

Gazdasági matematika II.

Losonczi László, Pap Gyula

Debreceni Egyetem, Gazdaságtudományi Kar

A tananyag időbeli beosztását, vizsga és gyakorlati követelményeket az aktuális tárgyi tematika tartalmazza.



LOSONCZI LÁSZLÓ

Előadáskövető jegyzet és feladatok

<http://www.math.klte.hu/~losi/huindex.htm>



LOSONCZI LÁSZLÓ ÉS PAP GYULA

Előadáskövető fóliák

<http://www.math.klte.hu/~losi/huindex.htm>

Ajánlott irodalom:

 KNUT SYDSAETER és PETER HAMMOND
Matematika közgazdászoknak
Aula, 1998.

 DENKINGER GÉZA
Analízis: gyakorlatok
Nemzeti Tankönyvkiadó, 1999.

 DENKINGER GÉZA
Valószínűségszámítás
NT-0458, Nemzeti Tankönyvkiadó, 2001.

 DENKINGER GÉZA
Valószínűségszámítási gyakorlatok
NT-0459, Nemzeti Tankönyvkiadó, 2005.

 HATVANI LÁSZLÓ
Kalkulus közgazdászoknak
Polygon, Szeged, 2007.

Ajánlott irodalom:



KOVÁCS ZOLTÁN

Feladatgyűjtemény lineáris algebra gyakorlatokhoz
Kossuth Egyetemi Kiadó, 2005.



GÁSPÁR LÁSZLÓ

Lineáris algebra példatár
Tankönyvkiadó, 1971.



KOZMA LÁSZLÓ

Matematikai alapok
Studium Kiadó, 1999.

9. AZ $\mathbb{R}^k$ VEKTORTÉR

9.1 Az $\mathbb{R}^k$ vektortér fogalma

Az $\mathbb{R}^k$ vektortér

$\mathbb{R}^k := \{(x_1, x_2, \dots, x_k) : x_i \in \mathbb{R} \text{ minden } i = 1, 2, \dots, k \text{ esetén}\}.$

- Az $x = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ sorozatok **a tér pontjai**.
- Az $x_1, x_2, \dots, x_k$ számok az $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ **pont koordinátái**.
- $\mathbb{R}^k$ **pontjait vektorokként is felfoghatjuk**
(koordinátarendszer felvétele után az egyes pontoknak a kezdőpontból hozzájuk vezető irányított szakaszt feleltetjük meg).

9. AZ $\mathbb{R}^k$ VEKTORTÉR

9.1 Az $\mathbb{R}^k$ vektortér fogalma

Összeadás $\mathbb{R}^k$ -ban

Az $x = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ és $y = (y_1, y_2, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^k$ **vektorok összege**

$$x + y := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_k + y_k).$$

Skalárral való szorzás $\mathbb{R}^k$ -ban

Az $x = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ **vektor** $\lambda \in \mathbb{R}$ **skalárral való szorzata**

$$\lambda x := (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_k).$$

9. AZ $\mathbb{R}^k$ VEKTORTÉR

9.1 Az $\mathbb{R}^k$ vektortér fogalma

Az összeadás és a skalárral való szorzás tulajdonságai

- Bármely $x, y, z \in \mathbb{R}^k$ esetén a $0 = (0, 0, \dots, 0)$ zérusvektorral és $-x := (-1)x$ ellentett vektorral

$$x + (y + z) = (x + y) + z,$$

$$x + y = y + x,$$

$$x + 0 = x,$$

$$x + (-x) = 0.$$

- Bármely $x, y \in \mathbb{R}^k$ és bármely $\lambda, \mu, 1 \in \mathbb{R}$ esetén

$$\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y,$$

$$(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x,$$

$$(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x),$$

$$1x = x.$$

9. AZ $\mathbb{R}^k$ VEKTORTÉR

9.2 Vektorok lineáris függetlensége, bázis

Lineáris kombináció

Az $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^k$ vektorok $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ együtthatókkal képezett **lineáris kombinációján** a

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n$$

vektort értjük.

Lineáris függetlenség, függőség

Az $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^k$ vektorrendszert **lineárisan függetlennek** nevezzük, ha

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n = 0$$

csak $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ esetén áll fenn.

Egy vektorrendszert **lineárisan függőnek** nevezünk, ha nem lineárisan független.

9. AZ $\mathbb{R}^k$ VEKTORTÉR

9.2 Vektorok lineáris függetlensége, bázis

Ha $a_1, \dots, a_n$ lineárisan függő, akkor léteznek olyan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ együtthatók, melyek nem mind zérusok, és

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n = 0.$$

Ezért van olyan $\ell \in \{1, 2, \dots, n\}$ index, hogy $\lambda_\ell \neq 0$, így osztva λ_ℓ -lel

$$a_\ell = -\frac{\lambda_1}{\lambda_\ell} a_1 - \dots - \frac{\lambda_{\ell-1}}{\lambda_\ell} a_{\ell-1} - \frac{\lambda_{\ell+1}}{\lambda_\ell} a_{\ell+1} - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_\ell} a_n,$$

azaz az a_ℓ vektor kifejezhető a többi vektor lineáris kombinációjaként.

Lineáris függetlenség

Az $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^k$ vektorrendszer akkor és csak akkor lineárisan független, ha

$$b = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n, \quad b = \lambda'_1 a_1 + \dots + \lambda'_n a_n$$

csak $\lambda_1 = \lambda'_1, \dots, \lambda_n = \lambda'_n$ esetén teljesül.

9. AZ $\mathbb{R}^k$ VEKTORTÉR

9.2 Vektorok lineáris függetlensége, bázis

Az $\mathbb{R}^k$ vektortér k **dimenziós** abban az értelemben, hogy van $\mathbb{R}^k$ -ban k darab lineárisan független vektor, de bárhogyan is választunk $k + 1$ darab vektort $\mathbb{R}^k$ -ból, azok lineárisan függők.

Bázis

Az $\mathbb{R}^k$ vektortér bármely k számú lineárisan független $b_1, \dots, b_k$ vektorát a **tér bázisának** nevezzük.

Koordináták

Ha $b_1, \dots, b_k$ az $\mathbb{R}^k$ vektortér egy bázisa, akkor a tér minden v vektora egyértelműen írható

$$v = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \dots + \beta_k b_k$$

alakban. Az itt szereplő $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ skalárokat a v vektor $b_1, \dots, b_k$ bázisára vonatkozó **koordinátáinak** nevezzük.

9. AZ $\mathbb{R}^k$ VEKTORTÉR

9.2 Vektorok lineáris függetlensége, bázis

Példa. Az

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad e_2 = (0, 1, \dots, 0), \quad \dots \quad e_k = (0, 0, \dots, 1) \in \mathbb{R}^k$$

vektorok az $\mathbb{R}^k$ tér egy bázisát alkotják, melyet **természetes bázisnak** nevezünk.

Ha $v = (v_1, v_2, \dots, v_k) \in \mathbb{R}^k$, akkor

$$v = (v_1, v_2, \dots, v_k) = v_1 e_1 + v_2 e_2 + \dots + v_k e_k,$$

így v koordinátái azonosak v -nek a természetes bázisra vonatkozó koordinátáival.

9. AZ $\mathbb{R}^k$ VEKTORTÉR

9.3 Altér és rang

Altér

Az $\mathbb{R}^k$ vektortér **alterén** $\mathbb{R}^k$ olyan L részhalmazát értjük, mely nem üres és zárt az összeadásra és a skalárral való szorzásra nézve, azaz $a, b \in L$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén $a + b \in L$ és $\lambda a \in L$ teljesül.

Vektorrendszer által generált altér

Egy $a_1, a_2, \dots, a_n$ vektorrendszert tartalmazó legszűkebb alteret a **vektorrendszer által generált/kifeszített altérnek** nevezzük.

Jelölés: $\mathcal{L}(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

$$\mathcal{L}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \{\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n : \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}\},$$

azaz egy vektorrendszer által generált altér azonos a vektorrendszer vektoraiból képezhető **összes lineáris kombinációk halmazával**.

9. AZ $\mathbb{R}^k$ VEKTORTÉR

9.3 Altér és rang

Altér dimenziója

Egy L **altér dimenziója** r , ha van L -ben r darab lineárisan független vektor, de akárhogyan választunk $r + 1$ darab vektort L -ből, azok lineárisan függőek.

Vektorrendszer rangja

Egy $a_1, a_2, \dots, a_n$ **vektorrendszer rangjának** az általa generált $\mathcal{L}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ altér dimenzióját nevezzük.

Vektorrendszer rangja

Az $a_1, a_2, \dots, a_n$ vektorrendszer rangja megegyezik e rendszerből kiválasztható maximális számú, lineárisan független vektorok számával.

Vektorrendszer által generált altér

Az $a_1, a_2, \dots, a_n$ vektorrendszer által generált altér nem változik meg (és így a vektorrendszer rangja sem változik), ha

- megváltoztatjuk a vektorok sorrendjét,
- vagy valamelyik vektort egy $\lambda \neq 0$ skalárral megszorozzuk,
- vagy valamelyik vektorához egy másik vektorát hozzáadjuk.

10. DETERMINÁNSOK

10.1 Mátrix fogalma, műveletek mátrixokkal

$k \times n$ típusú (valós) mátrix

Ha $k \cdot n$ darab (valós) számot, az $\{a_{ij} : i = 1, 2, \dots, k; j = 1, 2, \dots, n\}$ számokat, k sorban és n oszlopban helyezünk el az alábbi módon:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix},$$

akkor egy $k \times n$ **típusú (valós) mátrixot** definiáltunk. Az összes $k \times n$ típusú mátrixok halmazát $\mathbb{R}^{k \times n}$ jelöli. A típus megadásánál **mindig a sorok száma** az első adat!

a_{ij} az A mátrix i -edik sorának j -edik eleme, vagy az A mátrix (i, j) -edik eleme. Használjuk az $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{k \times n}$ tömör jelölést is, ha ez nem okoz félreértést

10. MÁTRIXOK, DETERMINÁNSOK

10.1 Mátrix fogalma, műveletek mátrixokkal

Az $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{k \times n}$ mátrix **i -edik sorvektora/sormátrixa** és **j -edik oszlopvektora/oszlopmátrixa**

$$s_i = (a_{i1} \ a_{i2} \ \cdots \ a_{in}), \quad o_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{kj} \end{pmatrix}$$

Speciális mátrixok

- Az A mátrix **négyzetes vagy kvadratikus**, ha n sora és n oszlopa van, azaz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Diagonálisa (főátlója) : $\{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\}$.
- **n -edrendű egységmátrix:** az az n -edrendű $E = E_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ kvadratikus mátrix, melynek főátlójában csupa 1 áll, azon kívül pedig csupa 0 áll.
- **$k \times n$ típusú zérusmátrix:** az a $k \times n$ típusú $O = O_{k \times n} \in \mathbb{R}^{k \times n}$ mátrix, melynek minden eleme 0.

10. MÁTRIXOK, DETERMINÁNSOK

10.1 Mátrix fogalma, műveletek mátrixokkal

Mátrix transzponáltja

Az $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{k \times n}$ **mátrix transzponáltján** az

$$A^T := (a_{ji}) \in \mathbb{R}^{n \times k}$$

mátrixot értjük (a mátrix sorait és oszlopait megcserélve kapjuk a mátrix transzponáltját).

Azonos típusú mátrixok összeadása és számmal való szorzása

Legyenek $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{k \times n}$ **azonos típusú mátrixok** és legyen $\lambda \in \mathbb{R}$. Ekkor az $A + B \in \mathbb{R}^{k \times n}$ és $\lambda A \in \mathbb{R}^{k \times n}$ mátrixok definíciója:

$$A + B := (a_{ij} + b_{ij}) \in \mathbb{R}^{k \times n}, \quad \lambda A := (\lambda a_{ij}) \in \mathbb{R}^{k \times n}.$$

10. MÁTRIXOK, DETERMINÁNSOK

10.1 Mátrix fogalma, műveletek mátrixokkal

Az összeadás, számmal való szorzás és transzponálás tulajdonságai

Az összes $k \times n$ típusú valós mátrixok $\mathbb{R}^{k \times n}$ halmazában az összeadás és a számmal való szorzás ugyanolyan tulajdonságokkal rendelkezik, mint az $\mathbb{R}^\ell$ vektortérben.

Továbbá bármely $A, B \in \mathbb{R}^{k \times n}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$(A + B)^T = A^T + B^T, \quad (\lambda A)^T = \lambda A^T.$$

10. MÁTRIXOK, DETERMINÁNSOK

10.1 Mátrix fogalma, műveletek mátrixokkal

Két **mátrix szorzata csak akkor értelmezett**, ha az első mátrixnak annyi oszlopa van, mint ahány sora van a második mátrixnak.

Mátrixok szorzata

$A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{k \times n}$ és $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ mátrixok $C = AB$ **szorzatán** azt a $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{k \times m}$ mátrixot értjük, melyre

$$c_{ij} := \sum_{s=1}^n a_{is}b_{sj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

ha $i = 1, 2, \dots, k ; j = 1, 2, \dots, m$.

Ezt a szorzást röviden "**sor-oszlop kombinációnak**" mondjuk, mert a szorzatmátrix c_{ij} eleme éppen az A mátrix i -edik sorvektorának és a B mátrix j -edik oszlopvektorának a belső szorzata $\mathbb{R}^n$ -ben.

10. MÁTRIXOK, DETERMINÁNSOK

10.1 Mátrix fogalma, műveletek mátrixokkal

Mátrixok szorzásának tulajdonságai

$$A(BC) = (AB)C,$$

$$(A + B)C = AC + BC,$$

$$A(B + C) = AB + AC,$$

$$(AB)^{\top} = B^{\top} A^{\top},$$

$$AO = OA = O,$$

ahol A , B , C , O olyan mátrixok, melyekre a felírt műveleteknek van értelme. Kvadratikus A mátrixokra

$$AE = EA = A.$$

A mátrixszorzás **nem kommutatív**, azaz általában $AB \neq BA$.

10. MÁTRIXOK, DETERMINÁNSOK

10.1 Mátrix fogalma, műveletek mátrixokkal

Kvadratikus mátrix inverze

Egy A kvadratikus mátrixot **invertálhatónak nevezünk**, ha van olyan B (kvadratikus) mátrix, melyre

$$AB = BA = E$$

teljesül. Ezt a B mátrixot A **inverzének nevezzük** és A^{-1} -gyel jelöljük.

Ha A invertálható, akkor csak egy inverze van. Ugyanis, ha B' is A inverze volna, akkor $AB' = B'A = E$ miatt

$$B = BE = B(AB') = (BA)B' = EB' = B' \quad \text{azaz} \quad B = B'.$$

10. MÁTRIXOK, DETERMINÁNSOK

10.2 Determináns fogalma, alaptulajdonágai

Permutációk

Az $\{1, 2, \dots, n\}$ számok egy $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ elrendezését ezen elemek egy **permutációjának** nevezzük.

Az $\{1, 2, \dots, n\}$ számok összes permutációinak halmazát $\mathcal{S}_n$ jelöli.

Egy $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_n) \in \mathcal{S}_n$ permutációban a (α_i, α_j) **pár inverzióban** áll, ha $i < j$ és $\alpha_i > \alpha_j$.

Egy α permutáció inverzióinak számát (az inverzióban álló párok számát) $I(\alpha)$ jelöli.

Az $\{1, 2, \dots, n\}$ számok összes permutációinak száma $n!$.

10. MÁTRIXOK, DETERMINÁNSOK

10.2 Determináns fogalma, alaptulajdonágai

Determináns definíciója

Egy n -edrendű kvadratikus A mátrix *determinánsán* az

$$|A| := \sum_{\alpha \in S_n} (-1)^{l(\alpha)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n}$$

számot értjük, ahol az összegezés kiterjed az $1, 2, \dots, n$ számok összes $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ permutációjára, és $l(\alpha)$ az α permutáció inverzióinak száma.

10. MÁTRIXOK, DETERMINÁNSOK

10.2 Determináns fogalma, alaptulajdonágai

Másod és harmadrendű determinánsok kiszámítása a definíció alapján

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

10. MÁTRIXOK, DETERMINÁNSOK

10.2 Determináns fogalma, alaptulajdonágai

A determináns alaptulajdonságai

- 1 Bármely A kvadratikus mátrixra teljesül $\det(A^T) = \det(A)$.
- 2 Ha egy sor minden elemét c -vel szorozzuk, akkor a determináns értéke c -szeresére változik.
- 3 Ha két sort felcserélünk, akkor a determináns előjelet vált.
- 4 Ha két sor megegyezik, akkor a determináns értéke nulla.
- 5 A determináns értéke nem változik, ha egy sorának elemeihez egy másik sor megfelelő elemeinek c -szeresét hozzáadjuk.
- 6 Ha egy sor minden eleme két tag összegére bomlik, akkor a determináns felírható két olyan determináns összegeként, melyek megfelelő soraiban éppen az egyes összeadandók állnak.
- 7 Ha egy sorban csupa 0 áll, akkor a determináns értéke nulla.
- 8 Az egységmátrixok determinánsa 1 .

10. MÁTRIXOK, DETERMINÁNSOK

10.3 Kifejtési tétel, szorzástétel

Adjungált aldetermináns

Egy n -edrendű kvadratikus $A = (a_{ij})$ mátrixból, elhagyva az a_{ij} elem sorát és oszlopát, és a visszamaradó $n - 1$ -edrendű kvadratikus mátrix determinánsát $(-1)^{i+j}$ -vel megszorozva kapott számot az A mátrix a_{ij} eleméhez tartozó adjungált aldeterminánsnak nevezzük, és A_{ij} -vel jelöljük.

