valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

Ha $a < b$, akkor

$$P\{a \leq \xi < b\} = F_\xi(b) - F_\xi(a) = \int_a^b f_\xi(t) dt.$$

Ha az f_ξ sűrűségfüggvény folytonos az $x \in \mathbb{R}$ pontban, akkor

$$F'_\xi(x) = f_\xi(x).$$

Egy $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ függvény akkor és csak akkor lehet sűrűségfüggvénye valamely $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ valószínűségi változónak, ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 1.$$

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.5 Valószínűségi változók

Egyenletes eloszlás az $[a, b]$ intervallumon

Ha az $[a, b]$ intervallumon választunk véletlenszerűen egy ξ pontot úgy, hogy egy $A \subset [a, b]$ részhalmazba esés valószínűsége az illető részhalmaz mértékével arányos, akkor ξ eloszlásfüggvénye nyilván

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{ha } a < x \leq b, \\ 1 & \text{ha } x > b. \end{cases}$$

Ekkor a ξ valószínűségi változót **egyenletes eloszlásúnak** nevezzük a $[a, b]$ intervallumon. Továbbá

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{ha } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

függvény sűrűségfüggvénye ξ -nek.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.5 Valószínűségi változók

Normális eloszlás

Ha a ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

alakú, ahol $m \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, akkor azt mondjuk, hogy ξ **normális eloszlású** (m, σ^2) **paraméterekkel**.

Az, hogy $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$, abból következik, hogy

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx \right)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\infty} r e^{-r^2/2} dr \right) d\varphi = 2\pi \left[-e^{-r^2/2} \right]_{r=0}^{r=\infty} = 2\pi. \end{aligned}$$

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.5 Valószínűségi változók

Exponenciális eloszlás

Jelölje a ξ valószínűségi változó egy radioaktív atom élettartamát. Ez rendelkezik az úgynevezett **örökifjú tulajdonsággal**: ha $t, h > 0$, akkor

$$P\{\xi \geq t + h \mid \xi \geq t\} = P\{\xi \geq h\},$$

vagyis annak ellenére, hogy tudjuk, hogy az atom már megélt t időt, a még hátralevő élettartam eloszlása éppen olyan, mint a teljes élettartam eredeti eloszlása. Mivel

$$P\{\xi \geq t + h \mid \xi \geq t\} = \frac{P\{\xi \geq t + h, \xi \geq t\}}{P\{\xi \geq t\}},$$

és $P\{\xi \geq t + h, \xi \geq t\} = P\{\xi \geq t + h\}$, ezért a $G(t) := P\{\xi \geq t\}$ **túlélési függvényre** teljesül

$$\frac{G(t + h)}{G(t)} = G(h).$$

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.5 Valószínűségi változók

Be lehet látni, hogy ha G folytonos, akkor létezik olyan $\lambda > 0$, hogy

$$G(t) = e^{-\lambda t} \quad \text{ha } t > 0.$$

Ezért ξ eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

alakú, ahol $\lambda > 0$. Ezt az eloszlást λ **paraméterű exponenciális eloszlásnak** nevezzük. Van sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{ha } x > 0. \end{cases}$$

Bomlási állandó:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} P\{t \leq \xi < t + h \mid \xi \geq t\} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (1 - e^{-\lambda h}) = \lambda.$$

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.5 Valószínűségi változók

Valószínűségi vektorváltozó

$$\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad \text{azaz} \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_k),$$

ahol $\xi_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, k$ valószínűségi változók

eloszlásfüggvénye: $F_\xi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$,

$$F_\xi(x_1, \dots, x_k) := P\{\xi_1 < x_1, \dots, \xi_k < x_k\}$$

Valószínűségi vektorváltozó sűrűségfüggvénye

Ha létezik olyan $f_\xi : \mathbb{R}^k \rightarrow [0, \infty)$ függvény, melyre

$$F_\xi(x_1, \dots, x_k) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_k} f_\xi(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k$$

teljesül minden $(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ pontban, akkor az f_ξ függvényt ξ **sűrűségfüggvényének** nevezzük.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.5 Valószínűségi változók

Valószínűségi vektorváltozó sűrűségfüggvénye

Nyilván

$$P\{a_i \leq \xi_i \leq b_i, i = 1, \dots, k\} = \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_k}^{b_k} f_{\xi}(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k,$$

sőt tetszőleges $B \subset \mathbb{R}^k$ (Borel-halmaz) esetén

$$P\{(\xi_1, \dots, \xi_k) \in B\} = \int_B \dots \int f_{\xi}(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k,$$

továbbá ha F_{ξ} k -szor folytonosan differenciálható, akkor

$$f_{\xi}(x_1, \dots, x_k) = \frac{\partial^k F_{\xi}(x_1, \dots, x_k)}{\partial x_1 \dots \partial x_k}.$$

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.5 Valószínűségi változók

Diszkrét valószínűségi vektorváltozó

A $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$ valószínűségi változó **diszkrét**, ha lehetséges értékeinek halmaza, a $\{\xi(\omega) : \omega \in \Omega\}$ értékészlet megszámlálható.

