

Ellenőrző kérdések 2006 ősz

★ = komolyabb bizonyítás (jeleshez)

1. Definiálja a komplex szám és műveleteinek fogalmát!
2. Hogyan számíthatjuk ki két komplex szám szorzatát, ha azok $a+bi$ alakban, illetve trigonometrikus alakban vannak megadva?
3. Hogyan térhetünk át egy komplex szám $a + bi$ algebrai alakjáról a trigonometrikus alakjára, és fordítva?
4. Milyen tulajdonságai vannak a komplex számok konjugálásának?
5. Milyen tulajdonságai vannak a komplex számok abszolút értékének?
6. Rajzolja fel a hatodik egységgyököket a komplex számsíkon!
7. Írja fel egy trigonometrikus alakban megadott komplex szám n -dik gyökeit!
8. Mikor szorozható össze két mátrix és hogyan végezzük el összeszorolásukat?
9. Mikor mondunk egy kvadratikus mátrixot invertálhatónak?
10. Mikor nevezünk egy vektorrendszert lineárisan függőnek, illetve függetlennek?
11. Mikor nevezünk egy vektorrendszert generátorrendszernek?
12. Mikor nevezünk egy vektorrendszert bázisnak?
13. Mit nevezünk egy vektortér dimenziójának?
14. Mit nevezünk egy vektorrendszer rangjának?
15. Mit nevezünk egy vektorrendszer által generált altérnek?
16. Mikor nevezünk egy lineáris egyenletrendszert határozottnak, határozatlannak, illetve ellentmondásosnak?
17. Milyen átalakítások vezetnek ekvivalens egyenletrendszerekre?
18. Hogyan derül ki Gauss elimináció során, hogy egy lineáris egyenletrendszer ellentmondásos?
19. Hogyan derül ki Gauss elimináció során, hogy egy lineáris egyenletrendszer határozott/határozatlan?
20. Milyen feltételek esetén invertálható egy kvadratikus mátrix és számolható ki az inverze?
21. Mit tudunk az invertálható mátrixok rangjáról és determinánsáról?
22. Milyen átalakítást végezhetünk egy kvadratikus mátrixszal, hogy determinánsa ne változzon meg?
23. Milyen elemi tulajdonságai vannak a mátrixok determinánsának?
24. Írja fel a determinánsok kifejtési és ferde kifejtési tételét!
25. Hogyan számíthatjuk ki egy kvadratikus mátrix inverzét az algebrai aldeterminánsokkal?
26. Írja fel a determináns kiszámítási képletét a mátrix elemei segítségével!

27. Mit tudunk egy homogén lineáris egyenletrendszer megoldásainak halmazáról?
28. Milyen kapcsolatban van egy inhomogén lineáris egyenletrendszer megoldásainak halmaza a redukált homogén egyenletrendszerének megoldáshalmazával?
29. Adjon meg 2 példát 3 dimenziós vektortérre!
30. Írjon fel olyan 3×3 -as mátrixot, melynek rangja 1!
31. A számnégyesek vektorterében adjon meg 2 lineárisan független vektort!
32. Írjon fel egy bázist a számhármások vektorterében!
33. Melyek a 2 dimenziós alterek a térbeli szabadvektorok vektorterében?
34. ★ Igazolja, hogy végesen generált vektortérben a bázisok tagszáma egyenlő!
35. Igazolja, hogy az R^n valós vektortér dimenziója n !
36. Igazolja a mátrixszorzás asszociatív tulajdonságát!
37. ★ Bizonyítsa be a determinánsok kifejtési tételét!
38. ★ Bizonyítsa be a determinánsok szorzástételét!
39. Igazolja, hogy az invertálható mátrixok determinánusa nem nulla!
40. ★ Bizonyítsa be a mátrixok rangszámtételét!
41. Igazolja, hogy az invertálható mátrixok rangja maximális!
42. Igazolja a Cramer szabályt!
43. Bizonyítsa be, hogy a homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai alteret alkotnak!
44. ★ Igazolja, hogy egy kvadratikusan mátrix determinánusa pontosan akkor nulla, ha oszlopvektorai lineárisan függők!
45. Definiálja a valós számok egy korlátos A részhalmazának a pontos alsó korlátját!
46. Definiálja a valós számok egy korlátos A részhalmazának a pontos felső korlátját!
47. Mikor nevezünk egy részhalmazt nyíltnak, illetve zártnak a valós számok körében?
48. Milyen kapcsolatban van a halmazok nyíltsága és zártsága a halmazok műveleteivel?
49. Mit nevezünk egy $A \subset R$ halmaz torlódási pontjának? Adjon meg olyan halmazt, melynek nincs torlódási pontja!
50. Bizonyítsa be a Bolzano-Weierstrass tételt!
51. Mit nevezünk egy a_n sorozat torlódási pontjának? Adjon meg olyan sorozatot, melynek nincs torlódási pontja!
52. Mikor mondunk egy sorozatot konvergensnek?
53. Mit értünk azon, hogy egy valós a_n sorozat a végtelenhez tart?