Kifejtési tétel

Bármely n -edrendű kvadratikus A mátrix esetén

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} = \begin{cases} |A| & \text{ha } i = i' \\ 0 & \text{ha } i \neq i' \end{cases} \quad (i, i' = 1, \dots, n, \text{ ez a sor szerinti kifejtés})$$
$$\sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij} = \begin{cases} |A| & \text{ha } j = j' \\ 0 & \text{ha } j \neq j' \end{cases} \quad (j, j' = 1, \dots, n, \text{ ez az oszlop szerinti kifejtés})$$

10. MÁTRIXOK, DETERMINÁNSOK

10.3 Kifejtési tétel, szorzástétel

Determinánsok szorzástétele

Ha $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ azonos rendű kvadratikus mátrixok, akkor

$$|AB| = |A| |B|.$$

Inverz mátrix előállítása

Egy (kvadratikus) mátrix akkor és csak akkor invertálható, ha determinánsa nem nulla. Egy $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ n -edrendű invertálható kvadratikus mátrix $A^{-1} = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ inverzének elemei

$$b_{ij} = \frac{A_{ji}}{|A|} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

ahol A_{ji} a j -edik sor i -edik eleméhez tartozó adjungált aldetermináns.

10. MÁTRIXOK, DETERMINÁNSOK

10.4 Mátrix rangja, rangszámtétel

Mátrix rangja

Egy A **mátrix** $\text{rang}(A)$ **rangján** oszlopvektorainak rangját értjük (ami a maximális lineárisan független oszlopvektorok száma).

A zérusmátrixok rangja nulla.

Aldetermináns

Legyen $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$ egy $k \times n$ típusú mátrix, és $1 \leq \ell \leq \min\{k, n\}$. Az A **egy ℓ -edrendű aldeterminánsát** úgy kapjuk, hogy kiválasztjuk a mátrix ℓ darab sorát és ℓ darab oszlopát, és képezzük az ezek metszetében lévő elemekből alkotott ℓ -edrendű determinánst.

Rangszámtétel

Bármely (nemzérus) mátrix rangja megegyezik a maximális rendű nullától különböző aldeterminánsainak rendjével.

10. MÁTRIXOK, DETERMINÁNSOK

10.4 Mátrix rangja, rangszámtétel

Egy mátrix sorvektorainak rangja egyenlő az oszlopvektorainak rangjával. Egy (kvadratikus) mátrix akkor és csak akkor invertálható, ha a mátrix oszlopvektorai (vagy sorvektorai) lineárisan függetlenek.

11. LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK

11.1 Lineáris egyenletrendszer fogalma, Gauss-elimináció

Lineáris egyenletrendszernek nevezzük az

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n = b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{k1} x_1 + a_{k2} x_2 + \cdots + a_{kn} x_n = b_k$$

egyenletrendszert, ahol a_{ij} , b_i ($i = 1, \dots, k$; $j = 1, \dots, n$) **adott** valós számok, x_i ($i = 1, \dots, n$) **ismeretlen** valós számok.

Az a_{ij} számokat a rendszer **együtthatóinak** nevezzük, b_i az i -edik egyenlet **szabad tagja**.

Az egyenletrendszert **homogénnek** nevezzük, ha $b_1 = \cdots = b_k = 0$, ellenkező esetben **inhomogénnek** mondjuk.

Az egyenletrendszert **szabályosnak** nevezzük, ha $k = n$, azaz ha az egyenletek és ismeretlenek száma egyenlő.

11. LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK

11.1 Lineáris egyenletrendszer fogalma, Gauss-elimináció

Tömören:

$$Ax = b,$$

ahol

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k \times n},$$

$$x := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 1}, \quad b := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k \times 1}.$$

11. LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK

11.1 Lineáris egyenletrendszer fogalma, Gauss-elimináció

Alapvető kérdések:

- Van-e az egyenletrendszernek megoldása, és ha igen, akkor egyértelmű-e?
- Hogyan határozhatjuk meg az összes megoldást?

Egy (lineáris) egyenletrendszer

- **megoldható**, ha van megoldása;
- **ellentmondásos**, ha nincs megoldása;
- **határozott**, ha pontosan egy megoldás létezik;
- **határozatlan**, ha több megoldás van.

11. LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK

11.1 Lineáris egyenletrendszer fogalma, Gauss-elimináció

Ekvivalens átalakítások

Két **egyenletrendszert ekvivalensnek** nevezünk, ha megoldásaik halmaza egyenlő.

Ekvivalens átalakítások

Lineáris egyenletrendszerek esetén az alábbi átalakítások ekvivalens rendszereket eredményeznek:

- *az egyenletek sorrendjének megváltoztatása;*
- *az egyenletekben szereplő tagok sorrendjének megváltoztatása;*
- *a rendszer bármelyik egyenletének szorzása (minden tag szorzása) egy nemzérus számmal;*
- *a rendszer bármelyik egyenletének hozzáadása egy másik egyenletéhez.*

11. LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK

11.1 Lineáris egyenletrendszer fogalma, Gauss-elimináció

Trapéz alakú lineáris egyenletrendszer

Az egyenletrendszert akkor nevezzük **trapéz alakúnak**, ha van olyan $r \in \{1, \dots, n\}$ szám, hogy

- $a_{11} \neq 0, a_{22} \neq 0, \dots, a_{rr} \neq 0,$
- $a_{ij} = 0$, ha $i = 1, 2, \dots, r$ és $j < i$,
- $a_{ij} = 0$, ha $i > r$ és $j = 1, 2, \dots, n$.

Ha $r = n$, akkor a rendszert **háromszögalakúnak** nevezzük.

11. LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK

11.1 Lineáris egyenletrendszer fogalma, Gauss-elimináció

Gauss-elimináció

Az ismeretlenek szukcesszív (fokozatos) kiküszöbölésével az egyenletrendszert trapéz alakra hozzuk a következő lépésekkel:

- Tegyük fel, hogy $a_{11} \neq 0$. Az első egyenlet $-\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ -szeresét az i -edik egyenlethez hozzáadva $i = 2, 3, \dots, k$ esetén, az x_1 ismeretlen eltűnik a második, harmadik, $\dots$ k -edik egyenletből. Ha $a_{11} = 0$, akkor az első egyenletben keresünk egy ismeretlent, melynek együtthatója $\neq 0$, és ez veszi át x_1 szerepét.
- Ezután a második egyenlet alkalmas konstanszorosainak a harmadik $\dots$ k -edik egyenlethez való hozzáadásával kiküszöböljük a harmadik ismeretlent a negyedik, $\dots$ k -edik egyenletből.
- Az eljárást hasonlóan folytatjuk, míg van mit kiküszöbölni.

11. LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK

11.1 Lineáris egyenletrendszer fogalma, Gauss-elimináció

Trapéz alakú lineáris egyenletrendszer megoldhatósága

Egy trapéz alakú egyenletrendszernek

- *akkor és csakis akkor van megoldása, ha a trapéz alakban az $r + 1$ -edik egyenlettől kezdve a szabad tagok mind nullák;*
- *megoldható esetben akkor és csakis akkor van pontosan egy megoldása, ha $r = n$, azaz ha a rendszer háromszög alakú;*
- *akkor és csakis akkor van több megoldása, ha $r < n$; ebben az esetben végtelen sok megoldása van, és a megoldások egy $n - r$ paraméteres sereget alkotnak.*

11. LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK

11.2 Lineáris egyenletrendszerek megoldhatósága

Lineáris egyenletrendszer megoldhatósága

Az $Ax = b$ ($A \in \mathbb{R}^{k \times n}$, $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $b \in \mathbb{R}^{k \times 1}$) *inhomogén lineáris egyenletrendszernek akkor és csakis akkor van megoldása, ha a*

$$\text{rang } A = \text{rang } (A | b)$$

rangfeltétel teljesül, ahol A a rendszer együtthatómátrixa, $(A | b)$ pedig a bővített mátrix, melyet az A mátrixból úgy kapunk, hogy az A mátrixhoz $n + 1$ -edik oszlopként hozzáírjuk a szabad tagok b oszlopvektorát.

11. LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK

11.2 Lineáris egyenletrendszerek megoldhatósága

Homogén rendszer esetén (amikor $b_1 = \dots = b_k = 0$), mindig van megoldás: az $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ **triviális megoldás**.

Homogén rendszer nemtriviális megoldásának létezése

Az $Ax = 0$ ($A \in \mathbb{R}^{k \times n}$, $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$) *homogén lineáris egyenletrendszernek akkor és csak akkor van triviálistól különböző megoldása, ha*

$$\text{rang } A < n,$$

azaz ha a rendszer A mátrixának rangja kisebb mint az ismeretlenek száma. Ha ez teljesül, akkor a homogén rendszer összes megoldásai $\mathbb{R}^n$ -nek egy

$$n - \text{rang } A$$

dimenziós alterét alkotják.

11. LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK

11.2 Lineáris egyenletrendszerek megoldhatósága

Lineáris egyenletrendszer megoldáshalmazának szerkezete

Az

$$Ax = b \quad (A \in \mathbb{R}^{k \times n}, \quad x \in \mathbb{R}^{n \times 1}, \quad b \in \mathbb{R}^{k \times 1})$$

inhomogén lineáris egyenletrendszer bármely x megoldása

$$x = x' + x^h$$

alakba írható, ahol x' az inhomogén egyenlet egy **rögzített** (partikuláris) megoldása, x^h pedig a megfelelő

$$Ax = 0$$

homogén egyenletrendszer egy tetszőleges megoldása. Így a megoldások halmaza a homogén egyenletrendszer megoldásterének az x' vektorral való eltoltja.

11. LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK

11.3 Cramer-szabály lineáris egyenletrendszerek megoldására

Cramer-szabály

Legyen A egy n -edrendű kvadratikus mátrix. Az

$$Ax = b \quad (A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad x \in \mathbb{R}^{n \times 1}, \quad b \in \mathbb{R}^{n \times 1})$$

(szabályos) lineáris egyenletrendszernek akkor és csak akkor van pontosan egy megoldása, ha

$$|A| \neq 0.$$

Ha ez teljesül, akkor a rendszer egyetlen megoldása

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

ahol A_i az a mátrix, melyet az A mátrixból úgy kapunk, hogy annak i -edik oszlopát a szabad tagok b (oszlop)vektorára cseréljük ki.

11. LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK

11.3 Cramer-szabály lineáris egyenletrendszerek megoldására

Szabályos homogén lineáris egyenletrendszer nemtriviális megoldásának létezése

Legyen A egy n -edrendű kvadratikus mátrix. Az

$$Ax = 0 \quad (A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad x \in \mathbb{R}^{n \times 1})$$

(szabályos) homogén lineáris egyenletrendszernek akkor és csakis akkor van nemtriviális megoldása, ha

$$|A| = 0.$$

12. LINEÁRIS TRANSZFORMÁCIÓK

12.1 Lineáris leképezés és mátrixa

Lineáris leképezés/operátor/transzformáció

A $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ leképezést **lineáris leképezésnek** nevezzük, ha bármely $x, y \in \mathbb{R}^n$ és bármely $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}\varphi(x + y) &= \varphi(x) + \varphi(y) && \text{(azaz } \varphi \text{ additív),} \\ \varphi(\lambda x) &= \lambda \varphi(x) && \text{(azaz } \varphi \text{ homogén).}\end{aligned}$$

12. LINEÁRIS TRANSZFORMÁCIÓK

12.1 Lineáris leképezés és mátrixa

Lineáris leképezés megadása mátrix segítségével

Ha $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineáris leképezés, $b_1, \dots, b_n$ az $\mathbb{R}^n$ egy bázisa, és $A_\varphi = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ az a mátrix, melyre

$$\varphi(b_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} b_i \quad \text{minden } j = 1, \dots, n \text{ esetén,}$$

akkor minden $x = \sum_{j=1}^n x_j b_j \in \mathbb{R}^n$ esetén $\varphi(x) = y = \sum_{i=1}^n y_i b_i$, ahol

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \quad \text{minden } i = 1, \dots, n \text{ esetén.}$$

Bizonyítás:

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^n x_j \varphi(b_j) = \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^n a_{ij} b_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) b_i.$$

12. LINEÁRIS TRANSZFORMÁCIÓK

12.1 Lineáris leképezés és mátrixa

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

azaz mátrixos formában:

$$\varphi(x) = y = A_\varphi x.$$

Lineáris leképezés mátrixa

Azt mondjuk, hogy az A_φ (n -edrendű kvadratikus) mátrix a φ **lineáris leképezés mátrixa a $b_1, \dots, b_n$ bázisban.**

Rögzített bázis esetén a $\varphi \mapsto A_\varphi$ hozzárendelés kölcsönösen egyértelmű a $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineáris leképezések és az $A_\varphi \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixok között.

12. LINEÁRIS TRANSZFORMÁCIÓK

12.1 Lineáris leképezés és mátrixa

Lineáris leképezések összege, számszorosa és kompozíciója

$$(\varphi + \psi)(x) := \varphi(x) + \psi(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n),$$

$$(\lambda\varphi)(x) := \lambda\varphi(x) \quad (\lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n),$$

$$(\varphi \circ \psi)(x) := \varphi(\psi(x)) \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

A $\varphi \mapsto A_\varphi$ hozzárendelés tulajdonságai

Rögzített bázis és tetszőleges $\varphi, \psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineáris leképezések esetén

$$A_{\varphi+\psi} = A_\varphi + A_\psi,$$

$$A_{\lambda\varphi} = \lambda A_\varphi,$$

$$A_{\varphi \circ \psi} = A_\varphi A_\psi.$$

Továbbá $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ akkor és csak akkor kölcsönösen egyértelmű, ha A_φ invertálható.

12. LINEÁRIS TRANSZFORMÁCIÓK

12.1 Lineáris leképezés és mátrixa

Lineáris leképezés mátrixa különböző bázisokban

Legyen $b_1, \dots, b_n$ és $b'_1, \dots, b'_n$ az $\mathbb{R}^n$ tér két bázisa, és

$$A_\varphi = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \text{ahol} \quad \varphi(b_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} b_i,$$

$$A'_\varphi = (a'_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \text{ahol} \quad \varphi(b'_j) = \sum_{i=1}^n a'_{ij} b'_i$$

a $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineáris leképezés mátrixai. Akkor van olyan $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertálható mátrix, hogy

$$A'_\varphi = S^{-1} A_\varphi S.$$

12. LINEÁRIS TRANSZFORMÁCIÓK

12.2 Sajátértékek és sajátvektorok

Kvadratikus mátrix sajátértéke, sajátvektora

A $\lambda \in \mathbb{R}$ számot az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix **sajátértékének** nevezzük, ha van olyan nullától különböző $x \in \mathbb{R}^n$ vektor, melyre

$$Ax = \lambda x$$

teljesül. Az x vektort az A mátrix λ sajátértékéhez tartozó **sajátvektorának** nevezzük.

Más alakban:

$$(A - \lambda E)x = 0.$$

Ennek a homogén lineáris egyenletrendszernek akkor és csakis akkor van nemtriviális megoldása, ha

$$\det(A - \lambda E) = 0.$$

Ezt a determinánst kifejtve egy λ -ban n -edfokú polinomot kapunk. Ennek zérushelyei adják A sajátértékeit.

12. LINEÁRIS TRANSZFORMÁCIÓK

12.3 Mátrixok diagonális alakra hozása

Diagonális mátrix

Egy $n \times n$ -es D mátrixot **diagonálisnak** nevezünk, ha a főátlón kívüli elemei mind zérusok. Jelölés:

$$\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Kvadratikus mátrix diagonális alakra hozása

Egy $n \times n$ -es A mátrixot **diagonalizálhatónak** (diagonális alakra hozhatónak) nevezünk, ha van olyan invertálható $n \times n$ -es S mátrix és egy D diagonális mátrix, melyekre

$$S^{-1}AS = D.$$

12. LINEÁRIS TRANSZFORMÁCIÓK

12.3 Mátrixok diagonális alakra hozása

Ha A és S két $n \times n$ -es mátrix és S invertálható, akkor az A és $S^{-1}AS$ mátrixok sajátértékei megegyeznek.

Bizonyítás:

$$\begin{aligned}\det(S^{-1}AS - \lambda E) &= \det(S^{-1}AS - S^{-1}(\lambda E)S) = \det(S^{-1}(A - \lambda E)S) \\ &= \det(S^{-1}) \det(A - \lambda E) \det(S) = \det(A - \lambda E).\end{aligned}$$

A diagonalizálhatóság kritériuma

Egy $n \times n$ -es A mátrix akkor és csak akkor diagonalizálható, ha van n lineárisan független sajátvektora, $x_1, \dots, x_n$. Ekkor

$$S^{-1}AS = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

ahol az S mátrix oszlopvektorai rendre $x_1, \dots, x_n$, a $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ számok pedig a hozzájuk tartozó sajátértékek.

12. LINEÁRIS TRANSZFORMÁCIÓK

12.4 Szimmetrikus és ortogonális mátrixok

Szimmetrikus és ortogonális mátrixok

Egy kvadratikus A mátrixot **szimmetrikusnak** nevezünk, ha $A^T = A$, illetve **ortogonálisnak** nevezünk, ha $A^T A = E$.

Ortogonalis/merőleges vektorok

Az $x, y \in \mathbb{R}^n$ vektorok akkor **ortogonálisak**, ha $\langle x, y \rangle = 0$.

Ortogonalis mátrixok

Egy kvadratikus A mátrix esetén a következő állítások ekvivalensek:

- A ortogonális;
- A invertálható, és $A^{-1} = A^T$;
- A sorvektorai egységvektorok és páronként ortogonálisak;
- A oszlopvektorai egységvektorok és páronként ortogonálisak.

12. LINEÁRIS TRANSZFORMÁCIÓK

12.4 Szimmetrikus és ortogonális mátrixok

Szimmetrikus mátrixok sajátértékei és sajátvektorai

Ha A egy kvadratikus szimmetrikus mátrix, akkor

- *A sajátértékei mind valós számok;*
- *A különböző sajátértékeihez tartozó sajátvektorok ortogonálisak.*

Szimmetrikus mátrixok spektráltétele

Ha A egy $n \times n$ -es szimmetrikus mátrix, akkor létezik olyan ortogonális U mátrix, amelyre

$$U^{-1} A U = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

ahol $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ az A sajátértékei, az U mátrix i -edik oszlopa pedig a λ_i -hez tartozó sajátvektora ($i = 1, \dots, n$).