Ha $(\xi, \eta) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ diszkrét, akkor ξ és η is diszkrét. Ha ξ és η lehetséges értékei $x_1, x_2, \dots$, illetve $y_1, y_2, \dots$, akkor (ξ, η) lehetséges értékeinek halmaza $\{(x_i, y_j) : i, j = 1, 2, \dots\}$.

Ha ismerjük (ξ, η) eloszlását, azaz a

$$P\{\xi = x_i, \eta = y_j\} \quad i, j = 1, 2, \dots$$

valószínűségeket, akkor ki tudjuk számolni ξ és η eloszlását is:

$$P\{\xi = x_i\} = \sum_j P\{\xi = x_i, \eta = y_j\}, \quad P\{\eta = y_j\} = \sum_i P\{\xi = x_i, \eta = y_j\}.$$

Ezek (ξ, η) **peremeloszlásai / marginális eloszlásai**.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.5 Valószínűségi változók

Polinomiális eloszlás

n független kísérletet hajtunk végre egy $A_1, A_2, \dots, A_r$ teljes eseményrendszerre, $p_i := P(A_i)$ (ekkor $p_1 + p_2 + \dots + p_r = 1$). Ekkor A_i gyakorisága: $\xi_i := k_n(A_i)$, és $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r)$ diszkrét valószínűségi vektorváltozó; lehetséges értékeinek halmaza:

$$\{(k_1, k_2, \dots, k_r) \in \mathbb{Z}^r : k_i \geq 0, k_1 + k_2 + \dots + k_r = n\},$$

eloszlása

$$P\{\xi_1 = k_1, \xi_2 = k_2, \dots, \xi_r = k_r\} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_r!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r},$$

melyet $(n, p_1, p_2, \dots, p_r)$ **paraméterű polinomiális eloszlásnak** nevezünk. Peremeloszlásai binomiális eloszlások:

$$P\{\xi_i = k_i\} = \frac{n!}{k_i! (n - k_i)!} p_i^{k_i} (1 - p_i)^{n - k_i}.$$

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.5 Valószínűségi változók

Polihipergeometrikus eloszlás

Ha visszatevés nélkül húzunk ki n golyót ($n \leq N$), és ξ_i jelöli az i -edik színből húzott golyók számát, akkor $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r)$ olyan $(k_1, k_2, \dots, k_r)$ értékeket vehet fel, melyekre minden $i = 1, 2, \dots, r$ esetén teljesül $0 \leq k_i \leq N_i$, és $k_1 + k_2 + \dots + k_r = n$, továbbá

$$P\{\xi_1 = k_1, \xi_2 = k_2, \dots, \xi_r = k_r\} = \frac{\binom{N_1}{k_1} \binom{N_2}{k_2} \dots \binom{N_r}{k_r}}{\binom{N}{n}}.$$

Ekkor ξ eloszlását $(n, N_1, \dots, N_r)$ **paraméterű polihipergeometrikus eloszlásnak** nevezzük.

Peremeloszlásai hipergeometrikus eloszlások:

$$P\{\xi_i = k_i\} = \frac{\binom{N_i}{k_i} \binom{N - N_i}{n - k_i}}{\binom{N}{n}}.$$

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.5 Valószínűségi változók

Ha a (ξ, η) valószínűségi vektorváltozónak létezik $f_{\xi, \eta}$ sűrűségfüggvénye, akkor a ξ , illetve η valószínűségi változóknak is létezik sűrűségfüggvényük, mégpedig

$$f_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi, \eta}(x, y) dy, \quad f_{\eta}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi, \eta}(x, y) dx.$$

Ezek (ξ, η) **peremeloszlásai / marginális eloszlásai**.

Független valószínűségi változók

A ξ és η valószínűségi változókat akkor nevezzük **függetleneknek**, ha tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}$ esetén

$$P\{\xi < x, \eta < y\} = P\{\xi < x\}P\{\eta < y\},$$

azaz $F_{\xi, \eta}(x, y) = F_{\xi}(x)F_{\eta}(y)$.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.5 Valószínűségi változók

Független valószínűségi változók

Ha ξ diszkrét valószínűségi változó $x_1, x_2, \dots$ lehetséges értékekkel és η diszkrét valószínűségi változó $y_1, y_2, \dots$ lehetséges értékekkel, akkor ξ és η függetlensége azzal ekvivalens, hogy

$$\forall i, j \quad P\{\xi = x_i, \eta = y_j\} = P\{\xi = x_i\}P\{\eta = y_j\}.$$