54. Mit értünk azon, hogy egy valós a_n sorozat a mínusz végtelenhez tart?
Adjon meg egy olyan sorozatot, melyre ez teljesül!
55. Hogyan szól a pozitív tagú számsorok gyökkritériuma?
56. Hogyan szól a pozitív tagú számsorok hányadoskritériuma?
57. Adjon példát konvergens, illetve divergens sorra!
58. Adjon példát olyan számsorra, amely konvergens, de nem abszolút konvergens!
59. Milyen kapcsolatban vannak a nullsorozatok és a végtelenbe tartó sorozatok?
60. Bizonyítsa be, hogy zárt intervallumok fogyó rendszerének metszete nem üres!
61. Milyen kapcsolatban van a sorozatok konvergenciája a sorozatokkal végezhető műveletekkel?
62. Bizonyítsa be, hogy két konvergens sorozat összege is konvergens!
63. Bizonyítsa be, hogy két konvergens sorozat szorzata is konvergens!
64. Bizonyítsa be, hogy ha $a_n \rightarrow \infty$ és $b_n \rightarrow b > 0$, akkor $a_n b_n \rightarrow \infty$!
65. Igazolja, hogy az $a_n = a^n$ sorozat tart a végtelenhez, ha $a > 1$!
66. Igazolja, hogy az $a_n = a^n$ sorozat tart nullához, ha $|a| < 1$!
67. Igazolja a Bernoulli egyenlőtlenséget!
68. Mit jelent az, hogy egy függvény az értelmezési tartományának x_0 pontjában jobbról folytonos?
69. Mit jelent az, hogy egy függvény az értelmezési tartományának x_0 pontjában balról folytonos?
70. Definiálja: $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = -\infty$ Adjon meg egy olyan f függvényt, melyre a fenti teljesül $x_0 = 0$ -ban!
71. Definiálja környezetek segítségével: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$. Adjon meg egy olyan f függvényt, melyre a fenti teljesül!
72. Definiálja környezetek segítségével: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -6$. Adjon meg egy olyan f függvényt, melyre a fenti teljesül!
73. Milyen kapcsolatban van a függvények határértéke a függvényekkel végezhető műveletekkel?
74. Milyen tulajdonságai vannak a zárt intervallumon értelmezett folytonos függvényeknek?
75. Igazolja, hogy két függvénynek x_0 -ban van határértéke, akkor az összegfüggvényüknek is van ott határértéke!
76. Igazolja, hogy két függvénynek x_0 -ban van határértéke, akkor a szorzatfüggvényüknek is van ott határértéke!
77. Igazolja, hogy két függvény x_0 -ban folytonos, akkor a szorzatfüggvényük is folytonos x_0 -ban!
78. Igazolja, hogy két függvény x_0 -ban folytonos, akkor az összegfüggvényük is folytonos x_0 -ban!
79. ★ Igazolja, hogy zárt intervallumon folytonos függvény korlátos.

80. ★ Igazolja, hogy zárt intervallumon folytonos bijektív függvény szigorúan monoton!
81. ★ Igazolja, hogy az exponenciális függvény folytonos!
82. Igazolja, hogy a trigonometrikus függvények mind folytonosak!
83. Igazolja, hogy a logaritmus függvény folytonos!
84. Mit értünk egy $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény x_0 -beli deriváltján?
85. Adjon meg olyan függvényt, amely nem differenciálható valamely x_0 -ban!
86. Adjon meg olyan függvényt, amely differenciálható valamely x_0 -ban, de kétszer nem differenciálható ott!
87. Mit értünk egy $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény x_0 -beli baloldali differenciálhányadosán?
88. Fogalmazza meg az inverz függvények deriválási szabályát!
89. Hogyan deriválhatók a törtként előálló függvények?
90. Fogalmazza meg az összetett függvényekre vonatkozó deriválási szabályt!
91. Mit értünk egy függvény adott pont körüli n -edrendű Taylor polinomján!
92. Írja fel az e^x , $\sin x$, $\cos x$ függvények $x_0 = 0$ körüli 5-ödrendű Taylor polinomját!
93. Hogyan állítható elő az n -edrendű Taylor polinom maradéktagja?
94. Milyen esetekben alkalmazható a L'Hospital szabály?
95. Mikor mondunk egy $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt konvexnek, illetve konkávnak?
96. Mit nevezünk egy függvény inflexiós pontjának? Adjon meg olyan függvényt, amelynek van inflexiós pontja!
97. Fogalmazzon meg elegendő feltételeket egy $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény x_0 -beli minimalitására!
98. Mondja ki Lagrange tételét! Mi ennek a szemléletes jelentése?
99. Milyen kapcsolatban van egy függvény monotonitása a deriváltjával?
100. Milyen kapcsolatban van egy függvény konvexitása a deriváltjaival?
101. Igazolja, hogyha egy f függvény x_0 -ban differenciálható, akkor ott folytonos is!
102. Igazolja, hogy x_0 -ban differenciálható függvények összege is differenciálható x_0 -ban!
103. Igazolja, hogy x_0 -ban differenciálható függvények szorzata is differenciálható x_0 -ban!
104. Igazolja az összetett függvények differenciálási szabályát!
105. Igazolja, hogy differenciálható és monoton növekvő függvény deriváltja nemnegatív!
106. Igazolja, hogy egy differenciálható függvény helyi szélsőértékhelyein a derivált zérus!
107. Bizonyítsa be Rolle tételét!
108. Bizonyítsa be Lagrange tételét!