12. LINEÁRIS TRANSZFORMÁCIÓK

12.5 Kvadratikus függvények

Bilineáris és kvadratikus függvények

Ha $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, akkor

- az $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x, y) := \langle Ax, y \rangle$, $(x, y \in \mathbb{R}^n)$ függvényt **bilineáris függvénynek/formának** nevezzük;
- a $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $Q(x) := \langle Ax, x \rangle$, $(x \in \mathbb{R}^n)$ függvényt **kvadratikus függvénynek/formának** nevezzük.

12. LINEÁRIS TRANSZFORMÁCIÓK

12.5 Kvadratikus függvények

Tehát ha $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, akkor

$$Q(x) = Q(x_1, \dots, x_n) = \langle Ax, x \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j,$$

így feltehető, hogy A **szimmetrikus mátrix**. Ezért létezik olyan U ortogonális mátrix, melyre

$$U^{-1} A U = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

ahol $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ az A sajátértékei. Innen

$$A = U D U^{-1} = U D U^{\top},$$

ezért $y := U^{\top} x$ jelöléssel

$$Q(x) = \langle Ax, x \rangle = \langle U D U^{\top} x, x \rangle = \langle D U^{\top} x, U^{\top} x \rangle = \langle D y, y \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2.$$

Ezt a Q kvadratikus forma **kanonikus alakjának** nevezzük.

12. LINEÁRIS TRANSZFORMÁCIÓK

12.5 Kvadratikus függvények

Kvadratikus függvény pozitív/negatív definitisége

Egy szimmetrikus $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixszal képezett

$$Q(x) := \langle Ax, x \rangle \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

kvadratikus függvényt

- **pozitív definitnek nevezünk**, ha $Q(x) > 0$ minden $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ mellett,
- **negatív definitnek nevezünk**, ha $Q(x) < 0$ minden $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ mellett,
- **indefinitnek nevezünk**, ha Q felvesz pozitív és negatív értékeket is.

12. LINEÁRIS TRANSZFORMÁCIÓK

12.5 Kvadratikus függvények

Kritérium kvadratikus függvény definitségére

Egy szimmetrikus $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixszal képezett

$$Q(x) := \langle Ax, x \rangle \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

kvadratikus függvény akkor és csak akkor

- **pozitív definit**, ha A összes sajátértéke pozitív,
- **negatív definit**, ha A összes sajátértéke negatív,
- **indefinit**, ha A -nak van pozitív és negatív sajátértéke is.

12. LINEÁRIS TRANSZFORMÁCIÓK

12.5 Kvadratikus függvények

Kritérium kvadratikus függvény definitségére

Legyen $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ szimmetrikus mátrix, és legyen Δ_k ($k = 1, \dots, n$) az A mátrix bal felső k -adrendű sarokdeterminánsa (sarokfőminora), azaz

$$\Delta_1 := a_{11}, \quad \Delta_2 := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \dots \quad \Delta_n := |A|,$$

akkor a

$$Q(x) := \langle Ax, x \rangle \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

kvadratikus függvény akkor és csakis akkor

- **pozitív definit**, ha $\Delta_k > 0$ minden $k = 1, \dots, n$ esetén;
- **negatív definit**, ha $(-1)^k \Delta_k > 0$ minden $k = 1, \dots, n$ esetén.

13. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

13.1 Metrika és topológia $\mathbb{R}^k$ -ban

Skaláris/belső szorzás $\mathbb{R}^k$ -ban

Az $x = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ és $y = (y_1, y_2, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^k$ **vektorok skaláris vagy belső szorzata**

$$\langle x, y \rangle := x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_k y_k.$$

A skaláris/belső szorzás tulajdonságai

Bármely $x, y, z \in \mathbb{R}^k$ és bármely $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle,$$

$$\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle,$$

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle,$$

$$\langle x, x \rangle \geq 0, \quad \text{és} \quad \langle x, x \rangle = 0 \text{ akkor és csak akkor, ha } x = 0.$$

13. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

13.1 Metrika és topológia $\mathbb{R}^k$ -ban

Cauchy-Schwarz-egyenlőtlenség

Bármely két $x, y \in \mathbb{R}^k$ vektor esetén $|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}$.

Vektor hossza/normája

Az $x = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ vektor hossza/normája $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

A hossz/norma tulajdonságai

Bármely $x, y \in \mathbb{R}^k$ és bármely $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$\|x\| \geq 0$, és $\|x\| = 0$ akkor és csakis akkor, ha $x = 0$,

$\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$,

$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

13. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

13.1 Metrika és topológia $\mathbb{R}^k$ -ban

Pontok távolsága

Az $x, y \in \mathbb{R}^k$ pontok **távolsága** $d(x, y) := \|x - y\|$.

Pont (nyílt) környezete

Egy $a \in \mathbb{R}^k$ **pont** $\varepsilon > 0$ **sugarú (nyílt) környezetén** a

$$K(a, \varepsilon) := \{x \in \mathbb{R}^k : d(x, a) = \|x - a\| < \varepsilon\}$$

halmazt értjük.

$k = 1$ esetén $K(a, \varepsilon)$ az a pontra nézve **szimmetrikus** 2ε hosszúságú $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ **nyílt intervallum**.

$k = 2$ esetén $K(a, \varepsilon)$ az $a = (a_1, a_2)$ pont körüli ε sugarú **nyílt körlap**.

$k = 3$ esetén $K(a, \varepsilon)$ az $a = (a_1, a_2, a_3)$ pont körüli ε sugarú **nyílt gömb**.

13. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

13.1 Metrika és topológia $\mathbb{R}^k$ -ban

- Az $a \in \mathbb{R}^k$ pontot az $A \subset \mathbb{R}^k$ **halmaz belső pontjának** nevezzük, ha a -nak van olyan környezete, mely A -ban van (azaz van olyan $\varepsilon > 0$, hogy $K(a, \varepsilon) \subset A$).
- Az $a \in \mathbb{R}^k$ pontot az $A \subset \mathbb{R}^k$ **halmaz izolált pontjának** nevezzük, ha $a \in A$, és a -nak van olyan környezete, melyben a -n kívül nincs A -beli pont (azaz $a \in A$, és van olyan $\varepsilon > 0$, hogy $(K(a, \varepsilon) \setminus \{a\}) \cap A = \emptyset$).
- Az $a \in \mathbb{R}^k$ pontot az $A \subset \mathbb{R}^k$ **halmaz torlódási pontjának** nevezzük, ha a bármely környezetében van tőle különböző A -beli pont (azaz bármely $\varepsilon > 0$ esetén $(K(a, \varepsilon) \setminus \{a\}) \cap A \neq \emptyset$).
- Az $a \in \mathbb{R}^k$ pontot az $A \subset \mathbb{R}^k$ **halmaz határpontjának** nevezzük, ha a bármely környezetében van A -beli és nem A -beli pont is (azaz bármely $\varepsilon > 0$ esetén $K(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ és $K(a, \varepsilon) \cap \bar{A} \neq \emptyset$, ahol $\bar{A} := \mathbb{R}^k \setminus A$ az A halmaz komplementere).

13. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

13.1 Metrika és topológia $\mathbb{R}^k$ -ban

- Az $A \subset \mathbb{R}^k$ halmazt **nyílt**nek nevezzük, ha minden pontja belső pontja A -nak.
- Az $A \subset \mathbb{R}^k$ halmazt **zárt**nek nevezzük, ha komplementere nyílt.

13. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

13.1 Metrika és topológia $\mathbb{R}^k$ -ban

Sorozat $\mathbb{R}^k$ -ban

Egy $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^k$ függvényt $\mathbb{R}^k$ -beli **sorozatnak** nevezünk. Jelölés: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ahol $a_n := a(n)$, és $a_n = (a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nk})$, ha $n \in \mathbb{N}$.

Konvergens sorozat $\mathbb{R}^k$ -ban

Az $\mathbb{R}^k$ -beli $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sortozatot **konvergensnek** nevezzük, ha van olyan $b \in \mathbb{R}^k$, hogy bármely $\varepsilon > 0$ -hoz létezik olyan $N(\varepsilon) \in \mathbb{R}$ szám, hogy

$$\|a_n - b\| < \varepsilon \quad \text{amennyiben} \quad n > N(\varepsilon).$$

A b pontot a sorozat **határértékének** (limeszének) nevezzük. Jelölés:

$$a_n \rightarrow b \quad \text{ha} \quad n \rightarrow \infty, \quad \text{vagy} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b.$$

Egy $\mathbb{R}^k$ -beli sortozatot **divergensnek** nevezünk, ha nem konvergens.

13. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

13.1 Metrika és topológia $\mathbb{R}^k$ -ban

$\mathbb{R}^k$ -beli konvergencia = koordinátánkénti konvergencia

$$a_n = (a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nk}) \rightarrow b = (b_1, b_2, \dots, b_k) \quad \text{ha} \quad n \rightarrow \infty$$

akkor és csakis akkor, ha

$$a_{ni} \rightarrow b_i \quad \text{ha} \quad n \rightarrow \infty \quad \text{minden } i = 1, 2, \dots, k \text{ esetén.}$$

Ez azt jelenti, hogy egy vektorsorozat akkor és csakis akkor konvergens, ha a sorozat minden koordinátája konvergens, és határértéke a határvektor megfelelő koordinátája.

13. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

13.2 Többváltozós függvény határértéke és folytonossága

Egy $D \subset \mathbb{R}^k$ halmaz torlódási pontjainak halmazát D' -vel jelöljük.

Többváltozós függvény határértéke

Legyen $f : D \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ és legyen $x_0 \in D'$. Azt mondjuk, hogy f -nek van (véges, vagy végtelen) **határértéke** az x_0 pontban, ha van olyan $a \in \mathbb{R}_b$ bővített valós szám, hogy bármely olyan D -beli $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatra, melyre $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ és $x_n \neq x_0$, teljesül a $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$ egyenlőség.

$a \in \mathbb{R}_b$ -t az f függvény x_0 pontbeli határértékének nevezzük és $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ -vel, vagy $f(x) \rightarrow a$ ($x \rightarrow x_0$)-vel jelöljük.

13. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

13.2 Többváltozós függvény határértéke és folytonossága

Átfogalmazás

Másképpen megfogalmazva: az f függvény értelmezési tartományának egy $x_0 \in D'$ torlódási pontjában akkor és csakis akkor lesz f határértéke az $a \in \mathbb{R}_b$ bővített valós szám, ha az értelmezési tartományból bármely x_0 -hoz konvergáló $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatot véve, melynek elemei x_0 -tól különbözőek, a függvényértékek $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ sorozata a -hoz tart.

Határérték egyértelműsége

Függvény határértéke, ha létezik, akkor egyértelmű.

Határérték **létezhet az x_0 pontban akkor is, ha a függvény nincs értelmezve a pontban**, de torlódási pontja annak (egy halmaz torlódási pontja ugyanis nem feltétlenül pontja a halmaznak).

A műveletek, egyenlőtlenségek és határérték kapcsolata most is érvényes.

13. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

13.2 Többváltozós függvény határértéke és folytonossága

Függvény folytonossága

Az $f : D \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt **folytonosnak** nevezzük az $x_0 \in D$ pontban, ha bármely D -beli x_0 -hoz konvergáló $D \ni x_n \rightarrow x_0$ ($n \rightarrow \infty$) sorozat esetén a függvényértékek $f(x_n)$ ($n \in \mathbb{N}$) sorozata az x_0 pontbeli függvényértékhez tart, azaz $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Röviden: az f függvény $x_0 \in D$ pontbeli folytonossága azt jelenti, hogy ha $D \ni x_n \rightarrow x_0$ ($n \rightarrow \infty$) akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = f(x_0)$.

- Ha $x_0 \in D \cap D'$, akkor f folytonos x_0 -ban akkor, és csakis akkor, ha $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.
- Ha $x_0 \in D$, de $x_0 \notin D'$, akkor x_0 a D **izolált pontja**, izolált pontokban f a definíció alapján mindig folytonos.

Folytonos függvények tulajdonságai ugyanazok, mint az egyváltozós esetben.

13. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

13.3 Többváltozós függvények differenciálhatósága

(Totális) differenciálhatóság

Az $f : D \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt az $x_0 \in D$ belső pontban **(totálisan) differenciálhatónak** nevezzük, ha van olyan $A \in \mathbb{R}^k$ vektor, hogy

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \langle A, x - x_0 \rangle}{\|x - x_0\|} = 0.$$

Az $f'(x_0) := A$ vektort az f függvény x_0 **pontbeli deriváltjának** nevezzük.

GEOMETRIAI JELENTÉS: a függvény $f(x) - f(x_0)$ növekményét az $\langle f'(x_0), x - x_0 \rangle$ lineáris függvény jól közelíti x_0 közelében; a függvény által meghatározott felületnek x_0 -ban **van érintősíkja**, mégpedig az

$$x_{k+1} = f(x_0) + \langle f'(x_0), x - x_0 \rangle$$

hipersík az $\mathbb{R}^{k+1}$ térben.

13. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

13.3 Többváltozós függvények differenciálhatósága

Írány menti differenciálhatóság

Legyen $e \in \mathbb{R}^k$ egy egységvektor, azaz $\|e\| = 1$. Az $f : D \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt az $x_0 \in D$ belső pontban az e **irány mentén differenciálhatónak** nevezzük, ha létezik a

$$D_e f(x_0) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + te) - f(x_0)}{t}$$

(véges) határérték, melyet az f függvény e **iránymenti deriváltjának** nevezünk az x_0 pontban.

$D_e f(x_0)$ jelentése: az f **függvény változási sebessége** az e irányában.

13. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

13.3 Többváltozós függvények differenciálhatósága

Parciális derivált

Legyen $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, és legyen $u_i \in \mathbb{R}^k$ az i -edik tengely irányába mutató egységvektor (az u_i vektor i -edik koordinátája 1, a többi 0).

Az $f : D \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek az $x_0 \in D$ belső pontban létezik az **i -edik változója szerinti parciális deriváltja**, ha differenciálható az u_i irányban. Jelölése: $\partial_i f(x_0) := D_{u_i} f(x_0)$.

Egyéb jelölések: $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ és $f_{x_i}(x_0)$

Parciális differenciálhatóság

Az $f : D \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt az $x_0 \in D$ belső pontban **parciálisan differenciálhatónak** nevezzük, ha $\partial_i f(x_0)$ minden $i = 1, 2, \dots, k$ esetén létezik.

13. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

13.3 Többváltozós függvények differenciálhatósága

Parciális derivált kiszámítása

Mivel $x_i = x_{0i} + t$ helyettesítéssel

$$\begin{aligned}\partial_i f(x_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_{01}, \dots, x_{0i} + t, \dots, x_{0k}) - f(x_{01}, \dots, x_{0i}, \dots, x_{0k})}{t} \\ &= \lim_{x_i \rightarrow x_{0i}} \frac{f(x_{01}, \dots, x_i, \dots, x_{0k}) - f(x_{01}, \dots, x_{0i}, \dots, x_{0k})}{x_i - x_{0i}},\end{aligned}$$

így az i -edik változó szerinti parciális deriváltat úgy számítjuk ki, hogy az i -edik változó szerint deriválunk, miközben a többi változót konstansnak tekintjük.

13. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

13.3 Többváltozós függvények differenciálhatósága

Írány menti derivált kiszámítása

Ha $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ az $x_0 \in D$ belső pontban (totálisan) differenciálható, akkor bármely $e \in \mathbb{R}^k$ egységvektor iránya mentén is differenciálható x_0 -ban, és

$$D_e f(x_0) = \langle f'(x_0), e \rangle.$$

Ha $e = u_i$ az i -edik tengely irányába mutató egységvektor, akkor

$$\partial_i f(x_0) = D_{u_i} f(x_0) = \langle f'(x_0), u_i \rangle,$$

így $e = (e_1, e_2, \dots, e_k) = e_1 u_1 + e_2 u_2 + \dots + e_k u_k$ alapján

$$D_e f(x_0) = \partial_1 f(x_0) e_1 + \partial_2 f(x_0) e_2 + \dots + \partial_k f(x_0) e_k.$$

Ezért (totális) differenciálhatóság $\implies$ parciális differenciálhatóság.

Az is következik, hogy

$$f'(x_0) = (\partial_1 f(x_0), \dots, \partial_k f(x_0)),$$

így az $f'(x_0)$ (totális) derivált (vektor) koordinátái a parciális deriváltak.

13. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

13.3 Többváltozós függvények differenciálhatósága

(Totális) differenciálhatóság $\implies$ folytonosság

Ha $f : D \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ az $x_0 \in D$ belső pontban (totálisan) differenciálható, akkor f folytonos x_0 -ban.

parciális differenciálhatóság $\not\Rightarrow$ folytonosság

parciális derivált folytonossága $\implies$ (totális) differenciálhatóság

Ha az $f : D \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek az $x_0 \in D$ belső pont egy környezetében folytonos parciális deriváltjai vannak (ekkor azt mondjuk, hogy a függvény folytonosan parciálisan differenciálható e környezetben), akkor f az x_0 pontban (totálisan) differenciálható (így folytonos is).

13. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

13.3 Többváltozós függvények differenciálhatósága

Láncszabály: összetett függvény differenciálhatósága

Ha mindegyik $j = 1, 2, \dots, \ell$ esetén a $g_j : D \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ függvények differenciálhatók az $x_0 \in D$ belső pontban, és $f : E \subset \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható az $y_0 := g(x_0) \in E$ belső pontban, ahol a $g : D \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ függvény értelmezése $x \in D$ esetén $g(x) := (g_1(x), g_2(x), \dots, g_\ell(x))$, akkor létezik olyan $\varepsilon > 0$, hogy $g(K(x_0, \varepsilon)) \subset E$, így a

$$h : K(x_0, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) := f(g(x)) \text{ ha } x \in K(x_0, \varepsilon)$$

összetett függvény differenciálható az x_0 pontban, és

$$\partial_i h(x_0) = \sum_{j=1}^{\ell} \partial_j f(g(x_0)) \partial_i g_j(x_0) \quad \text{ha } i = 1, 2, \dots, k.$$

13. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

13.4 Magasabbrendű parciális deriváltak

Magasabbrendű parciális deriváltak

Tegyük fel, hogy az $f : D \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek az $x_0 \in D$ belső pont egy környezetében létezik az i -edik változó szerinti $\partial_i f$ parciális deriváltja. Ha ez parciálisan differenciálható a j -edik változó szerint, úgy a deriválást elvégezve kapjuk a

$$\partial_j \partial_i f(x_0) := \partial_j(\partial_i f(x_0))$$

második parciális deriváltját f -nek az x_0 pontban az i -edik és j -edik változók szerint (ebben a sorrendben!).