Ha létezik (ξ, η) -nak $f_{\xi, \eta}$ sűrűségfüggvénye, akkor ξ és η függetlensége azzal ekvivalens, hogy

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad f_{\xi, \eta}(x, y) = f_{\xi}(x)f_{\eta}(y).$$

Valószínűségeloszlások konvolúciója

Ha a ξ és η valószínűségi változók függetlenek, akkor azt mondjuk, hogy $\xi + \eta$ eloszlása a ξ és η **eloszlásának konvolúciója**.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.5 Valószínűségi változók

Valószínűségeloszlások konvolúciója

Ha ξ és η független diszkrét valószínűségi változók, és a lehetséges értékeik nemnegatív egész számok, akkor a

$$\{\xi + \eta = k\} = \bigcup_{j=0}^k (\{\xi = j\} \cap \{\eta = k - j\})$$

diszjunkt felbontás alapján

$$P\{\xi + \eta = k\} = \sum_{j=0}^k P\{\xi = j\}P\{\eta = k - j\}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Ha a ξ és η független valószínűségi változóknak léteznek az f_ξ és f_η sűrűségfüggvényei, akkor

$$f_{\xi+\eta}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(u)f_\eta(x-u)du, \quad x \in \mathbb{R}.$$

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.5 Valószínűségi változók

Példák:

- ① Ha ξ és η független binomiális eloszlásúak (n_1, p) illetve (n_2, p) paraméterekkel, akkor ezek konvolúciója ismét binomiális eloszlás, mégpedig $(n_1 + n_2, p)$ paraméterekkel:

$$\sum_{i,j: i+j=k} \binom{n_1}{i} p^i (1-p)^{n_1-i} \binom{n_2}{j} p^j (1-p)^{n_2-j} = \binom{n_1 + n_2}{k} p^k (1-p)^{n_1+n_2-k}.$$

- ② Ha ξ és η független normális eloszlásúak (m_1, σ_1^2) illetve (m_2, σ_2^2) paraméterekkel, akkor ezek konvolúciója ismét normális eloszlás, mégpedig $(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ paraméterekkel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(u-m_1)^2}{2\sigma_1^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(x-u-m_2)^2}{2\sigma_2^2}} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} e^{-\frac{(x-m_1-m_2)^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}}.$$

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.6 Várható érték

Intuíció:

Tekintsünk egy $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ diszkrét valószínűségi változót $x_1, \dots, x_N$ lehetséges értékekkel.

n független kísérletet hajtunk végre

$A_k := \{\xi = x_k\}$ relatív gyakorisága

$$r_n(A_k) \approx P(A_k) = P\{\xi = x_k\},$$

ezért az x_k értéket körülbelül $n \cdot P\{\xi = x_k\}$ esetben kapjuk, így
a megfigyelt értékek átlaga körülbelül

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^N x_k \cdot n \cdot P\{\xi = x_k\} = \sum_{k=1}^N x_k \cdot P\{\xi = x_k\}.$$

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.6 Várható érték

Valószínűségi változó várható értéke

Ha $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ diszkrét valószínűségi változó $x_1, x_2, \dots$ lehetséges értékekkel, akkor az

$$E \xi := \sum_k x_k \cdot P\{\xi = x_k\}$$

mennyiséget a ξ **várható értékének** nevezzük, amennyiben ez a sor abszolút konvergens, azaz $\sum_k |x_k| \cdot P\{\xi = x_k\} < \infty$.

Ha $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ egy abszolút folytonos valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvénye $f_\xi : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$, akkor az

$$E \xi := \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x) dx$$

mennyiséget a ξ **várható értékének** nevezzük, amennyiben ez az improprius integrál abszolút konvergens, azaz $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_\xi(x) dx < \infty$.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.6 Várható érték

Példák:

- ❶ Ha ξ binomiális eloszlású (n, p) paraméterekkel, akkor

$$E\xi = \sum_{k=0}^n k \cdot \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = np.$$

- ❷ Ha egy egységnyi oldalú négyzetben választunk egyenletes eloszlás szerint egy pontot, és ξ jelöli a pontnak a legközelebbi oldaltól való távolságát, akkor $E\xi = \frac{1}{6}$, hiszen

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0, \\ 1 - (1 - 2x)^2 & \text{ha } x \in [0, \frac{1}{2}], \\ 1 & \text{ha } x > \frac{1}{2}, \end{cases} \quad f_{\xi}(x) = \begin{cases} 4 - 8x & \text{ha } x \in [0, \frac{1}{2}], \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$$

$$E\xi = \int_0^{1/2} x(4 - 8x) dx = \left[2x^2 - \frac{8}{3}x^3 \right]_{x=0}^{x=1/2} = \frac{1}{6}.$$

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.6 Várható érték

- ③ Az A és B játékosok a következő játékot játszik. Felváltva dobnak egy szabályos érmét; A kezd, és az nyer, akinek először sikerül fejet dobnia. Az első dobásnál 2–2 forintot tesznek be, és minden dobás előtt duplázzák a tétet, azaz ha az n -edik dobásra sikerül fejet dobni és n páratlan, akkor A nyer 2^n forintot B -től, ha pedig n páros, akkor B nyer 2^n forintot A -tól. Mennyi az A illetve B játékos várható nyereménye?

Jelölje ξ az A játékos nyereményét (mely pozitív, ha A nyer, és negatív, ha A veszít). Ekkor ξ lehetséges értékei 2, -4 , 8, -16 , ... és $P\{\xi = 2\} = \frac{1}{2}$, $P\{\xi = -4\} = \frac{1}{4}$, ... Mivel

$$2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 8 \cdot \frac{1}{8} + \dots = 1 + 1 + 1 + \dots = \infty,$$

így ξ várható értéke nem létezik!

- ④ Legyen ξ olyan valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvénye $f_{\xi}(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$. Ekkor nem létezik $E\xi$, mert $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|}{\pi(1+x^2)} dx = \infty$.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.6 Várható érték

Várható érték tulajdonságai

Ha ξ és η valószínűségi változók és $a, b \in \mathbb{R}$, akkor

- $E(a\xi) = a E \xi$ (homogenitás)
- $E(\xi + \eta) = E \xi + E \eta$ (additivitás)
- $E(a\xi + b\eta) = a E \xi + b E \eta$ (linearitás)
- ha ξ és η függetlenek, akkor $E(\xi\eta) = E \xi \cdot E \eta$
- ha $\xi \leq \eta$, akkor $E \xi \leq E \eta$ (monotonitás)
- ha $\xi \geq 0$, akkor $E \xi \geq 0$ (pozitivitás)
- $E |\xi| \leq |E \xi|$
- $E |\xi\eta| \leq \sqrt{E \xi^2 E \eta^2}$ (Cauchy-Schwartz egyenlőtlenség)

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.6 Várható érték

Valószínűségi változó függvényének várható értéke

Legyen $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Ha ξ diszkrét valószínűségi változó $x_1, x_2, \dots$ lehetséges értékekkel, akkor

$$E g(\xi) = \sum_k g(x_k) \cdot P\{\xi = x_k\},$$

amennyiben ez a sor abszolút konvergens.

Ha ξ abszolút folytonos valószínűségi változó f_ξ sűrűségfüggvénnyel, akkor

$$E g(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_\xi(x) dx,$$

amennyiben ez az improprius integrál abszolút konvergens.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.6 Várható érték

Valószínűségi vektorváltozó függvényének várható értéke

Legyen $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Ha ξ és η diszkrét valószínűségi változók $x_1, x_2, \dots$, illetve $y_1, y_2, \dots$ lehetséges értékekkel, akkor

$$E g(\xi, \eta) = \sum_{k, \ell} g(x_k, y_\ell) \cdot P\{\xi = x_k, \eta = y_\ell\},$$

amennyiben ez a sor abszolút konvergens.

Ha (ξ, η) abszolút folytonos valószínűségi vektorváltozó $f_{\xi, \eta}$ sűrűségfüggvénnyel, akkor

$$E g(\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) \cdot f_{\xi, \eta}(x, y) dx dy,$$

amennyiben ez az improprius integrál abszolút konvergens.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.6 Várható érték

Valószínűségi változó varianciája / szórásnégyzete

$$\text{var } \xi := D^2 \xi := E [(\xi - E \xi)^2].$$

Variancia / szórásnégyzet kiszámolása

$$\text{var } \xi = E [\xi^2 - 2\xi E \xi + (E \xi)^2] = E(\xi^2) - 2 \cdot E \xi \cdot E \xi + (E \xi)^2 = E(\xi^2) - (E \xi)^2,$$

így ha ξ diszkrét valószínűségi változó $x_1, x_2, \dots$ lehetséges értékekkel, akkor

$$\text{var } \xi = \sum_k x_k^2 \cdot P\{\xi = k\} - \left(\sum_k x_k \cdot P\{\xi = k\} \right)^2,$$

ha pedig ξ abszolút folytonos valószínűségi változó f_ξ sűrűségfüggvénnyel, akkor

$$\text{var } \xi = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_\xi(x) dx - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x) dx \right)^2.$$

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.6 Várható érték

Variancia / szórásnégyzet tulajdonságai

Ha ξ és η valószínűségi változók és $a \in \mathbb{R}$, akkor

- $\text{var}(\xi + a) = \text{var } \xi$ (eltolásinvariancia)
- $\text{var}(c \cdot \xi) = c^2 \cdot \text{var } \xi$ (homogenitás)
- ha ξ és η függetlenek, akkor $\text{var}(\xi + \eta) = \text{var } \xi + \text{var } \eta$ (additivitás)