Hasonlóan, ha a $\partial_j \partial_i f(x)$ derivált létezik x_0 egy környezetében és ez parciálisan differenciálható az l -edik változó szerint, úgy a deriválást elvégezve kapjuk a

$$\partial_l \partial_j \partial_i f(x_0) := \partial_l(\partial_j \partial_i f(x_0))$$

harmadik parciális deriváltat. Hasonlóan értelmezhetjük a negyedrendű stb. parciális deriváltakat is. Egyéb jelölések a parciális deriváltakra: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)$, ill. $f_{x_i, x_j}(x_0)$.

13. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

13.4 Magasabbrendű parciális deriváltak

Példa. Számítsuk ki az

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) := x^2 + y^2 e^{xy}$$

függvény összes első- és másodrendű parciális deriváltját, és hasonlítsuk össze a $\partial_1 \partial_2 f(x, y)$ és $\partial_2 \partial_1 f(x, y)$ vegyes deriváltakat.

Young tétel: a vegyes parciális deriváltak függetlensége a deriválás sorrendjétől

Ha az $f : D \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek az $x_0 \in D$ belső pont egy környezetében valamely $m \geq 2$ esetén az összes m -edik parciális deriváltja létezik és az x_0 pontban azok folytonosak, akkor az f függvény m -edik parciális deriváltjai az x_0 pontban a differenciálás sorrendjétől függetlenek.

13. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

13.5 Többváltozós függvények szélsőértéke

Azt mondjuk, hogy az $f : D \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek az $x_0 \in D$ pontban

- **lokális/helyi maximuma (minimuma)** van, ha $\exists \varepsilon > 0$, hogy

$$f(x_0) \geq f(x) \quad (f(x_0) \leq f(x)) \quad \forall x \in K(x_0, \varepsilon) \cap D \text{ esetén.}$$

- **szigorú lokális/helyi maximuma (minimuma)** van, ha $\exists \varepsilon > 0$, hogy

$$f(x_0) > f(x) \quad (f(x_0) < f(x)) \quad \forall x \in K(x_0, \varepsilon) \cap D, x \neq x_0 \text{ esetén.}$$

- **globális/abszolút maximuma (minimuma)** van, ha

$$f(x_0) \geq f(x) \quad (f(x_0) \leq f(x)) \quad \forall x \in D \text{ esetén.}$$

- **szigorú globális/abszolút maximuma (minimuma)** van, ha

$$f(x_0) > f(x) \quad (f(x_0) < f(x)) \quad \forall x \in D, x \neq x_0 \text{ esetén.}$$

13. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

13.5 Többváltozós függvények szélsőértéke

A szélsőérték létezésének elegendő feltétele

Korlátos, zárt halmazon folytonos függvény felveszi a függvényértékek infimumát és szuprémumát függvényértékként, ami azt jelenti, hogy a függvénynek van minimuma és maximuma (az illető korlátos, zárt halmazon).

A szélsőérték létezésének szükséges feltétele

Ha az $f : D \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek az $x_0 \in D$ belső pontban lokális szélsőértéke van, és léteznek f első parciális deriváltjai x_0 -ban, akkor

$$\partial_1 f(x_0) = \partial_2 f(x_0) = \dots = \partial_k f(x_0) = 0.$$

(E feltételnek eleget tevő x_0 pontokat az f függvény **stacionárius pontjainak** nevezzük.)

13. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

13.5 Többváltozós függvények szélsőértéke

A szélsőérték létezésének másodrendű elegendő feltétele

Tegyük fel, hogy az $f : D \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ összes második parciális deriváltja folytonos az $x_0 \in D$ belső pont egy környezetében, továbbá

$$\partial_1 f(x_0) = \partial_2 f(x_0) = \dots = \partial_k f(x_0) = 0.$$

1 Ha a

$$Q : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}, \quad Q(h) = Q(h_1, \dots, h_k) := \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^k \partial_j \partial_i f(x_0) h_i h_j$$

kvadratikus függvény **pozitív definit**, azaz $Q(h) > 0$ ha $h \in \mathbb{R}^k$ és $h \neq 0$, akkor f -nek **szigorú lokális minimuma** van x_0 -ban.

2 Ha Q **negatív definit**, azaz $Q(h) < 0$ minden $h \in \mathbb{R}^k$, $h \neq 0$ esetén, akkor f -nek **szigorú lokális maximuma** van x_0 -ban.

3 Ha Q **indefinit**, azaz $Q(h)$ felvesz pozitív és negatív értéket is, akkor f -nek **nincs szélsőértéke** x_0 -ban.

13. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

13.5 Többváltozós függvények szélsőértéke

Másodrendű elegendő feltétel, determinánsokkal

Tegyük fel, hogy az $f : D \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ összes második parciális deriváltja folytonos az $x_0 \in D$ belső pont egy környezetében, továbbá

$$\partial_1 f(x_0) = \partial_2 f(x_0) = \dots = \partial_k f(x_0) = 0.$$

Legyen Δ_j ($j = 1, \dots, k$) $A = (\partial_i \partial_j f(x_0)) \in \mathbb{R}^{k \times k}$ mátrix, bal felső j -edrenű sarokdeterminánsa, azaz

$$\Delta_1 := \partial_1 \partial_1 f(x_0), \quad \Delta_2 := \begin{vmatrix} \partial_1 \partial_1 f(x_0) & \partial_1 \partial_2 f(x_0) \\ \partial_2 \partial_1 f(x_0) & \partial_2 \partial_2 f(x_0) \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad \Delta_k := |A|.$$

- ❶ Ha $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0, \dots, \Delta_k > 0$, akkor f -nek **szigorú lokális minimuma** van x_0 -ban,
- ❷ ha $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \dots, (-1)^k \Delta_k > 0$, akkor f -nek **szigorú lokális maximuma** van x_0 -ban,
- ❸ ha $\Delta_k \neq 0$, és az előző két feltétel egyike sem teljesül, akkor f -nek **nincs szélsőértéke** x_0 -ban.

13. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

13.5 Kétváltozós függvények szélsőértéke

Kétváltozós függvény szélsőértéke

Tegyük fel, hogy az $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ összes második parciális deriváltja folytonos az $x_0 \in D$ belső pont egy környezetében, továbbá

$$\partial_1 f(x_0) = \partial_2 f(x_0) = 0.$$

1 Ha $\Delta_1 = \partial_1 \partial_1 f(x_0) > 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} \partial_1 \partial_1 f(x_0) & \partial_1 \partial_2 f(x_0) \\ \partial_1 \partial_2 f(x_0) & \partial_2 \partial_2 f(x_0) \end{vmatrix} > 0$,

akkor f -nek **szigorú lokális minimuma** van x_0 -ban,

2 ha $\Delta_1 = \partial_1 \partial_1 f(x_0) < 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} \partial_1 \partial_1 f(x_0) & \partial_1 \partial_2 f(x_0) \\ \partial_1 \partial_2 f(x_0) & \partial_2 \partial_2 f(x_0) \end{vmatrix} > 0$,

akkor f -nek **szigorú lokális maximuma** van x_0 -ban,

3 ha $\Delta_2 = \begin{vmatrix} \partial_1 \partial_1 f(x_0) & \partial_1 \partial_2 f(x_0) \\ \partial_1 \partial_2 f(x_0) & \partial_2 \partial_2 f(x_0) \end{vmatrix} < 0$,

akkor f -nek **nincs szélsőértéke** x_0 -ban.

Példa.

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) := x^3 + y^3 - 3xy$$

lokális szélsőértékeinek meghatározása.

13. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

13.5 Többváltozós függvények feltételes szélsőértéke

Többváltozós függvények feltételes szélsőértéke

Legyenek $f : D \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$, $g_i : D \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ $i = 1, \dots, l$, $l < k$ adott függvények. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az $x_0 \in D$ pontban a $g_1(x) = 0$, $g_2(x) = 0$, $\dots$, $g_l(x) = 0$ feltételek mellett **lokális/helyi feltételes maximuma (minimuma)** van, ha $g_1(x_0) = \dots = g_l(x_0) = 0$, és van olyan $\varepsilon > 0$ hogy

$$f(x_0) \geq f(x) \quad (f(x_0) \leq f(x)) \text{ teljesül minden } x \in D \cap K(x_0, \varepsilon)$$

mellett, melyre $g_1(x) = \dots = g_l(x) = 0$. Ha $g_1(x_0) = \dots = g_l(x_0) = 0$, és $f(x_0) > f(x)$ ($f(x_0) < f(x)$) teljesül minden $x_0 \neq x \in D \cap K(x_0, \varepsilon)$ mellett, melyre $g_1(x) = \dots = g_l(x) = 0$, akkor **szigorú lokális feltételes maximum (minimum)**-ról beszélünk.

13. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

13.5 Többváltozós függvények feltételes szélsőértéke

A feltételes szélsőérték szükséges feltétele

- Tegyük fel, hogy az $f, g_i : D \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, \dots, l$, $l < k$), az f függvénynek az első parciális deriváltjai folytonosak az $x_0 \in D$ belső egy környezetében
- f -nek az $x_0 \in D$ pontban a $g_1(x) = 0$, $g_2(x) = 0$, $\dots$, $g_l(x) = 0$ feltételek mellett lokális feltételes szélsőértéke van,
- a
$$\begin{pmatrix} \partial_1 g_1(x_0) & \cdots & \partial_k g_1(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 g_l(x_0) & \cdots & \partial_k g_l(x_0) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{l \times k}$$
 mátrix rangja l .

Akkor van olyan $\lambda_0 = (\lambda_{01}, \dots, \lambda_{0l}) \in \mathbb{R}^l$ pont, hogy az

$$L(\lambda, x) := f(x) + \lambda_1 g_1(x) + \cdots + \lambda_l g_l(x) \quad (\lambda \in \mathbb{R}^l, x \in D)$$

függvényre $\partial_1 L(\lambda_0, x_0) = \cdots = \partial_{l+k} L(\lambda_0, x_0) = 0$.

13. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

13.5 Többváltozós függvények feltételes szélsőértéke

A $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ számokat Lagrange-féle multiplikátoroknak nevezzük, az L függvényt pedig a feltételes szélsőérték probléma **Lagrange-féle függvényének** nevezzük.

A feltételes szélsőérték probléma megoldása úgy történik, hogy a

$$\partial_1 L(\lambda, x) = \dots = \partial_{l+k} L(\lambda, x) = 0$$

$l + k$ egyenletből álló rendszert (**melynek első l db. egyenlete éppen $g_1(x) = \dots = g_l(x) = 0$**) megoldjuk a $\lambda_1, \dots, \lambda_l, x_1, \dots, x_k$, ismeretlenekre, a $(\lambda_0, x_0) = (\lambda_{01}, \dots, \lambda_{0l}, x_{01}, \dots, x_{0k}) \in \mathbb{R}^l \times D$ megoldások a Lagrange függvény stacionárius pontjai. Ennek az $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0k})$ koordinátái adják a **feltételes szélsőérték lehetséges helyeit**.

13. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

13.5 Többváltozós függvények feltételes szélsőértéke

A feltételes szélsőérték elegendő feltétele

- Tegyük fel, hogy az $f, g_i : D \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, \dots, l$, $l < k$), második parciális deriváltjai folytonosak az $x_0 \in D$ belső pont egy környezetében,
- $(\lambda_0, x_0) \in \mathbb{R}^l \times D$ a Lagrange függvény stacionárius pontja, azaz a
$$\partial_1 L(\lambda_0, x_0) = \dots = \partial_{l+k} L(\lambda_0, x_0) = 0$$
rendszer megoldása,

- és
$$\begin{vmatrix} \partial_{k-l+1} g_1(x_0) & \dots & \partial_k g_1(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{k-l+1} g_l(x_0) & \dots & \partial_k g_l(x_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Ha $\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k h_i h_j \partial_i \partial_j f(x_0) > 0$ (< 0) minden olyan

$h = (h_1, \dots, h_k) \in \mathbb{R}^k$, $h \neq 0$ esetén, melyre $\sum_{j=1}^k h_j \partial_j g_i(x_0) = 0$ minden $i = 1, \dots, l$ mellett, akkor f -nek **szigorú lokális feltételes minimuma (maximuma)** van x_0 -ban.

13. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

13.5 Többváltozós függvények feltételes szélsőértéke

A feltételes szélsőérték elégséges feltétele determinánsokkal

Legyen Δ_j , ($j = 2l + 1, \dots, l + k$) a

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \partial_1 g_1(x_0) & \cdots & \partial_k g_1(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \partial_1 g_l(x_0) & \cdots & \partial_k g_l(x_0) \\ \partial_1 g_1(x_0) & \cdots & \partial_1 g_l(x_0) & \partial_{l+1} \partial_{l+1} L(\lambda_0, x_0) & \cdots & \partial_{l+1} \partial_{l+k} L(\lambda_0, x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_k g_1(x_0) & \cdots & \partial_k g_l(x_0) & \partial_{l+k} \partial_{l+1} L(\lambda_0, x_0) & \cdots & \partial_{l+k} \partial_{l+k} L(\lambda_0, x_0) \end{pmatrix}$$

szimmetrikus **blokkmátrix** bal felső $j \times j$ -s sarokmátrixának determinánsa.

- 1 Ha $(-1)^l \Delta_j > 0$ minden $j = 2l + 1, \dots, l + k$ esetén, akkor f -nek **szigorú lokális feltételes minimuma** van x_0 -ban.
- 2 Ha $(-1)^{l+j} \Delta_j > 0$ minden $j = 2l + 1, \dots, l + k$ esetén, akkor f -nek **szigorú lokális feltételes maximuma** van x_0 -ban.

13. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

13.5 Többváltozós függvények feltételes szélsőértéke

A blokkmátrix másik alakja

Vegyük észre, hogy blokkmátrixunk éppen az $L(\lambda, x)$ Lagrange függvény összes második parciális deriváltjaiból álló mátrix a (λ_0, x_0) stacionárius pontban véve, azaz a $(\partial_i \partial_j L(\lambda_0, x_0)) \in \mathbb{R}^{(l+k) \times (l+k)}$ mátrix.

Példa. Határozzuk meg az

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) := x + 2y$$

feltételes szélsőértékeit a

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad \text{körvonal}$$

feltétel mellett.

13. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

13.5 Többváltozós függvények feltételes szélsőértéke

Megoldás. A probléma Lagrange függvénye

$$L(\lambda, x, y) = x + 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 1) \quad ((\lambda, x, y) \in \mathbb{R}^3).$$

A lehetséges szélsőértékhelyeket a

$$\begin{aligned}\partial_\lambda L(\lambda, x, y) &= x^2 + y^2 - 1 = 0, & \partial_x L(\lambda, x, y) &= 1 + 2\lambda x = 0, \\ \partial_y L(\lambda, x, y) &= 2 + 2\lambda y = 0\end{aligned}$$

megoldásai adják. Könnyű kiszámolni, hogy a megoldások:

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad x_1 = -\frac{\sqrt{5}}{5}, \quad y_1 = -\frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\lambda_2 = -\frac{\sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{\sqrt{5}}{5}, \quad y_2 = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

a feltételes szélsőérték lehetséges helyei.

13. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

13.5 Többváltozós függvények feltételes szélsőértéke

Azt, hogy feltételes maximum vagy minimum van-e ezen pontokban a fenti tétel alapján döntjük el. Az L második parciális deriváltjaiból felépített a blokkmátrix (a (λ, x, y) pontban)

$$\begin{pmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 2\lambda \end{pmatrix}.$$

13. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

13.5 Többváltozós függvények feltételes szélsőértéke

Most $k = 2, l = 1$, mivel $2l + 1 = 3 = k + l$ így csak az blokkmátrix determinánsának előjelét kell meghatározni. Egyszerű számítás mutatja, hogy ez

$$\Delta_3(\lambda_1, x_1, y_1) = \frac{1}{\sqrt{5^3}} \begin{vmatrix} 0 & -2 & -4 \\ -2 & 5 & 0 \\ -4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \frac{-100}{\sqrt{5^3}} < 0$$

és hasonlóan $\Delta_3(\lambda_2, x_2, y_2) = \frac{100}{\sqrt{5^3}}$ vagyis a

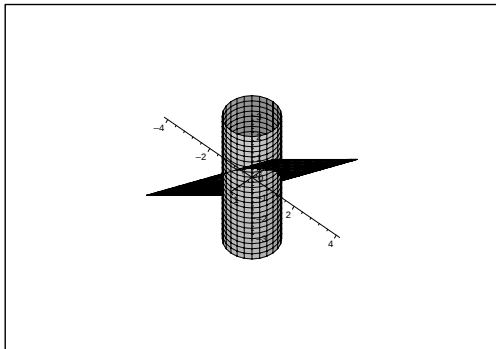
$(-1)^l \Delta_{k+l} = (-1) \Delta_3(\lambda_1, x_1, y_1) > 0$ feltétel teljesül, (x_1, y_1) -ben szigorú feltételes lokális minimum van, míg a

$(-1)^{l+(l+k)} \Delta_3(\lambda_2, x_2, y_2) = (-1)^4 \Delta_3(\lambda_2, x_2, y_2) > 0$ ezért (x_2, y_2) -ben szigorú feltételes lokális maximum van.

13. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

13.5 Többváltozós függvények feltételes szélsőértéke

Megjegyzés. Érdekes a feladatot geometriailag is szemléltetni: az $f(x, y) = x + 2y$ sík és az $x^2 + y^2 = 1$ által meghatározott hengerfelület metszészvonala (mely egy az $\mathbb{R}^3$ térbeli ellipszis) melyik pontja van "legmagasabban" és "legalacsonyabban" (a magasságot a z tengely irányában mérve).