Valószínűségi változók kovarianciája

$$\text{cov}(\xi, \eta) := E [(\xi - E \xi)(\eta - E \eta)]$$

Addíciós képlet

Ha ξ és η valószínűségi változók, akkor

$$\text{var}(\xi + \eta) = \text{var } \xi + 2 \text{cov}(\xi, \eta) + \text{var } \eta$$

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.6 Várható érték

Példa:

Legyen η **standard normális eloszlású**, azaz normális eloszlású $(0, 1)$ paraméterekkel. Ekkor

$$E\eta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot e^{-x^2/2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\substack{K \rightarrow -\infty \\ L \rightarrow +\infty}} \left[-e^{-x^2/2} \right]_{x=K}^{x=L} = 0,$$

$$\begin{aligned} E(\eta^2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2/2} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-xe^{-x^2/2} \right]_{x=-\infty}^{x=\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = 1, \end{aligned}$$

$$\text{var } \eta = E(\eta^2) - (E\eta)^2 = 1.$$

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.6 Várható érték

Ha pedig ξ normális eloszlású (m, σ^2) paraméterekkel, akkor

$$\xi = \sigma \cdot \eta + m,$$

ahol

$$\eta = \frac{\xi - m}{\sigma}$$

standard normális eloszlású, hiszen η eloszlásfüggvénye

$$F_{\eta}(x) = P\{\eta < x\} = P\left\{\frac{\xi - m}{\sigma} < x\right\} = P\{\xi < \sigma \cdot x + m\} = F_{\xi}(\sigma \cdot x + m),$$

így η sűrűségfüggvénye

$$f_{\eta}(x) = F'_{\eta}(x) = \sigma \cdot F'_{\xi}(\sigma x + m) = \sigma \cdot f_{\xi}(\sigma x + m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2},$$

ezért

$$E \xi = \sigma \cdot E \eta + m = m, \quad \text{var } \xi = \sigma^2 \cdot \text{var } \eta = \sigma^2.$$

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.6 Várható érték

Valószínűségi változók korrelációs együtthatója

$$\text{corr}(\xi, \eta) := \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{\text{var } \xi \cdot \text{var } \eta}}.$$

Ha $\text{corr}(\xi, \eta) = 0$ azaz $\text{cov}(\xi, \eta) = 0$, akkor azt mondjuk, hogy ξ és η **korrelálatlanok**.

Ha

$$\text{corr}(\xi, \eta) > 0 \quad \text{azaz} \quad \text{cov}(\xi, \eta) > 0,$$

akkor ξ és η **pozitívan korreláltak**, ha pedig

$$\text{corr}(\xi, \eta) < 0 \quad \text{azaz} \quad \text{cov}(\xi, \eta) < 0,$$

akkor ξ és η **negatívan korreláltak**.

Ha ξ és η függetlenek, akkor ξ és η korrelálatlanok, de ez fordítva általában nem igaz.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.6 Várható érték

Példa: Legyen a (ξ, η) valószínűségi vektorváltozó egyenletes eloszlású a $(-1, 0)$, $(0, -1)$, $(0, 1)$ és $(1, 0)$ pontokon, azaz

$$P\{\xi = -1, \eta = 0\} = P\{\xi = 0, \eta = -1\} = P\{\xi = 0, \eta = 1\} = P\{\xi = 1, \eta = 0\} = \frac{1}{4}.$$

Ekkor $E\xi = E\eta = 0$ és $E(\xi\eta) = 0$ miatt

$$\text{cov}(\xi, \eta) = E(\xi\eta) - E\xi \cdot E\eta = 0,$$

azaz ξ és η korrelálatlanok, viszont a peremeloszlások

$$P\{\xi = -1\} = P\{\xi = 1\} = \frac{1}{4}, \quad P\{\xi = 0\} = \frac{1}{2},$$

$$P\{\eta = -1\} = P\{\eta = 1\} = \frac{1}{4}, \quad P\{\eta = 0\} = \frac{1}{2},$$

ezért ξ és η nem függetlenek, hiszen például

$$P\{\xi = 1, \eta = 0\} = \frac{1}{4}, \quad P\{\xi = 1\} \cdot P\{\eta = 0\} = \frac{1}{8}.$$