14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.1 Véletlen kísérletek, eseményalgebrák

Véletlen események

Valószínűsége **véletlen eseményeknek** van,

- melyekről nem tudjuk előre megmondani, hogy bekövetkeznek-e, vagy sem;
- és amelyek
 - vagy **véletlen jelenségek** megfigyelésével kapcsolatosak (amikor a körülményeket nem tudjuk befolyásolni),
 - vagy pedig **véletlen kimenetelű kísérletekkel** kapcsolatosak (amikor befolyásolni tudjuk a körülményeket).

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.1 Véletlen kísérletek, eseményalgebrák

Példák:

- Minőségellenőrzés: n termékből kiválasztunk m darabot ($m \leq n$), és megszámloljuk, hogy hány selejtes van;
lehetséges kimenetek: az $\Omega := \{0, 1, 2, \dots, m\}$ halmaz elemei;
- Hagyományos lottó: megjelölünk 5 számot 90-ből, és megszámloljuk, hogy hány találatunk van;
lehetséges kimenetek: az $\Omega := \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ halmaz elemei;
- Ragályos fertőzés terjedése, csapadékmennyiség alakulása, szeizmográf mozgása, sorhosszúság alakulása pénztáraknál, szerencsejátékok, tőzsdei áringadozások.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.1 Véletlen kísérletek, eseményalgebrák

- **Elemi események:** a kísérlet/megfigyelés lehetséges kimenetelei.
- **Eseménytér:** az elemi események halmaza; jelölés: Ω .
- **Esemény:** az eseménytér bizonyos $A \subset \Omega$ részhalmaza, amit úgy értünk, hogy ha az $\omega \in \Omega$ elemi esemény következik be, akkor
 - $\omega \in A$ esetén bekövetkezik az A esemény is,
 - $\omega \notin A$ esetén az A esemény nem következik be.
- **Biztos esemény:** amely mindig bekövetkezik; be lehet azonosítani az $\Omega \subset \Omega$ részhalmazzal.
- **Lehetetlen esemény:** amely sohasem következik be; be lehet azonosítani az $\emptyset \subset \Omega$ üres részhalmazzal.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.1 Véletlen kísérletek, eseményalgebrák

Logikai műveletek eseményekkel

- Minden A eseménnyel kapcsolatban tekinthetjük az A **ellentett (komplementer) eseményét**: ez pontosan akkor következik be, amikor az A esemény nem következik be; jelölése: $\bar{A}$.
- Az A és B események **összege (uniója)** az az esemény, amely pontosan akkor következik be, amikor az A és B események közül legalább az egyik bekövetkezik; jelölése: $A + B$ vagy $A \cup B$.
- Az A és B események **szorzata (metszete)** az az esemény, amely pontosan akkor következik be, amikor az A és B események mindegyike bekövetkezik; jelölése: $A \cdot B$ vagy $A \cap B$.
- Az A és B események **különbsége** az az esemény, mely pontosan akkor következik be, amikor az A esemény bekövetkezik, a B esemény pedig nem; jelölése: $A - B$ vagy $A \setminus B$.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.1 Véletlen kísérletek, eseményalgebrák

A logikai műveletek tulajdonságai

- kommutativitás: $A + B = B + A,$
 $A \cdot B = B \cdot A.$
- asszociativitás: $A + (B + C) = (A + B) + C,$
 $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C.$
- idempotencia: $A + A = A,$
 $A \cdot A = A.$
- disztributivitás: $A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C),$
 $A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C).$
- de Morgan-féle azonosságok: $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B},$
 $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}.$
- különbség: $A - B = A \cdot \overline{B}.$

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.1 Véletlen kísérletek, eseményalgebrák

Diszjunkt események

Azt mondjuk, hogy az A és B események **diszjunktak (kizárják egymást)**, ha egyszerre nem következhetnek be.

Az A és B események akkor és csak akkor diszjunktak, ha $A \cdot B = \emptyset$.

$\Rightarrow$

Azt mondjuk, hogy az A esemény **maga után vonja** a B eseményt, ha az A esemény bekövetkezése esetén mindig bekövetkezik a B esemény is; jelölése: $A \Rightarrow B$.

A következő állítások ekvivalensek:

- $A \Rightarrow B$;
- $A \subset B$;
- $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.1 Véletlen kísérletek, eseményalgebrák

Eseményalgebra

Egy Ω eseménytér bizonyos eseményeiből álló $\mathcal{A}$ rendszert **eseményalgebrának** nevezünk, ha tartalmazza a biztos eseményt, és zárt a komplementerképzésre és a véges unióképzésre.

Például Ω összes részhalmazainak $\mathcal{A} := 2^\Omega$ rendszere

σ -algebra

Egy eseményalgebrát **σ -algebrának** nevezünk, ha zárt a megszámlálható unióképzésre.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.1 Véletlen kísérletek, eseményalgebrák

Példák:

- 1 Egy pénzdarab feldobása esetén

$$\Omega = \{\text{fej}, \text{írás}\}.$$

De lehet a fejhez a 0, az íráshoz pedig az 1 számot hozzárendelni, és így

$$\Omega = \{0, 1\}.$$

Nyilván

$$\mathcal{A} = 2^{\Omega} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \Omega\}.$$

Ekkor az elemi események száma: $|\Omega| = 2$, az összes események száma pedig $|2^{\Omega}| = 4$.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.1 Véletlen kísérletek, eseményalgebrák

2 n -szer **egymás után dobva** egy pénzdarabbal:

$$\Omega = \{\omega = (a_1, a_2, \dots, a_n) : a_1, a_2, \dots, a_n \in \{0, 1\}\}.$$

Ekkor $|\Omega| = 2^n$, $|2^\Omega| = 2^{2^n}$.

Ha n darab egyforma pénzdarabot **egyidőben dobunk fel**, akkor is lehet ugyanezt az eseményteret tekinteni, hiszen a kísérlet kimenetelét nem változtatja meg, ha megszámozzuk a pénzdarabokat. De lehet csak a megkülönböztethető kimenetekre szorítkozni: ezek száma $n + 1$. Az első eseménytér általában alkalmasabb, mert például szabályos pénzdarab esetén az elemi események egyforma esélyűek!

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.1 Véletlen kísérletek, eseményalgebrák

- ③ Egy zsákban n különböző színű golyó van. Kihúzzunk ezek közül k darabot; négy lehetőség van aszerint, hogy **visszatevéssel** vagy **visszatevés nélkül** húzzunk (az utóbbi esetben $k \leq n$ szükséges), és aszerint, hogy a **sorrend számít** vagy a **sorrend nem számít**.

Ez a kísérlet ekvivalens azzal a kísérlettel, amikor n rekeszbe helyezünk el k tárgyat; az előbbi négy lehetőség annak felel meg, hogy egy rekeszbe több tárgy is kerülhet vagy csak egy, illetve a tárgyak meg vannak különböztetve, vagy nem.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.1 Véletlen kísérletek, eseményalgebrák

	sorrend számít (variáció)	sorrend nem számít (kombináció)	
visszatevés nélkül (ismétlés nélkül)	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$	egy rekeszbe legfeljebb egy tárgy kerülhet
visszatevéssel (ismétléses)	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$	egy rekeszbe több tárgy is kerülhet
	a tárgyak különbözőek	a tárgyak nem különböznek	

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.1 Véletlen kísérletek, eseményalgebrák

- Ha n különböző elem közül húzunk visszatevés nélkül úgy, hogy a sorrend számít, és kihúzzuk az összes n elemet (ami azzal ekvivalens, hogy n elemet sorbaállítunk; ezeket **permutációknak** nevezzük), akkor a lehetőségek száma

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n,$$

hiszen az első húzásnál még n lehetőség van, a másodiknál $n - 1$, stb., és ezek szorzata adja az eredményt.

- Ha n különböző elem közül k elemet húzunk visszatevés nélkül (ahol $k \leq n$) úgy, hogy a sorrend számít (ezeket **ismétlés nélküli variációknak** nevezzük), akkor a lehetőségek száma

$$n(n-1) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!},$$

amit az előzőhöz hasonló gondolatmenettel bizonyíthatunk.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.1 Véletlen kísérletek, eseményalgebrák

- Ha n különböző elem közül k elemet húzunk visszatevéssel úgy, hogy a sorrend számít (ezeket **ismétléses variációknak** nevezzük), akkor a lehetőségek száma

$$n^k,$$

hiszen minden húzásnál n lehetőség van.

- Ha n különböző elem közül k elemet húzunk visszatevés nélkül (ahol $k \leq n$) úgy, hogy a sorrend nem számít (ezeket **ismétlés nélküli kombinációknak** nevezzük), akkor a lehetőségek száma

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!},$$

hiszen a megfelelő ismétlés nélküli variációkat úgy lehet megkapni, hogy a kihúzott k elemet az összes lehetséges módon sorbarakjuk; ezek száma pedig mindig $k!$.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.1 Véletlen kísérletek, eseményalgebrák

- Ha n különböző elem közül k elemet húzunk visszatevéssel úgy, hogy a sorrend nem számít (ezeket **ismétléses kombinációknak** nevezzük), akkor a lehetőségek száma

$$\binom{n+k-1}{k}.$$

Ezt úgy lehet belátni, hogy a kísérlet kimeneteleihez egyértelműen hozzá lehet rendelni egy olyan sorozatot, mely $n-1$ darab egyesből és k darab nullából áll, mégpedig úgy, hogy az első egyes elé írt nullák száma (ami 0 is lehet) jelenti az első fajta elemből húzottak számát, az első és második egyes közé írt nullák száma jelenti a második fajta elemből húzottak számát, stb., az $(n-1)$ -edik egyes után írt nullák száma jelenti az n -edik fajta elemből húzottak számát; az ilyen nulla–egy sorozatok száma pedig nyilván $\binom{n+k-1}{k}$, hiszen azt kell megmondani, hogy az $n+k-1$ hely közül melyik k helyre kerüljön nulla.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.1 Véletlen kísérletek, eseményalgebrák

- 4 Adva van n kártya; ezeket osztjuk szét k játékos között úgy, hogy sorban $n_1, n_2, \dots, n_k$ kártyát kapjanak, ahol $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$, és az egy játékoshoz kerülő lapok sorrendje nem számít (ezeket **ismétléses permutációknak** nevezzük). Ekkor az eseménytér elemeinek száma

$$|\Omega| = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!},$$

hiszen a kártyák $n!$ számú permutációit úgy lehet ezekből a leosztásokból megkapni, hogy az egy játékoshoz került $n_1, n_2, \dots, n_k$ kártyát tetszőleges sorrendbe helyezzük.

- 5 Addig dobálunk egy érmével, míg az első fejet sikerül elérni. Ekkor

$$\Omega = \{f, if, iif, iif, \dots, i_\infty\},$$

ahol i_∞ azt a lehetséges kimenetelt jelöli, amikor csak írást dobunk a végtelenségig.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.2 Valószínűség

Gyakoriság, relatív gyakoriság

Ha egy A eseménnyel kapcsolatban n darab véletlen, független kísérletet hajtunk végre, akkor A **gyakorisága** az a szám, ahányszor A bekövetkezik; ez egy **véletlen mennyiség**, melynek lehetséges értékei: $0, 1, \dots, n$; jelölése: $k_n(A)$.

Az A esemény **relatív gyakorisága**: $r_n(A) := \frac{k_n(A)}{n}$.

Tapasztalat:

ha n -et növeljük, azaz egyre több kísérletet hajtunk végre, akkor az A esemény relatív gyakorisága egyre kisebb kilengésekkel ingadozik egy $P(A)$ szám körül; ezt nevezzük A **valószínűségének**.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.2 Valószínűség

Relatív gyakoriság tulajdonságai

- $0 \leq r_n(A) \leq 1$ tetszőleges A esemény esetén.
- $r_n(\emptyset) = 0$, $r_n(\Omega) = 1$.
- ha A és B egymást kizáró események, akkor

$$r_n(A \cup B) = r_n(A) + r_n(B).$$

- ha $A_1, A_2, \dots$ páronként egymást kizáró események, akkor

$$r_n\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} r_n(A_j).$$

- $r_n(\bar{A}) = 1 - r_n(A)$ tetszőleges A esemény esetén.
- ha $A \subset B$ események, akkor $r_n(A) \leq r_n(B)$.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.2 Valószínűség

Valószínűségi mező

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ hármas, ahol

- Ω egy nemüres halmaz (az eseménytér);
- $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$ az Ω bizonyos részhalmazából álló σ -algebra (az események rendszere);
- $P : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ olyan leképezés, melyre
 - 1 $P(A) \in [0, 1]$ tetszőleges $A \in \mathcal{A}$ esetén,
 - 2 $P(\Omega) = 1$,
 - 3 ha $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ páronként diszjunktak, akkor

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j).$$

(Ezt a tulajdonságot **σ -additivitásnak** nevezzük).

Egy A esemény esetén a $P(A)$ számot az A **valószínűségének**, a $P : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ leképezést pedig **valószínűségeloszlásnak** nevezzük.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.2 Valószínűség

A valószínűségeloszlások tulajdonságai

- $P(\emptyset) = 0$. (Hiszen ha $P(\emptyset) > 0$ volna, akkor a σ -additivitásban $A_1 = A_2 = \dots = \emptyset$ választással ellentmondásra jutnánk.)
- Ha $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ páronként diszjunktak, akkor

$$P\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = \sum_{j=1}^n P(A_j).$$

(Használjuk a σ -additivitást $A_{n+1} = A_{n+2} = \dots = \emptyset$ esetére, és alkalmazzuk azt, hogy $P(\emptyset) = 0$.)

Ezt a tulajdonságot **véges additivitásnak** nevezzük.

- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
(Hiszen $\Omega = A \cup \bar{A}$ diszjunkt felbontás, így a véges additivitással $1 = P(\Omega) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$.)

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.2 Valószínűség

A valószínűségeloszlások tulajdonságai

- Ha $A \Rightarrow B$, azaz $A \subset B$, akkor

$$P(A) \leq P(B), \quad P(B \setminus A) = P(B) - P(A).$$

(Hiszen $A \subset B$ esetén $B = A \cup (B \setminus A)$ diszjunkt felbontás, ezért $P(B) = P(A) + P(B \setminus A) \geq P(A)$.)

Ezt a tulajdonságot **monotonitásnak** nevezzük.

- Tetszőleges $A, B \in \mathcal{A}$ esetén

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B),$$

hiszen

$$A \cup B = [A \setminus (A \cap B)] \cup [B \setminus (A \cap B)] \cup (A \cap B)$$

diszjunkt felbontás, ezért $A \cap B \subset A$ és $A \cap B \subset B$ miatt

$$P(A \cup B) = [P(A) - P(A \cap B)] + [P(B) - P(A \cap B)] + P(A \cap B).$$

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.2 Valószínűség

A valószínűségeloszlások tulajdonságai

- Tetszőleges $A, B, C \in \mathcal{A}$ esetén

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) \\ &\quad - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) \\ &\quad + P(A \cap B \cap C), \end{aligned}$$

hiszen

$$P((A \cup B) \cup C) = P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C)$$

és

$$\begin{aligned} P((A \cup B) \cap C) &= P((A \cap C) \cup (B \cap C)) \\ &= P(A \cap C) + P(B \cap C) - P((A \cap C) \cap (B \cap C)), \end{aligned}$$

ahol $(A \cap C) \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.2 Valószínűség

Diszkrét valószínűségi mező

Ω véges vagy megszámlálhatóan végtelen, azaz

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$$

vagy

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$$

alakú, és $\mathcal{A} = 2^\Omega$.

Valószínűségek kiszámolása diszkrét valószínűségi mezőben

Tetszőleges $A \in \mathcal{A}$ esemény előáll az

$$A = \bigcup_{i: \omega_i \in A} \{\omega_i\}$$

diszjunkt felbontás alakjában, így

$$P(A) = \sum_{i: \omega_i \in A} P(\{\omega_i\}).$$

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.2 Valószínűség

Ezért diszkrét valószínűségi mezőben elég megadni az elemi események valószínűségeit, a

$$p_i := P(\{\omega_i\}), \quad i = 1, 2, \dots$$

számokat ahhoz, hogy tetszőleges esemény valószínűségét ki tudjuk számolni.

Nyilván szükséges az, hogy ezek a $\{p_1, p_2, \dots\}$ számok nemnegatívak legyenek és összegük 1 legyen, hiszen

$$\sum_i p_i = \sum_i P(\{\omega_i\}) = P\left(\bigcup_i \{\omega_i\}\right) = P(\Omega) = 1.$$

Ekkor azt mondjuk, hogy a $\{p_1, p_2, \dots\}$ számok **eloszlást** alkotnak.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.2 Valószínűség

Egyenletes eloszlás véges halmazon

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\},$$

és az elemi események egyenlő esélyűek, azaz

$$P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = \dots = P(\{\omega_N\}) = \frac{1}{N}$$

Valószínűségek véges halmazon egyenletes eloszlás esetén

$$P(A) = \sum_{i: \omega_i \in A} P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{N} \sum_{i: \omega_i \in A} 1 = \frac{|A|}{N},$$

vagyis

$$P(A) = \frac{\text{kedvező kimenetek száma}}{\text{összes kimenetek száma}}.$$

Ez a **valószínűség kiszámításának klasszikus képlete**.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.2 Valószínűség

Példák:

- ❶ *Két érmét feldobva mennyi annak a valószínűsége, hogy egy fej és egy írás legyen az eredmény?*

Ekkor a két érmét megkülönböztetve az

$$\Omega = \{ff, fi, if, ii\}$$

eseményteret kapjuk, amelyben a kimenetek egyforma valószínűségűek, így az

$$A = \{fi, if\}$$

esemény valószínűsége

$$P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.2 Valószínűség

Példák:

- 2 Mennyi a valószínűsége, hogy egy n tagú társaságban van legalább két olyan személy, akiknek ugyanakkor van a születésnapja? (Feltesszük, hogy a szökőnap nem lehet.)

Nyilván $n > 365$ esetén (a „skatulya-elv” miatt) ez a biztos esemény, így ekkor a valószínűség 1.

Ha pedig $n \leq 365$, akkor az ellentett eseménnyel számolva

$$P(A) = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdots (365 - n + 1)}{365^n}$$
$$= 1 - \frac{365!}{(365 - n)! \cdot 365^n} \approx \begin{cases} 0.284 & \text{ha } n = 16 \\ 0.476 & \text{ha } n = 22 \\ 0.507 & \text{ha } n = 23 \\ 0.891 & \text{ha } n = 40 \end{cases}$$

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.2 Valószínűség

Egyenletes eloszlás $\mathbb{R}^k$ véges mértékű részalmazain

$\Omega \subset \mathbb{R}^k$ véges mértékű, és „minden pont egyenlő esélyű”, azaz egy $A \subset \Omega$ részalmaz valószínűsége A mértékével arányos, vagyis

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)},$$

ahol μ az illető halmaz mértékét jelöli:

- $k = 1$ esetén összhossz,
- $k = 2$ esetén terület,
- $k = 3$ esetén térfogat.

Ez a **valószínűségek geometriai kiszámítási módja**.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.2 Valószínűség

Példa: Egy egységnyi hosszúságú szakaszt két, taláломra kiválasztott ponttal három szakaszra bontunk fel. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a három szakaszból háromszöget lehet szerkeszteni?

Az eredmény a $[0, 1] \times [0, 1]$ négyzet azon részhalmazának területe, melynek pontjaira fennállnak a következő egyenlőtlenségek:

$$\begin{cases} 0 < x < y < 1, \\ 1 - y < x, \\ x < 1 - x, \\ y - x < 1 - y + x, \end{cases} \quad \text{vagy} \quad \begin{cases} 0 < y < x < 1, \\ 1 - x < y, \\ y < 1 - y, \\ x - y < 1 - x + y, \end{cases}$$

azaz

$$\begin{cases} 0 < x < \frac{1}{2} < y < 1, \\ y - x < \frac{1}{2}, \end{cases} \quad \text{vagy} \quad \begin{cases} 0 < y < \frac{1}{2} < x < 1, \\ x - y < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Ezért a keresett valószínűség $1/4$.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.3 Feltételes valószínűség

Feltételes relatív gyakoriság

Ha n független kísérletet végzünk, akkor az A esemény **feltételes relatív gyakorisága azon feltétel mellett, hogy a B esemény bekövetkezett**

$$r_n(A | B) := \frac{k_n(A \cap B)}{k_n(B)} = \frac{r_n(A \cap B)}{r_n(B)}.$$

Feltételes valószínűség

Az A esemény **feltételes valószínűsége** a B feltétel mellett (azaz ha tudjuk, hogy a B esemény bekövetkezett)

$$P(A | B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

hacsak $P(B) > 0$.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.3 Feltételes valószínűség

Példák:

- ① *Mennyi a valószínűsége, hogy egy kétgyermekes családban mindkét gyerek fiú, ha feltételezzük, hogy egy gyerek egyenlő valószínűséggel lehet fiú vagy lány, és tudjuk, hogy*
- *az idősebb gyerek fiú;*
 - *legalább az egyik gyerek fiú ?*

Ekkor az eseménytér

$$\Omega = \{FF, FL, LF, LL\},$$

melynek elemei egyformán $1/4$ valószínűségűek. Legyen

$$A := \{\text{mindkét gyerek fiú}\} = \{FF\},$$

$$B_1 := \{\text{az idősebb gyerek fiú}\} = \{FF, FL\},$$

$$B_2 := \{\text{legalább az egyik gyerek fiú}\} = \{FF, FL, LF\}.$$

Nyilván $A \cap B_1 = A \cap B_2 = \{FF\}$, így

$$P(A \mid B_1) = 1/2, \quad P(A \mid B_2) = 1/3.$$

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.3 Feltételes valószínűség

- 2 *Bridzsnél osztáskor 2 ászt kapott valaki. Mennyi a valószínűsége, hogy a másik 2 ász a partnerénél van?*

Az összes leosztások száma $\frac{52!}{(13!)^4}$,

ezek egyforma valószínűségűek. Ezekből $\binom{4}{2} \cdot \binom{48}{11} \cdot \frac{39!}{(13!)^3}$

olyan leosztás van, melynél az első játékos 2 ászt kap, és ezek között pedig

$$\binom{4}{2} \cdot \binom{48}{11} \cdot \binom{37}{11} \cdot \frac{26!}{(13!)^2}$$

olyan leosztás van, melynél a másik 2 ász a partnerénél van.

Tehát a keresett feltételes valószínűség

$$\frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{48}{11} \cdot \binom{37}{11} \cdot \frac{26!}{(13!)^2}}{\binom{4}{2} \cdot \binom{48}{11} \cdot \frac{39!}{(13!)^3}} = \frac{2}{19}.$$

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.3 Feltételes valószínűség

Láncszabály

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)$$

$$= P(A_1) P(A_2 \mid A_1) P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \dots P(A_n \mid A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}),$$

hacsak $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$.

A jobb oldal

$$P(A_1) \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{P(A_1 \cap A_2)} \dots \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1} \cap A_n)}{P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})}$$

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.3 Feltételes valószínűség

Példa: *Húzzunk ki a 32 lapos magyar kártyából hármat visszatevés nélkül. Mennyi a valószínűsége, hogy az első és a harmadik kihúzott lap piros, a második pedig nem az?*

Jelölje $i = 1, 2, 3$ esetén A_i azt az eseményt, hogy az i -edik húzás eredménye piros. Ekkor

$$P(A_1) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}, \quad P(\bar{A}_2 | A_1) = \frac{24}{31}, \quad P(A_3 | A_1 \cap \bar{A}_2) = \frac{7}{30},$$

így

$$P(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) = \frac{1}{4} \cdot \frac{24}{31} \cdot \frac{7}{30} = \frac{7}{155}.$$

Persze lehetne használni azt az eseményteret is, amely az első három kihúzott lapból áll a sorrendet is figyelembe véve; ekkor $|\Omega| = 32 \cdot 31 \cdot 30$, és a kimenetek egyenlő valószínűségűek. Mivel a kedvező esetek száma $8 \cdot 24 \cdot 7$, így a keresett valószínűség $\frac{8 \cdot 24 \cdot 7}{32 \cdot 31 \cdot 30} = \frac{7}{155}$.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.3 Feltételes valószínűség

Teljes eseményrendszer

Az eseménytér megszámlálható diszjunkt felbontása, azaz események $A_1, A_2, \dots$ véges vagy végtelen sorozata, melyek egymást páronként kizárják, és uniójuk az egész eseménytér, vagyis

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad \text{ha} \quad i \neq j, \quad \text{és} \quad \bigcup_i A_i = \Omega.$$

Egy teljes eseményrendszer eseményei közül mindig pontosan egy következik be, és

$$\sum_i P(A_i) = 1.$$

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.3 Feltételes valószínűség

Teljes valószínűség tétele

Ha az $A_1, A_2, \dots$ pozitív valószínűségű események teljes eseményrendszert alkotnak, akkor tetszőleges B eseményre

$$P(B) = \sum_i P(B \mid A_i) \cdot P(A_i).$$

Bizonyítás. Nyilván $B = \bigcup_i (B \cap A_i)$ diszjunkt felbontás, hiszen

$$B = B \cap \Omega = B \cap \left(\bigcup_k A_k \right) = \bigcup_k (B \cap A_k),$$

és $i \neq j$ esetén

$$(B \cap A_i) \cap (B \cap A_j) = B \cap A_i \cap A_j = \emptyset,$$

ugyanis $A_i \cap A_j = \emptyset$. Ezért

$$P(B) = \sum_i P(B \cap A_i) = \sum_i P(B \mid A_i) \cdot P(A_i).$$

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.3 Feltételes valószínűség

Példa: Három gép csavarokat gyárt. A selejt aránya az első gépnél 1 %, a másodiknál 2 %, a harmadiknál 3 %. Az össztermék 50 %-át az első gép, 30 %-át a második, 20 %-át pedig a harmadik állítja elő. Mi a valószínűsége annak, hogy az össztermékből véletlenszerűen választott csavar selejtes?

Jelölje B azt az eseményt, hogy selejtet húzunk, $i = 1, 2, 3$ esetén pedig A_i azt, hogy a kihúzott csavar az i -edik gépen készült. Ekkor

$$\begin{aligned}P(B|A_1) &= 0.01, & P(B|A_2) &= 0.02, & P(B|A_3) &= 0.03, \\P(A_1) &= 0.5, & P(A_2) &= 0.3, & P(A_3) &= 0.2,\end{aligned}$$

így

$$P(B) = 0.01 \cdot 0.5 + 0.02 \cdot 0.3 + 0.03 \cdot 0.2 = 0.017.$$

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.3 Feltételes valószínűség

Bayes-formula

Ha A és B pozitív valószínűségű események, akkor

$$P(A | B) = \frac{P(A) \cdot P(B | A)}{P(B)}.$$

Bizonyítás: $P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ és $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B | A)$.

Bayes-tétel

Ha az $A_1, A_2, \dots$ pozitív valószínűségű események teljes eseményrendszert alkotnak és $P(B) > 0$, akkor

$$P(A_i | B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B | A_i)}{\sum_j P(B | A_j) \cdot P(A_j)}.$$

Bizonyítás: A Bayes-formulával $P(A_i | B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B | A_i)}{P(B)}$. A teljes valószínűség tételével $P(B) = \sum_j P(B | A_j) \cdot P(A_j)$.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.3 Feltételes valószínűség

Példa: *Mennyi a feltételes valószínűsége az előző példában annak, hogy az első, második, illetve harmadik gépen gyártották a kiválasztott csavart azon feltétel mellett, hogy az selejtesnek bizonyult?*

$$P(A_1 | B) = \frac{0.01 \cdot 0.5}{0.017} = \frac{5}{17}, \quad P(A_2 | B) = \frac{6}{17}, \quad P(A_3 | B) = \frac{6}{17}.$$

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.4. Független események

Független események

Azt mondjuk, hogy az A és B események **függetlenek**, ha

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Ha A és B pozitív valószínűségű események, akkor a következő állítások ekvivalensek:

- A és B függetlenek;
- $P(A | B) = P(A)$;
- $P(B | A) = P(B)$.

Ha $P(A) = 0$ vagy $P(A) = 1$, akkor A tetszőleges B eseménytől független.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.4. Független események

Páronként független események

Azt mondjuk, hogy az $A_1, A_2, \dots$ események **páronként függetlenek**, ha közülük bármely két esemény független.

(Teljesen) független események

Azt mondjuk, hogy az $A_1, A_2, \dots$ események **(teljesen) függetlenek**, ha tetszőleges $i_1, i_2, \dots, i_k$ **különböző** indexekre

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_k}).$$

Lehetséges, hogy például három esemény páronként függetlenek, de nem (teljesen) függetlenek.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.5 Valószínűségi változók

Valószínűségi változó / véletlen mennyiség, eloszlásfüggvény

Ha $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező, akkor a $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ leképezés **valószínűségi változó / véletlen mennyiség**, ha tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén $\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{A}$. Ekkor az $F_\xi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$,

$$F_\xi(x) := P\{\xi < x\}$$

függvényt ξ **(kumulatív) eloszlásfüggvényének** nevezzük.

Eloszlásfüggvény

Egy $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ függvény akkor és csak akkor lehet eloszlásfüggvénye valamely $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ valószínűségi változónak, ha

- ❶ F monoton növekvő,
- ❷ F balról folytonos,
- ❸ $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1.$

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.5 Valószínűségi változók

Diszkrét valószínűségi változó

A $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ valószínűségi változó **diszkrét**, ha lehetséges értékeinek halmaza, a $\{\xi(\omega) : \omega \in \Omega\}$ értékkészlet megszámlálható.

A ξ diszkrét valószínűségi változó **eloszlása** az a P_ξ valószínűségi mérték a ξ lehetséges értékeinek $X := \{x_1, x_2, \dots\}$ halmazán, melyre $P_\xi(\{x_i\}) = P(\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) = x_i\})$, $x_i \in X$.

Diszkrét valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

Egy ξ diszkrét valószínűségi változó eloszlásfüggvénye olyan lépcsős függvény, mely a lehetséges értékeknél ugrik, és az ugrás nagysága az illető érték valószínűsége. Ha a ξ lehetséges értékeinek halmaza $X := \{x_1, x_2, \dots\}$, akkor

$$F_\xi(x) = \sum_{\{i : x_i < x\}} P_\xi(\{x_i\}), \quad x \in \mathbb{R}.$$

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.5 Valószínűségi változók

Példák:

- ❶ *Két kockát dobva a dobott számok összegét jelölje ξ . Határozzuk meg ξ eloszlását!*

Ekkor ξ diszkrét valószínűségi változó; lehetséges értékeinek halmaza:

$$X = \{2, 3, \dots, 12\},$$

eloszlása:

$$P\{\xi = k\} = \begin{cases} \frac{k-1}{36} & \text{ha } 2 \leq k \leq 7, \\ \frac{13-k}{36} & \text{ha } 7 \leq k \leq 12. \end{cases}$$

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.5 Valószínűségi változók

2 Binomiális eloszlás.

n független kísérlet

A esemény, $p := P(A)$

A gyakorisága: $\xi := k_n(A)$

diszkrét valószínűségi változó;

lehetséges értékeinek halmaza:

$$X = \{0, 1, 2, \dots, n\},$$

eloszlása

$$P\{\xi = k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

melyet (n, p) **paraméterű binomiális eloszlásnak** nevezünk.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.5 Valószínűségi változók

8 Elsőrendű negatív binomiális eloszlás.

A esemény, $p := P(A)$

Addig végzünk független kísérleteket, míg A először bekövetkezik.

$\xi :=$ az ehhez szükséges kísérletek száma;

lehetséges értékeinek halmaza:

$$X = \{1, 2, \dots, \infty\},$$

eloszlása: $k = 1, 2, \dots$ esetén

$$P\{\xi = k\} = p \cdot (1 - p)^{k-1},$$

így

$$P\{\xi = \infty\} = 1 - P\{\xi < \infty\} = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} P\{\xi = k\} = 1 - p \sum_{k=1}^{\infty} (1 - p)^{k-1} = 0.$$

Ekkor ξ eloszlását **elsőrendű p paraméterű negatív binomiális eloszlásnak** (vagy geometriai eloszlásnak) nevezzük.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.5 Valószínűségi változók

4 Hipergeometrikus eloszlás.

Egy dobozban M piros és $N - M$ fekete golyó van ($M < N$).
Visszatevés nélkül húzunk ki n golyót ($n \leq N$).

$\xi :=$ a kihúzott piros golyók száma;

lehetséges értékeinek halmaza: olyan k értékek, melyekre
teljesül $0 \leq k \leq n$, $k \leq M$, és $n - k \leq N - M$,
eloszlása:

$$P\{\xi = k\} = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Ekkor ξ eloszlását $(n, M, N - M)$ **paraméterű hipergeometrikus eloszlásnak** nevezzük.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.5 Valószínűségi változók

5 Poisson eloszlás.

Mazsolás kalácsot sütünk; 1000 gramm tésztába $n = 50$ darab mazsolát teszünk. Egy szelet súlya 25 gramm, tehát $N = 40$ szelet készül. Minden mazsola egyforma valószínűséggel kerülhet bele bármely szeletbe, és a mazsolák egymástól függetlenül „mozognak”. Jelölje ξ egy kiválasztott szeletbe kerülő mazsolák számát. Lehetséges értékeinek halmaza $X = \{0, 1, \dots, 50\}$, eloszlása

$$P\{\xi = k\} = \binom{50}{k} \left(\frac{1}{40}\right)^k \left(1 - \frac{1}{40}\right)^{50-k},$$

tehát ξ eloszlása n -edrendű $1/N$ paraméteru binomiális eloszlás.

Mi történik, ha növeljük a tészta mennyiségét?

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.5 Valószínűségi változók

Ha n mazsolát használunk fel $20 \cdot n$ gramm tésztába, akkor $N = 20 \cdot n/25$ szelet készül, így a binomiális eloszlás paramétere $p_n := 1/N = \lambda/n$, ahol $\lambda := 5/4$ az egy szeletre átlagosan jutó mazsolák száma. Ekkor

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}. \end{aligned}$$

Ha egy η valószínűségi változó lehetséges értékei a nemnegatív egész számok és $k = 0, 1, \dots$ esetén

$$P(\eta = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

ahol $\lambda > 0$, akkor azt mondjuk, hogy η eloszlása λ **paraméterű Poisson-eloszlás**.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.5 Valószínűségi változók

Valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

Ha $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező, $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ valószínűségi változó és létezik olyan $f_\xi : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ függvény, melyre

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^x f_\xi(t) dt, \quad x \in \mathbb{R},$$

akkor az f_ξ függvényt a ξ **sűrűségfüggvényének** nevezzük.
(Nem egyértelműen definiált!)

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.5 Valószínűségi változók

Valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

Ha $a < b$, akkor

$$P\{a \leq \xi < b\} = F_\xi(b) - F_\xi(a) = \int_a^b f_\xi(t) dt.$$

Ha az f_ξ sűrűségfüggvény folytonos az $x \in \mathbb{R}$ pontban, akkor

$$F'_\xi(x) = f_\xi(x).$$

Egy $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ függvény akkor és csak akkor lehet sűrűségfüggvénye valamely $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ valószínűségi változónak, ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 1.$$

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.5 Valószínűségi változók

Egyenletes eloszlás az $[a, b]$ intervallumon

Ha az $[a, b]$ intervallumon választunk véletlenszerűen egy ξ pontot úgy, hogy egy $A \subset [a, b]$ részhalmazba esés valószínűsége az illető részhalmaz mértékével arányos, akkor ξ eloszlásfüggvénye nyilván

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{ha } a < x \leq b, \\ 1 & \text{ha } x > b. \end{cases}$$

Ekkor a ξ valószínűségi változót **egyenletes eloszlásúnak** nevezzük a $[a, b]$ intervallumon. Továbbá

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{ha } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

függvény sűrűségfüggvénye ξ -nek.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.5 Valószínűségi változók

Normális eloszlás

Ha a ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

alakú, ahol $m \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, akkor azt mondjuk, hogy ξ **normális eloszlású** (m, σ^2) **paraméterekkel**.