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.6 Várható érték

Kovariancia és korrelációs együttható tulajdonságai

- $\text{var } \xi = \text{cov}(\xi, \xi)$
- Ha ξ és η valószínűségi változók, akkor
$$\text{cov}(\xi, \eta) = \text{cov}(\eta, \xi), \quad \text{corr}(\xi, \eta) = \text{corr}(\eta, \xi) \quad (\text{szimmetria})$$
- Ha $\xi_1, \dots, \xi_n$ és $\eta_1, \dots, \eta_m$ valószínűségi változók és $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}$, akkor
$$\text{cov} \left(\sum_{i=1}^n a_i \xi_i, \sum_{j=1}^m b_j \eta_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j \text{cov}(\xi_i, \eta_j) \quad (\text{bilinearitás})$$
- $|\text{corr}(\xi, \eta)| \leq 1$, és $|\text{corr}(\xi, \eta)| = 1$ akkor és csak akkor, ha valamely $a \neq 0$ és b valós számokkal $P\{\eta = a \cdot \xi + b\} = 1$ teljesül; itt $a > 0$ illetve $a < 0$ aszerint, hogy $\text{corr}(\xi, \eta) = 1$ illetve $\text{corr}(\xi, \eta) = -1$.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.6 Várható érték

Momentumok, ferdeség, csúcsosság / lapultság

Legyen ξ valószínűségi változó, k pozitív egész. Ekkor

- **k -adik momentum:** $E(\xi^k)$
- **k -adik centrális momentum:** $E[(\xi - E\xi)^k]$
- **k -adik abszolút momentum:** $E(|\xi|^k)$
- **k -adik abszolút centrális momentum:** $E[|\xi - E\xi|^k]$
- **ferdeség:** $\frac{E[(\xi - E\xi)^3]}{(E[(\xi - E\xi)^2])^{3/2}}$
- **csúcsosság:** $\frac{E[(\xi - E\xi)^4]}{(E[(\xi - E\xi)^2])^2} - 3$

Tehát $E\xi$ az első momentum, $\text{var } \xi$ pedig a második (abszolút) centrális momentum

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.6 Várható érték

Ha $a, b \in \mathbb{R}$ és $a \neq 0$, akkor ξ és $a\xi + b$ ferdesége, illetve ξ és $a\xi + b$ csúcsossága megegyezik.

Példa: Legyen η standard normális eloszlású. Ekkor $E\eta = 0$, $\text{var } \eta = 1$,

$$E(\eta^3) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^3 e^{-x^2/2} dx = 0,$$

$$\begin{aligned} E(\eta^4) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-x^2/2} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-x^3 e^{-x^2/2} \right]_{x=-\infty}^{x=\infty} + \frac{3}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2/2} dx = 3E(\eta^2) = 3, \end{aligned}$$

ezért η ferdesége és csúcsossága is 0.

Ha ξ normális eloszlású (m, σ^2) paraméterekkel, akkor $\xi = \sigma \eta + m$, ahol η standard normális eloszlású, ezért ξ ferdesége és csúcsossága is 0.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.6 Várható érték

Valószínűségi változó kvantilisei, mediánja, interkvartilise

Legyen $q \in (0, 1)$. A $c_q \in \mathbb{R}$ szám **q -kvantilise** a ξ valószínűségi változónak, ha

$$P\{\xi < c_q\} \leq q, \quad \text{és} \quad P\{\xi > c_q\} \leq 1 - q.$$

Az $\frac{1}{2}$ -kvantilis **mediánnak** nevezzük.

Az $c_{3/4} - c_{1/4}$ különbséget **interkvartilisnek** nevezzük.

Legyen

$$a := \inf \{x \in \mathbb{R} : P\{\xi > x\} \leq 1 - q\}, \quad b := \sup \{x \in \mathbb{R} : P\{\xi < x\} \leq q\}.$$

Ekkor $a \leq b$, és egy $c \in \mathbb{R}$ szám akkor és csak akkor q -kvantilise ξ -nek, ha $a \leq c \leq b$.

Szokták csak az $\frac{a+b}{2}$ számot tekinteni a q -kvantilisnek.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.6 Várható érték

Valószínűségi változó kvantilisei

- Ha az $F_{\xi}(x) = q$ egyenletnek van megoldása de csak egy, akkor ez az $F_{\xi}^{-1}(q)$ megoldás az egyetlen q -kvantilis.
- Ha az $F_{\xi}(x) = q$ egyenletnek nincs megoldása, akkor egyetlen q -kvantilis van, mégpedig az a szám, ahol az F_{ξ} függvény átugorja a q számot.
- Ha az $F_{\xi}(x) = q$ egyenletnek több megoldása van, akkor a megoldáshalmaz az $(a, b]$ vagy $[a, b]$ intervallum, és a q -kvantilisek éppen az $[a, b]$ intervallum pontjai.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.6 Várható érték