Az, hogy $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$, abból következik, hogy

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx \right)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\infty} r e^{-r^2/2} dr \right) d\varphi = 2\pi \left[-e^{-r^2/2} \right]_{r=0}^{r=\infty} = 2\pi. \end{aligned}$$

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.5 Valószínűségi változók

Exponenciális eloszlás

Jelölje a ξ valószínűségi változó egy radioaktív atom élettartamát. Ez rendelkezik az úgynevezett **örökifjú tulajdonsággal**: ha $t, h > 0$, akkor

$$P\{\xi \geq t + h \mid \xi \geq t\} = P\{\xi \geq h\},$$

vagyis annak ellenére, hogy tudjuk, hogy az atom már megélt t időt, a még hátralevő élettartam eloszlása éppen olyan, mint a teljes élettartam eredeti eloszlása. Mivel

$$P\{\xi \geq t + h \mid \xi \geq t\} = \frac{P\{\xi \geq t + h, \xi \geq t\}}{P\{\xi \geq t\}},$$

és $P\{\xi \geq t + h, \xi \geq t\} = P\{\xi \geq t + h\}$, ezért a $G(t) := P\{\xi \geq t\}$ **túlélési függvényre** teljesül

$$\frac{G(t + h)}{G(t)} = G(h).$$

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.5 Valószínűségi változók

Be lehet látni, hogy ha G folytonos, akkor létezik olyan $\lambda > 0$, hogy

$$G(t) = e^{-\lambda t} \quad \text{ha } t > 0.$$

Ezért ξ eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

alakú, ahol $\lambda > 0$. Ezt az eloszlást λ **paraméterű exponenciális eloszlásnak** nevezzük. Van sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{ha } x > 0. \end{cases}$$

Bomlási állandó:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \mathbf{P}\{t \leq \xi < t + h \mid \xi \geq t\} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (1 - e^{-\lambda h}) = \lambda.$$

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.5 Valószínűségi változók

Valószínűségi vektorváltozó

$$\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad \text{azaz} \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_k),$$

ahol $\xi_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, k$ valószínűségi változók

eloszlásfüggvénye: $F_\xi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$,

$$F_\xi(x_1, \dots, x_k) := P\{\xi_1 < x_1, \dots, \xi_k < x_k\}$$

Valószínűségi vektorváltozó sűrűségfüggvénye

Ha létezik olyan $f_\xi : \mathbb{R}^k \rightarrow [0, \infty)$ függvény, melyre

$$F_\xi(x_1, \dots, x_k) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_k} f_\xi(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k$$

teljesül minden $(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ pontban, akkor az f_ξ függvényt ξ **sűrűségfüggvényének** nevezzük.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.5 Valószínűségi változók

Valószínűségi vektorváltozó sűrűségfüggvénye

Nyilván

$$P\{a_i \leq \xi_i \leq b_i, i = 1, \dots, k\} = \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_k}^{b_k} f_{\xi}(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k,$$

sőt tetszőleges $B \subset \mathbb{R}^k$ (Borel-halmaz) esetén

$$P\{(\xi_1, \dots, \xi_k) \in B\} = \int_B \dots \int f_{\xi}(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k,$$

továbbá ha F_{ξ} k -szor folytonosan differenciálható, akkor

$$f_{\xi}(x_1, \dots, x_k) = \frac{\partial^k F_{\xi}(x_1, \dots, x_k)}{\partial x_1 \dots \partial x_k}.$$

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.5 Valószínűségi változók

Diszkrét valószínűségi vektorváltozó

A $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$ valószínűségi változó **diszkrét**, ha lehetséges értékeinek halmaza, a $\{\xi(\omega) : \omega \in \Omega\}$ értékészlet megszámlálható.

Ha $(\xi, \eta) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ diszkrét, akkor ξ és η is diszkrét. Ha ξ és η lehetséges értékei $x_1, x_2, \dots$, illetve $y_1, y_2, \dots$, akkor (ξ, η) lehetséges értékeinek halmaza $\{(x_i, y_j) : i, j = 1, 2, \dots\}$.

Ha ismerjük (ξ, η) eloszlását, azaz a

$$P\{\xi = x_i, \eta = y_j\} \quad i, j = 1, 2, \dots$$

valószínűségeket, akkor ki tudjuk számolni ξ és η eloszlását is:

$$P\{\xi = x_i\} = \sum_j P\{\xi = x_i, \eta = y_j\}, \quad P\{\eta = y_j\} = \sum_i P\{\xi = x_i, \eta = y_j\}.$$

Ezek (ξ, η) **peremeloszlásai / marginális eloszlásai**.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.5 Valószínűségi változók

Polinomiális eloszlás

n független kísérletet hajtunk végre egy $A_1, A_2, \dots, A_r$ teljes eseményrendszerre, $p_i := P(A_i)$ (ekkor $p_1 + p_2 + \dots + p_r = 1$). Ekkor A_i gyakorisága: $\xi_i := k_n(A_i)$, és $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r)$ diszkrét valószínűségi vektorváltozó; lehetséges értékeinek halmaza:

$$\{(k_1, k_2, \dots, k_r) \in \mathbb{Z}^r : k_i \geq 0, k_1 + k_2 + \dots + k_r = n\},$$

eloszlása

$$P\{\xi_1 = k_1, \xi_2 = k_2, \dots, \xi_r = k_r\} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_r!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r},$$

melyet $(n, p_1, p_2, \dots, p_r)$ **paraméterű polinomiális eloszlásnak** nevezünk. Peremeloszlásai binomiális eloszlások:

$$P\{\xi_i = k_i\} = \frac{n!}{k_i! (n - k_i)!} p_i^{k_i} (1 - p_i)^{n - k_i}.$$

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.5 Valószínűségi változók

Polihipergeometrikus eloszlás

Ha visszatevés nélkül húzunk ki n golyót ($n \leq N$), és ξ_i jelöli az i -edik színből húzott golyók számát, akkor $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r)$ olyan $(k_1, k_2, \dots, k_r)$ értékeket vehet fel, melyekre minden $i = 1, 2, \dots, r$ esetén teljesül $0 \leq k_i \leq N_i$, és $k_1 + k_2 + \dots + k_r = n$, továbbá

$$P\{\xi_1 = k_1, \xi_2 = k_2, \dots, \xi_r = k_r\} = \frac{\binom{N_1}{k_1} \binom{N_2}{k_2} \dots \binom{N_r}{k_r}}{\binom{N}{n}}.$$

Ekkor ξ eloszlását $(n, N_1, \dots, N_r)$ **paraméterű polihipergeometrikus eloszlásnak** nevezzük.

Peremeloszlásai hipergeometrikus eloszlások:

$$P\{\xi_i = k_i\} = \frac{\binom{N_i}{k_i} \binom{N-N_i}{n-k_i}}{\binom{N}{n}}.$$

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.5 Valószínűségi változók

Ha a (ξ, η) valószínűségi vektorváltozónak létezik $f_{\xi, \eta}$ sűrűségfüggvénye, akkor a ξ , illetve η valószínűségi változóknak is létezik sűrűségfüggvényük, mégpedig

$$f_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi, \eta}(x, y) dy, \quad f_{\eta}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi, \eta}(x, y) dx.$$

Ezek (ξ, η) **peremeloszlásai / marginális eloszlásai**.

Független valószínűségi változók

A ξ és η valószínűségi változókat akkor nevezzük **függetleneknek**, ha tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}$ esetén

$$P\{\xi < x, \eta < y\} = P\{\xi < x\}P\{\eta < y\},$$

azaz $F_{\xi, \eta}(x, y) = F_{\xi}(x)F_{\eta}(y)$.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.5 Valószínűségi változók

Független valószínűségi változók

Ha ξ diszkrét valószínűségi változó $x_1, x_2, \dots$ lehetséges értékekkel és η diszkrét valószínűségi változó $y_1, y_2, \dots$ lehetséges értékekkel, akkor ξ és η függetlensége azzal ekvivalens, hogy

$$\forall i, j \quad P\{\xi = x_i, \eta = y_j\} = P\{\xi = x_i\}P\{\eta = y_j\}.$$

Ha létezik (ξ, η) -nak $f_{\xi, \eta}$ sűrűségfüggvénye, akkor ξ és η függetlensége azzal ekvivalens, hogy

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad f_{\xi, \eta}(x, y) = f_{\xi}(x)f_{\eta}(y).$$

Valószínűségeloszlások konvolúciója

Ha a ξ és η valószínűségi változók függetlenek, akkor azt mondjuk, hogy $\xi + \eta$ eloszlása a ξ és η **eloszlásának konvolúciója**.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.5 Valószínűségi változók

Valószínűségeloszlások konvolúciója

Ha ξ és η független diszkrét valószínűségi változók, és a lehetséges értékeik nemnegatív egész számok, akkor a

$$\{\xi + \eta = k\} = \bigcup_{j=0}^k (\{\xi = j\} \cap \{\eta = k - j\})$$

diszjunkt felbontás alapján

$$P\{\xi + \eta = k\} = \sum_{j=0}^k P\{\xi = j\}P\{\eta = k - j\}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Ha a ξ és η független valószínűségi változóknak léteznek az f_ξ és f_η sűrűségfüggvényei, akkor

$$f_{\xi+\eta}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(u)f_\eta(x-u)du, \quad x \in \mathbb{R}.$$

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.5 Valószínűségi változók

Példák:

- 1 Ha ξ és η független binomiális eloszlásúak (n_1, p) illetve (n_2, p) paraméterekkel, akkor ezek konvolúciója ismét binomiális eloszlás, mégpedig $(n_1 + n_2, p)$ paraméterekkel:

$$\sum_{i,j: i+j=k} \binom{n_1}{i} p^i (1-p)^{n_1-i} \binom{n_2}{j} p^j (1-p)^{n_2-j} = \binom{n_1 + n_2}{k} p^k (1-p)^{n_1+n_2-k}.$$

- 2 Ha ξ és η független normális eloszlásúak (m_1, σ_1^2) illetve (m_2, σ_2^2) paraméterekkel, akkor ezek konvolúciója ismét normális eloszlás, mégpedig $(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ paraméterekkel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(u-m_1)^2}{2\sigma_1^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(x-u-m_2)^2}{2\sigma_2^2}} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} e^{-\frac{(x-m_1-m_2)^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}}.$$

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.6 Várható érték

Intuíció:

Tekintsünk egy $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ diszkrét valószínűségi változót $x_1, \dots, x_N$ lehetséges értékekkel.

n független kísérletet hajtunk végre

$A_k := \{\xi = x_k\}$ relatív gyakorisága

$$r_n(A_k) \approx P(A_k) = P\{\xi = x_k\},$$

ezért az x_k értéket körülbelül $n \cdot P\{\xi = x_k\}$ esetben kapjuk, így
a megfigyelt értékek átlaga körülbelül

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^N x_k \cdot n \cdot P\{\xi = x_k\} = \sum_{k=1}^N x_k \cdot P\{\xi = x_k\}.$$

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.6 Várható érték

Valószínűségi változó várható értéke

Ha $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ diszkrét valószínűségi változó $x_1, x_2, \dots$ lehetséges értékekkel, akkor az

$$E \xi := \sum_k x_k \cdot P\{\xi = x_k\}$$

mennyiséget a ξ **várható értékének** nevezzük, amennyiben ez a sor abszolút konvergens, azaz $\sum_k |x_k| \cdot P\{\xi = x_k\} < \infty$.

Ha $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ egy abszolút folytonos valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvénye $f_\xi : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$, akkor az

$$E \xi := \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x) dx$$

mennyiséget a ξ **várható értékének** nevezzük, amennyiben ez az improprius integrál abszolút konvergens, azaz $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_\xi(x) dx < \infty$.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.6 Várható érték

Példák:

- ❶ Ha ξ binomiális eloszlású (n, p) paraméterekkel, akkor

$$E\xi = \sum_{k=0}^n k \cdot \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = np.$$

- ❷ Ha egy egységnyi oldalú négyzetben választunk egyenletes eloszlás szerint egy pontot, és ξ jelöli a pontnak a legközelebbi oldaltól való távolságát, akkor $E\xi = \frac{1}{6}$, hiszen

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0, \\ 1 - (1 - 2x)^2 & \text{ha } x \in [0, \frac{1}{2}], \\ 1 & \text{ha } x > \frac{1}{2}, \end{cases} \quad f_{\xi}(x) = \begin{cases} 4 - 8x & \text{ha } x \in [0, \frac{1}{2}], \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$$

$$E\xi = \int_0^{1/2} x(4 - 8x) dx = \left[2x^2 - \frac{8}{3}x^3 \right]_{x=0}^{x=1/2} = \frac{1}{6}.$$

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.6 Várható érték

- ③ Az A és B játékosok a következő játékot játszik. Felváltva dobnak egy szabályos érmét; A kezd, és az nyer, akinek először sikerül fejet dobnia. Az első dobásnál 2–2 forintot tesznek be, és minden dobás előtt duplázzák a tétet, azaz ha az n -edik dobásra sikerül fejet dobni és n páratlan, akkor A nyer 2^n forintot B -től, ha pedig n páros, akkor B nyer 2^n forintot A -tól. Mennyi az A illetve B játékos várható nyereménye?

Jelölje ξ az A játékos nyereményét (mely pozitív, ha A nyer, és negatív, ha A veszít). Ekkor ξ lehetséges értékei 2, -4 , 8, -16 , ... és $P\{\xi = 2\} = \frac{1}{2}$, $P\{\xi = -4\} = \frac{1}{4}$, ... Mivel

$$2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 8 \cdot \frac{1}{8} + \dots = 1 + 1 + 1 + \dots = \infty,$$

így ξ várható értéke nem létezik!

- ④ Legyen ξ olyan valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvénye $f_{\xi}(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$. Ekkor nem létezik $E\xi$, mert $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|}{\pi(1+x^2)} dx = \infty$.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.6 Várható érték

Várható érték tulajdonságai

Ha ξ és η valószínűségi változók és $a, b \in \mathbb{R}$, akkor

- $E(a\xi) = a E \xi$ (homogenitás)
- $E(\xi + \eta) = E \xi + E \eta$ (additivitás)
- $E(a\xi + b\eta) = a E \xi + b E \eta$ (linearitás)
- ha ξ és η függetlenek, akkor $E(\xi\eta) = E \xi \cdot E \eta$
- ha $\xi \geq 0$, akkor $E \xi \geq 0$ (pozitivitás)
- ha $\xi \leq \eta$, akkor $E \xi \leq E \eta$ (monotonitás)
- $|E \xi| \leq E |\xi|$
- $E |\xi\eta| \leq \sqrt{E \xi^2 E \eta^2}$ (Cauchy-Schwartz egyenlőtlenség)

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.6 Várható érték

Valószínűségi változó függvényének várható értéke

Legyen $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Ha ξ diszkrét valószínűségi változó $x_1, x_2, \dots$ lehetséges értékekkel, akkor

$$E g(\xi) = \sum_k g(x_k) \cdot P\{\xi = x_k\},$$

amennyiben ez a sor abszolút konvergens.

Ha ξ abszolút folytonos valószínűségi változó f_ξ sűrűségfüggvénnyel, akkor

$$E g(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_\xi(x) dx,$$

amennyiben ez az improprius integrál abszolút konvergens.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.6 Várható érték

Valószínűségi vektorváltozó függvényének várható értéke

Legyen $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Ha ξ és η diszkrét valószínűségi változók $x_1, x_2, \dots$, illetve $y_1, y_2, \dots$ lehetséges értékekkel, akkor

$$E g(\xi, \eta) = \sum_{k, \ell} g(x_k, y_\ell) \cdot P\{\xi = x_k, \eta = y_\ell\},$$

amennyiben ez a sor abszolút konvergens.

Ha (ξ, η) abszolút folytonos valószínűségi vektorváltozó $f_{\xi, \eta}$ sűrűségfüggvénnyel, akkor

$$E g(\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) \cdot f_{\xi, \eta}(x, y) dx dy,$$

amennyiben ez az improprius integrál abszolút konvergens.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.6 Várható érték

Valószínűségi változó varianciája / szórásnégyzete

$$\text{var } \xi := D^2\xi := E [(\xi - E \xi)^2].$$

Variancia / szórásnégyzet kiszámolása

$$\text{var } \xi = E [\xi^2 - 2\xi E \xi + (E \xi)^2] = E(\xi^2) - 2 \cdot E \xi \cdot E \xi + (E \xi)^2 = E(\xi^2) - (E \xi)^2,$$

így ha ξ diszkrét valószínűségi változó $x_1, x_2, \dots$ lehetséges értékekkel, akkor

$$\text{var } \xi = \sum_k x_k^2 \cdot P\{\xi = k\} - \left(\sum_k x_k \cdot P\{\xi = k\} \right)^2,$$

ha pedig ξ abszolút folytonos valószínűségi változó f_ξ sűrűségfüggvénnyel, akkor

$$\text{var } \xi = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_\xi(x) dx - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x) dx \right)^2.$$

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.6 Várható érték

Variancia / szórásnégyzet tulajdonságai

Ha ξ és η valószínűségi változók és $a \in \mathbb{R}$, akkor

- $\text{var}(\xi + a) = \text{var } \xi$ (eltolásinvariancia)
- $\text{var}(c \cdot \xi) = c^2 \cdot \text{var } \xi$ (homogenitás)
- ha ξ és η függetlenek, akkor $\text{var}(\xi + \eta) = \text{var } \xi + \text{var } \eta$ (additivitás)

Valószínűségi változók kovarianciája

$$\text{cov}(\xi, \eta) := E [(\xi - E \xi)(\eta - E \eta)]$$

Addíciós képlet

Ha ξ és η valószínűségi változók, akkor

$$\text{var}(\xi + \eta) = \text{var } \xi + 2 \text{cov}(\xi, \eta) + \text{var } \eta$$

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.6 Várható érték

Példa:

Legyen η **standard normális eloszlású**, azaz normális eloszlású $(0, 1)$ paraméterekkel. Ekkor

$$E\eta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot e^{-x^2/2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\substack{K \rightarrow -\infty \\ L \rightarrow +\infty}} \left[-e^{-x^2/2} \right]_{x=K}^{x=L} = 0,$$

$$\begin{aligned} E(\eta^2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2/2} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-xe^{-x^2/2} \right]_{x=-\infty}^{x=\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = 1, \end{aligned}$$

$$\text{var } \eta = E(\eta^2) - (E\eta)^2 = 1.$$

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.6 Várható érték

Ha pedig ξ normális eloszlású (m, σ^2) paraméterekkel, akkor

$$\xi = \sigma \cdot \eta + m,$$

ahol

$$\eta = \frac{\xi - m}{\sigma}$$

standard normális eloszlású, hiszen η eloszlásfüggvénye

$$F_{\eta}(x) = P\{\eta < x\} = P\left\{\frac{\xi - m}{\sigma} < x\right\} = P\{\xi < \sigma \cdot x + m\} = F_{\xi}(\sigma \cdot x + m),$$

így η sűrűségfüggvénye

$$f_{\eta}(x) = F'_{\eta}(x) = \sigma \cdot F'_{\xi}(\sigma x + m) = \sigma \cdot f_{\xi}(\sigma x + m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2},$$

ezért

$$E \xi = \sigma \cdot E \eta + m = m, \quad \text{var } \xi = \sigma^2 \cdot \text{var } \eta = \sigma^2.$$

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.6 Várható érték

Valószínűségi változók korrelációs együtthatója

$$\text{corr}(\xi, \eta) := \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{\text{var } \xi \cdot \text{var } \eta}}.$$

Ha $\text{corr}(\xi, \eta) = 0$ azaz $\text{cov}(\xi, \eta) = 0$, akkor azt mondjuk, hogy ξ és η **korrelálatlanok**.