Valószínűségi változó kvantilisei módusza

Ha ξ diszkrét valószínűségi változó $x_1, x_2, \dots$ lehetséges értékekkel, akkor az x_i szám **módusza** ξ -nek, ha x_i -t a legnagyobb valószínűséggel veszi fel, azaz

$$P\{\xi = x_i\} = \sup_k P\{\xi = x_k\}.$$

Ha ξ abszolút folytonos valószínűségi változó f_ξ sűrűségfüggvénnyel, akkor az x szám **módusza** ξ -nek, ha x globális maximumhelye a sűrűségfüggvénynek, azaz

$$f_\xi(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}} f_\xi(y).$$

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.7 Fontos eloszlások

p paraméterű Bernoulli–eloszlás

A esemény, $p := P(A)$

$$\xi := k_1(A) = \begin{cases} 1 & \text{ha } A \text{ bekövetkezik,} \\ 0 & \text{ha } A \text{ nem következik be} \end{cases}$$

diszkrét valószínűségi változó; lehetséges értékei: 0 és 1, eloszlása

$$P\{\xi = 1\} = p, \quad P\{\xi = 0\} = 1 - p.$$

Ezt az eloszlást p **paraméterű Bernoulli–eloszlásnak** nevezzük.

Nyilván

$$E\xi = p \cdot 1 + (1 - p) \cdot 0 = p,$$

$$E(\xi^2) = p \cdot 1^2 + (1 - p) \cdot 0^2 = p,$$

$$\text{var } \xi = E(\xi^2) - (E\xi)^2 = p - p^2 = p(1 - p).$$

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.7 Fontos eloszlások

(n, p) paraméterű Binomiális eloszlás

A esemény, $p := P(A)$; n független kísérlet; A gyakorisága:
 $\xi := k_n(A)$ diszkrét valószínűségi változó; lehetséges értékeinek halmaza: $\{0, 1, 2, \dots, n\}$, eloszlása

$$P\{\xi = k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Ha $\xi_i := \begin{cases} 1 & \text{ha } A \text{ beköv. az } i\text{-edik alkalommal,} \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$

akkor $\xi = \xi_1 + \dots + \xi_n$, és $\xi_1, \dots, \xi_n$ független, p paraméterű Bernoulli-eloszlásúak. Ezért

$$E \xi = E \xi_1 + \dots + E \xi_n = np,$$

$$\text{var } \xi = \text{var } \xi_1 + \dots + \text{var } \xi_n = np(1-p).$$

Módusza: $\lfloor (n+1)p \rfloor$, és még $\lfloor (n+1)p \rfloor - 1$ is, ha $(n+1)p$ egész.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.7 Fontos eloszlások

$(n, M, N - M)$ paraméterű hipergeometrikus eloszlás

Egy dobozban M piros és $N - M$ fekete golyó van ($M < N$). Visszatevés nélkül húzunk ki n golyót ($n \leq N$), és ξ jelöli a kihúzott piros golyók számát. Ekkor ξ olyan k értékeket vehet fel, melyre teljesül $0 \leq k \leq n$, $k \leq M$, és $n - k \leq N - M$, eloszlása

$$P\{\xi = k\} = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Ha $\xi_i := \begin{cases} 1 & \text{ha az } i\text{-edik golyó piros,} \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$ akkor $\xi = \xi_1 + \dots + \xi_n$, és a

$\xi_1, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók $\frac{M}{N}$ paraméterű Bernoulli-eloszlásúak, DE NEM FÜGGETLENEK! Például $i \neq j$ esetén

$$P\{\xi_i = 1, \xi_j = 1\} = \frac{M(M-1)}{N(N-1)}, \quad P\{\xi_i = 1\} = P\{\xi_j = 1\} = \frac{M}{N}.$$

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.7 Fontos eloszlások

$$E \xi = E \xi_1 + \dots + E \xi_n = n \cdot \frac{M}{N},$$

$$\begin{aligned} \text{var } \xi &= \text{cov}(\xi, \xi) = \text{cov} \left(\sum_{i=1}^n \xi_i, \sum_{j=1}^n \xi_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \text{cov}(\xi_i, \xi_j) = \sum_{i=1}^n \text{var } \xi_i + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{cov}(\xi_i, \xi_j), \end{aligned}$$

ahol

$$\text{var } \xi_i = \frac{M}{N} \left(1 - \frac{M}{N} \right), \quad \text{cov}(\xi_i, \xi_j) = \frac{M(M-N)}{N^2(N-1)},$$

így

$$\text{var } \xi = n \cdot \frac{M}{N} \cdot \left(1 - \frac{M}{N} \right) \cdot \frac{N-n}{N-1}$$

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.7 Fontos eloszlások

p paraméterű elsőrendű negatív binomiális eloszlás

A esemény, $p := P(A)$, melyre $0 < p < 1$. Jelölje $\xi :=$ az A első bekövetkezéséhez szükséges független kísérletek számát; lehetséges értékei: $1, 2, \dots, \infty$, eloszlása: $P\{\xi = \infty\} = 0$, és

$$P\{\xi = k\} = p \cdot (1 - p)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$E\xi = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p(1 - p)^{k-1} = p \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1},$$

ahol $q := 1 - p$, és

$$\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} (q^k)' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k \right)' = \left(\frac{1}{1 - q} \right)' = \frac{1}{(1 - q)^2},$$