Ha

$$\text{corr}(\xi, \eta) > 0 \quad \text{azaz} \quad \text{cov}(\xi, \eta) > 0,$$

akkor ξ és η **pozitívan korreláltak**, ha pedig

$$\text{corr}(\xi, \eta) < 0 \quad \text{azaz} \quad \text{cov}(\xi, \eta) < 0,$$

akkor ξ és η **negatívan korreláltak**.

Ha ξ és η függetlenek, akkor ξ és η korrelálatlanok, de ez fordítva általában nem igaz.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.6 Várható érték

Példa: Legyen a (ξ, η) valószínűségi vektorváltozó egyenletes eloszlású a $(-1, 0)$, $(0, -1)$, $(0, 1)$ és $(1, 0)$ pontokon, azaz

$$P\{\xi = -1, \eta = 0\} = P\{\xi = 0, \eta = -1\} = P\{\xi = 0, \eta = 1\} = P\{\xi = 1, \eta = 0\} = \frac{1}{4}.$$

Ekkor $E\xi = E\eta = 0$ és $E(\xi\eta) = 0$ miatt

$$\text{cov}(\xi, \eta) = E(\xi\eta) - E\xi \cdot E\eta = 0,$$

azaz ξ és η korrelálatlanok, viszont a peremeloszlások

$$P\{\xi = -1\} = P\{\xi = 1\} = \frac{1}{4}, \quad P\{\xi = 0\} = \frac{1}{2},$$

$$P\{\eta = -1\} = P\{\eta = 1\} = \frac{1}{4}, \quad P\{\eta = 0\} = \frac{1}{2},$$

ezért ξ és η nem függetlenek, hiszen például

$$P\{\xi = 1, \eta = 0\} = \frac{1}{4}, \quad P\{\xi = 1\} \cdot P\{\eta = 0\} = \frac{1}{8}.$$

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.6 Várható érték

Kovariancia és korrelációs együttható tulajdonságai

- $\text{var } \xi = \text{cov}(\xi, \xi)$
- Ha ξ és η valószínűségi változók, akkor
$$\text{cov}(\xi, \eta) = \text{cov}(\eta, \xi), \quad \text{corr}(\xi, \eta) = \text{corr}(\eta, \xi) \quad (\text{szimmetria})$$
- Ha $\xi_1, \dots, \xi_n$ és $\eta_1, \dots, \eta_m$ valószínűségi változók és $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}$, akkor
$$\text{cov} \left(\sum_{i=1}^n a_i \xi_i, \sum_{j=1}^m b_j \eta_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j \text{cov}(\xi_i, \eta_j) \quad (\text{bilinearitás})$$
- $|\text{corr}(\xi, \eta)| \leq 1$, és $|\text{corr}(\xi, \eta)| = 1$ akkor és csak akkor, ha valamely $a \neq 0$ és b valós számokkal $P\{\eta = a \cdot \xi + b\} = 1$ teljesül; itt $a > 0$ illetve $a < 0$ aszerint, hogy $\text{corr}(\xi, \eta) = 1$ illetve $\text{corr}(\xi, \eta) = -1$.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.6 Várható érték

Momentumok, ferdeség, csúcsosság / lapultság

Legyen ξ valószínűségi változó, k pozitív egész. Ekkor

- **k -adik momentum:** $E(\xi^k)$
- **k -adik centrális momentum:** $E[(\xi - E\xi)^k]$
- **k -adik abszolút momentum:** $E(|\xi|^k)$
- **k -adik abszolút centrális momentum:** $E[|\xi - E\xi|^k]$
- **ferdeség:** $\frac{E[(\xi - E\xi)^3]}{(E[(\xi - E\xi)^2])^{3/2}}$
- **csúcsosság:** $\frac{E[(\xi - E\xi)^4]}{(E[(\xi - E\xi)^2])^2} - 3$

Tehát $E\xi$ az első momentum, $\text{var } \xi$ pedig a második (abszolút) centrális momentum

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.6 Várható érték

Ha $a, b \in \mathbb{R}$ és $a \neq 0$, akkor ξ és $a\xi + b$ ferdesége, illetve ξ és $a\xi + b$ csúcsossága megegyezik.

Példa: Legyen η standard normális eloszlású. Ekkor $E\eta = 0$, $\text{var } \eta = 1$,

$$E(\eta^3) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^3 e^{-x^2/2} dx = 0,$$

$$\begin{aligned} E(\eta^4) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-x^2/2} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-x^3 e^{-x^2/2} \right]_{x=-\infty}^{x=\infty} + \frac{3}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2/2} dx = 3E(\eta^2) = 3, \end{aligned}$$

ezért η ferdesége és csúcsossága is 0.

Ha ξ normális eloszlású (m, σ^2) paraméterekkel, akkor $\xi = \sigma \eta + m$, ahol η standard normális eloszlású, ezért ξ ferdesége és csúcsossága is 0.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.6 Várható érték

Valószínűségi változó kvantilisei, mediánja, interkvartilise

Legyen $q \in (0, 1)$. A $c_q \in \mathbb{R}$ szám **q -kvantilise** a ξ valószínűségi változónak, ha

$$P\{\xi < c_q\} \leq q, \quad \text{és} \quad P\{\xi > c_q\} \leq 1 - q.$$

Az $\frac{1}{2}$ -kvantilis **mediánnak** nevezzük.

Az $c_{3/4} - c_{1/4}$ különbséget **interkvartilisnek** nevezzük.

Legyen

$$a := \inf \{x \in \mathbb{R} : P\{\xi > x\} \leq 1 - q\}, \quad b := \sup \{x \in \mathbb{R} : P\{\xi < x\} \leq q\}.$$

Ekkor $a \leq b$, és egy $c \in \mathbb{R}$ szám akkor és csak akkor q -kvantilise ξ -nek, ha $a \leq c \leq b$.

Szokták csak az $\frac{a+b}{2}$ számot tekinteni a q -kvantilisnek.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.6 Várható érték

Valószínűségi változó kvantilisei

- Ha az $F_{\xi}(x) = q$ egyenletnek van megoldása de csak egy, akkor ez az $F_{\xi}^{-1}(q)$ megoldás az egyetlen q -kvantilis.
- Ha az $F_{\xi}(x) = q$ egyenletnek nincs megoldása, akkor egyetlen q -kvantilis van, mégpedig az a szám, ahol az F_{ξ} függvény átugorja a q számot.
- Ha az $F_{\xi}(x) = q$ egyenletnek több megoldása van, akkor a megoldáshalmaz az $(a, b]$ vagy $[a, b]$ intervallum, és a q -kvantilisek éppen az $[a, b]$ intervallum pontjai.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.6 Várható érték

Valószínűségi változó kvantilisei módusza

Ha ξ diszkrét valószínűségi változó $x_1, x_2, \dots$ lehetséges értékekkel, akkor az x_i szám **módusza** ξ -nek, ha x_i -t a legnagyobb valószínűséggel veszi fel, azaz

$$P\{\xi = x_i\} = \sup_k P\{\xi = x_k\}.$$

Ha ξ abszolút folytonos valószínűségi változó f_ξ sűrűségfüggvénnyel, akkor az x szám **módusza** ξ -nek, ha x globális maximumhelye a sűrűségfüggvénynek, azaz

$$f_\xi(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}} f_\xi(y).$$

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.7 Fontos eloszlások

p paraméterű Bernoulli–eloszlás

A esemény, $p := P(A)$

$$\xi := k_1(A) = \begin{cases} 1 & \text{ha } A \text{ bekövetkezik,} \\ 0 & \text{ha } A \text{ nem következik be} \end{cases}$$

diszkrét valószínűségi változó; lehetséges értékei: 0 és 1, eloszlása

$$P\{\xi = 1\} = p, \quad P\{\xi = 0\} = 1 - p.$$

Ezt az eloszlást p **paraméterű Bernoulli–eloszlásnak** nevezzük.

Nyilván

$$E\xi = p \cdot 1 + (1 - p) \cdot 0 = p,$$

$$E(\xi^2) = p \cdot 1^2 + (1 - p) \cdot 0^2 = p,$$

$$\text{var } \xi = E(\xi^2) - (E\xi)^2 = p - p^2 = p(1 - p).$$

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.7 Fontos eloszlások

(n, p) paraméterű Binomiális eloszlás

A esemény, $p := P(A)$; n független kísérlet; A gyakorisága:
 $\xi := k_n(A)$ diszkrét valószínűségi változó; lehetséges értékeinek halmaza: $\{0, 1, 2, \dots, n\}$, eloszlása

$$P\{\xi = k\} = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Ha $\xi_i := \begin{cases} 1 & \text{ha } A \text{ beköv. az } i\text{-edik alkalommal,} \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$

akkor $\xi = \xi_1 + \dots + \xi_n$, és $\xi_1, \dots, \xi_n$ független, p paraméterű Bernoulli-eloszlásúak. Ezért

$$E \xi = E \xi_1 + \dots + E \xi_n = np,$$

$$\text{var } \xi = \text{var } \xi_1 + \dots + \text{var } \xi_n = np(1 - p).$$

Módusza: $\lfloor (n+1)p \rfloor$, és még $\lfloor (n+1)p \rfloor - 1$ is, ha $(n+1)p$ egész.

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.7 Fontos eloszlások

$(n, M, N - M)$ paraméterű hipergeometrikus eloszlás

Egy dobozban M piros és $N - M$ fekete golyó van ($M < N$). Visszatevés nélkül húzunk ki n golyót ($n \leq N$), és ξ jelöli a kihúzott piros golyók számát. Ekkor ξ olyan k értékeket vehet fel, melyre teljesül $0 \leq k \leq n$, $k \leq M$, és $n - k \leq N - M$, eloszlása

$$P\{\xi = k\} = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Ha $\xi_i := \begin{cases} 1 & \text{ha az } i\text{-edik golyó piros,} \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$ akkor $\xi = \xi_1 + \dots + \xi_n$, és a

$\xi_1, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók $\frac{M}{N}$ paraméterű Bernoulli-eloszlásúak, DE NEM FÜGGETLENEK! Például $i \neq j$ esetén

$$P\{\xi_i = 1, \xi_j = 1\} = \frac{M(M-1)}{N(N-1)}, \quad P\{\xi_i = 1\} = P\{\xi_j = 1\} = \frac{M}{N}.$$

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.7 Fontos eloszlások

$$E \xi = E \xi_1 + \dots + E \xi_n = n \cdot \frac{M}{N},$$

$$\begin{aligned} \text{var } \xi &= \text{cov}(\xi, \xi) = \text{cov} \left(\sum_{i=1}^n \xi_i, \sum_{j=1}^n \xi_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \text{cov}(\xi_i, \xi_j) = \sum_{i=1}^n \text{var } \xi_i + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{cov}(\xi_i, \xi_j), \end{aligned}$$

ahol

$$\text{var } \xi_i = \frac{M}{N} \left(1 - \frac{M}{N} \right), \quad \text{cov}(\xi_i, \xi_j) = \frac{M(M-N)}{N^2(N-1)},$$

így

$$\text{var } \xi = n \cdot \frac{M}{N} \cdot \left(1 - \frac{M}{N} \right) \cdot \frac{N-n}{N-1}$$

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.7 Fontos eloszlások

p paraméterű elsőrendű negatív binomiális eloszlás

A esemény, $p := P(A)$, melyre $0 < p < 1$. Jelölje $\xi :=$ az A első bekövetkezéséhez szükséges független kísérletek számát; lehetséges értékei: $1, 2, \dots, \infty$, eloszlása: $P\{\xi = \infty\} = 0$, és

$$P\{\xi = k\} = p \cdot (1 - p)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$E\xi = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p(1 - p)^{k-1} = p \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1},$$

ahol $q := 1 - p$, és

$$\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} (q^k)' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k \right)' = \left(\frac{1}{1 - q} \right)' = \frac{1}{(1 - q)^2},$$

így

$$E\xi = p \cdot \frac{1}{(1 - q)^2} = \frac{1}{p}.$$

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.7 Fontos eloszlások

$$\begin{aligned} E(\xi^2) &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot p(1-p)^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} [k + k(k-1)] \cdot p(1-p)^{k-1} \\ &= p \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} + pq \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)q^{k-2}, \end{aligned}$$

ahol

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)q^{k-2} = \sum_{k=1}^{\infty} (q^k)'' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k \right)'' = \left(\frac{1}{1-q} \right)'' = \frac{2}{(1-q)^3},$$

így

$$E(\xi^2) = \frac{1}{p} + pq \cdot \frac{2}{(1-q)^3} = \frac{2-p}{p^2}.$$

Végül

$$\text{var } \xi = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}.$$

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.7 Fontos eloszlások

λ paraméterű Poisson-eloszlás

$$P\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad \text{ahol } \lambda > 0.$$

$$E\xi = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = e^{-\lambda} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\lambda^{\ell+1}}{\ell!} = e^{-\lambda} \lambda e^{\lambda} = \lambda,$$

$$\begin{aligned} E(\xi^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} [k + k(k-1)] \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\ &= \lambda + e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-2)!} = \lambda + e^{-\lambda} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\lambda^{\ell+2}}{\ell!} = \lambda + \lambda^2, \end{aligned}$$

$$\text{var } \xi = \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = \lambda.$$

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.7 Fontos eloszlások

Egyenletes eloszlás az $\{1, 2, \dots, N\}$ halmazon

$$P\{\xi = k\} = \frac{1}{N}, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

$$E\xi = \sum_{k=1}^N k \cdot \frac{1}{N} = \frac{N(N+1)}{2N} = \frac{N+1}{2},$$

$$E(\xi^2) = \sum_{k=1}^N k^2 \cdot \frac{1}{N} = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6N} = \frac{(N+1)(2N+1)}{6},$$

$$\text{var } \xi = \frac{(N+1)(2N+1)}{6} - \frac{(N+1)^2}{4} = \frac{N^2 - 1}{12}.$$

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.7 Fontos eloszlások

Egyenletes eloszlás az $[a, b]$ intervallumon

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{ha } a < x \leq b, \\ 1 & \text{ha } x > b. \end{cases} \quad f_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{ha } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

$\xi = a + (b - a) \cdot \eta$ ahol η egyenletes eloszlású a $[0, 1]$ intervallumon, hiszen

$$P\{\eta < y\} = P\left\{\frac{\xi - a}{b - a} < y\right\} = P\{\xi < a + (b - a)y\} = \begin{cases} 0 & \text{ha } y \leq 0, \\ y & \text{ha } 0 \leq y \leq 1, \\ 1 & \text{ha } y \geq 1. \end{cases}$$

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.7 Fontos eloszlások

$$E\eta = \int_0^1 y \, dy = \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{2},$$

$$E(\eta^2) = \int_0^1 y^2 \, dy = \left[\frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{3},$$

$$\text{var } \eta = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12},$$

ezért

$$E\xi = a + (b - a) E\eta = a + \frac{b - a}{2} = \frac{a + b}{2},$$

$$\text{var } \xi = (b - a)^2 \text{var } \eta = \frac{(b - a)^2}{12}.$$

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.7 Fontos eloszlások

λ paraméterű exponenciális eloszlás

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{ha } x \geq 0, \end{cases} \quad \text{ahol } \lambda > 0.$$

$$E\xi = \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \left[-x e^{-\lambda x} \right]_{x=0}^{x=\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx = \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_{x=0}^{x=\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

$$\begin{aligned} E(\xi^2) &= \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \left[-x^2 e^{-\lambda x} \right]_{x=0}^{x=\infty} + 2 \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx \\ &= \frac{2}{\lambda} \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2}, \end{aligned}$$

$$\text{var } \xi = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

14. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

14.7 Fontos eloszlások

(m, σ^2) paraméterű normális eloszlás

$$f_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \text{ahol } m \in \mathbb{R}, \sigma > 0.$$

$E\xi = m$, $\text{var } \xi = \sigma^2$, ferdesége 0, csúcsossága 0.

Eloszlásfüggvénye:

$$F_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(u-m)^2}{2\sigma^2}} du, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Továbbá $\xi = \sigma \cdot \eta + m$, ahol η standard normális eloszlású, azaz paraméterei $m = 0$, $\sigma = 1$ így eloszlásfüggvénye

$$\Phi(x) := F_{\eta}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du, \quad x \in \mathbb{R},$$

melynek értékei táblázatokban megtalálhatók.