így

$$E\xi = p \cdot \frac{1}{(1 - q)^2} = \frac{1}{p}.$$

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.7 Fontos eloszlások

$$\begin{aligned} E(\xi^2) &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot p(1-p)^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} [k + k(k-1)] \cdot p(1-p)^{k-1} \\ &= p \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} + pq \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)q^{k-2}, \end{aligned}$$

ahol

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)q^{k-2} = \sum_{k=1}^{\infty} (q^k)'' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k \right)'' = \left(\frac{1}{1-q} \right)'' = \frac{2}{(1-q)^3},$$

így

$$E(\xi^2) = \frac{1}{p} + pq \cdot \frac{2}{(1-q)^3} = \frac{2-p}{p^2}.$$

Végül

$$\text{var } \xi = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}.$$

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.7 Fontos eloszlások

λ paraméterű Poisson-eloszlás

$$P\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad \text{ahol } \lambda > 0.$$

$$E\xi = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = e^{-\lambda} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\lambda^{\ell+1}}{\ell!} = e^{-\lambda} \lambda e^{\lambda} = \lambda,$$

$$\begin{aligned} E(\xi^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} [k + k(k-1)] \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\ &= \lambda + e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-2)!} = \lambda + e^{-\lambda} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\lambda^{\ell+2}}{\ell!} = \lambda + \lambda^2, \end{aligned}$$

$$\text{var } \xi = \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = \lambda.$$

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.7 Fontos eloszlások

Egyenletes eloszlás az $\{1, 2, \dots, N\}$ halmazon

$$P\{\xi = k\} = \frac{1}{N}, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

$$E\xi = \sum_{k=1}^N k \cdot \frac{1}{N} = \frac{N(N+1)}{2N} = \frac{N+1}{2},$$

$$E(\xi^2) = \sum_{k=1}^N k^2 \cdot \frac{1}{N} = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6N} = \frac{(N+1)(2N+1)}{6},$$

$$\text{var } \xi = \frac{(N+1)(2N+1)}{6} - \frac{(N+1)^2}{4} = \frac{N^2 - 1}{12}.$$

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.7 Fontos eloszlások

Egyenletes eloszlás az $[a, b]$ intervallumon

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{ha } a < x \leq b, \\ 1 & \text{ha } x > b. \end{cases} \quad f_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{ha } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

$\xi = a + (b - a) \cdot \eta$ ahol η egyenletes eloszlású a $[0, 1]$ intervallumon, hiszen

$$P\{\eta < y\} = P\left\{\frac{\xi - a}{b - a} < y\right\} = P\{\xi < a + (b - a)y\} = \begin{cases} 0 & \text{ha } y \leq 0, \\ y & \text{ha } 0 \leq y \leq 1, \\ 1 & \text{ha } y \geq 1. \end{cases}$$

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.7 Fontos eloszlások

$$E\eta = \int_0^1 y \, dy = \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{2},$$

$$E(\eta^2) = \int_0^1 y^2 \, dy = \left[\frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{3},$$

$$\text{var } \eta = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12},$$

ezért

$$E\xi = a + (b - a) E\eta = a + \frac{b - a}{2} = \frac{a + b}{2},$$

$$\text{var } \xi = (b - a)^2 \text{var } \eta = \frac{(b - a)^2}{12}.$$

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.7 Fontos eloszlások

λ paraméterű exponenciális eloszlás

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{ha } x \geq 0, \end{cases} \quad \text{ahol } \lambda > 0.$$

$$E\xi = \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \left[-x e^{-\lambda x} \right]_{x=0}^{x=\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx = \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_{x=0}^{x=\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

$$\begin{aligned} E(\xi^2) &= \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \left[-x^2 e^{-\lambda x} \right]_{x=0}^{x=\infty} + 2 \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx \\ &= \frac{2}{\lambda} \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2}, \end{aligned}$$

$$\text{var } \xi = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.7 Fontos eloszlások

(m, σ^2) paraméterű normális eloszlás

$$f_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \text{ahol } m \in \mathbb{R}, \sigma > 0.$$

$E\xi = m$, $\text{var } \xi = \sigma^2$, ferdesége 0, csúcsossága 0.

Eloszlásfüggvénye:

$$F_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(u-m)^2}{2\sigma^2}} du, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Továbbá $\xi = \sigma \cdot \eta + m$, ahol η standard normális eloszlású, azaz paraméterei $m = 0$, $\sigma = 1$ így eloszlásfüggvénye

$$\Phi(x) := F_{\eta}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du, \quad x \in \mathbb{R},$$

melynek értékei táblázatokban megtalálhatók.