109. Igazolja, hogy adott intervallumon nemnegatív differenciálhányadossal rendelkező függvény monoton növekvő!
110. Bizonyítsa be, hogy a $\sin x$ függvény deriváltja $\cos x$!
111. Igazolja a hatványfüggvények deriválási szabályát!
112. Igazolja az exponenciális függvények deriválási szabályát!
113. ★ Igazolja, hogy egy intervallumon deriválható konvex függvény deriváltfüggvénye monoton nő!
114. ★ Bizonyítsa be, hogy kétszer deriválható konkáv függvény második deriváltja nempozitív!
115. Mikor mondjuk, hogy F primitív függvénye f -nek?
116. Írja le a parciális integrálás szabályát határozatlan integrálok esetén!
117. Definálja egy $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény határozott integrálját!
118. Mit értünk egy f függvény $[a, b]$ -n vett integrálközepén?
119. Hogyan szól a Newton-Leibniz szabály?
120. Írja le a helyettesítéses integrálás szabályát határozott integrálok esetén!
121. Írja le a parciális integrálás szabályát határozott integrálok esetén!
122. Értelmezze az $\int_a^\infty f(x) dx$ improprius integrált!
123. Értelmezze az $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx$ improprius integrált!
124. Értelmezze az $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ improprius integrált!
125. Bizonyítsa be a parciális integrálás szabályát határozatlan integrálok esetén!
126. Írja le be a helyettesítéses integrálás szabályát határozatlan integrálok esetén!
127. Bizonyítsa be a helyettesítéses integrálás szabályát határozatlan integrálok esetén!
128. Milyen kapcsolatban van a határozatlan integrál fogalma a függvények műveleteivel?
129. Milyen függvényt nevezünk racionális törtfüggvénynek?
130. Hogyan határozhatjuk meg egy racionális törtfüggvény határozatlan integrálját?
131. Mikor mondunk egy racionális törtfüggvényt elemi (parciális) törtnek?
132. Mit nevezünk egy f folytonos függvény $[a, b]$ -n tekintett alsó, illetve felső integrálközelítő összegének?
133. Mikor mondunk egy $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvényt integrálhatónak?
134. Milyen kapcsolatban van a határozott integrál fogalma a függvények műveleteivel?
135. Bizonyítsa is be a Newton-Leibniz szabályt!

136. Igazolja, hogy $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény területmérő függvénye f -nek primitív függvénye!
137. Milyen tulajdonságai vannak egy $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény területmérő függvényének?
138. Bizonyítsa be a helyettesítéses integrálás szabályát határozott integrálok esetén!
139. Bizonyítsa be a parciális integrálás szabályát határozott integrálok esetén!
140. Igazolja, hogy folytonos $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény esetén f területmérő függvénye f -nek primitív függvénye!
141. Hogyan, s mikor alkalmazható az integrálszámítás testek térfogatának és felszínének kiszámítására?
142. Legyen $f: (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos és $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$. Hogyan értelmezzük az $\int_a^b f(x) dx$ improprius integrált?
143. Mit nevezünk elsőrendű közönséges differenciálegyenletnek?
144. Mikor nevezünk egy elsőrendű közönséges differenciálegyenletet szétválasztható változójúnak (szeparábilisnek)?
145. Mikor nevezünk egy elsőrendű közönséges differenciálegyenletet lineárisnak?
146. Hogyan oldhatjuk meg az elsőrendű lineáris differenciálegyenleteket?
147. Milyen kapcsolat van az inhomogén lineáris differenciálegyenlet megoldásai és a redukált homogén differenciálegyenlet megoldásai között?
148. Hogyan oldhatjuk meg a szétválasztható változójú differenciálegyenleteket?
149. Mit jelent egy kezdeti érték feltétel megadása egy adott differenciálegyenlethez? Hogyan határozhatjuk meg a kezdeti érték probléma megoldását?
150. Hogyan oldhatjuk meg az elsőrendű lineáris differenciálegyenleteket?
151. Mit értünk másodrendű lineáris differenciálegyenleten?
152. Hogyan oldhatjuk meg a konstans együtthatós másodrendű lineáris homogén differenciálegyenletet?
153. Milyen kapcsolat van az inhomogén és a redukált homogén másodrendű lineáris differenciálegyenlet megoldásai között?
154. Mit értünk elsőrendű lineáris differenciálegyenletrendszeren?
155. Hogyan oldhatjuk meg a konstans együtthatós homogén lineáris differenciálegyenletrendszert?
156. Mit értünk alaprendszeren homogén lineáris differenciálegyenletrendszer esetén?
157. Hogyan jellemezhető az alaprendszer a Wronski determinánssal?
158. Hogyan kereshetjük meg a konstans variálás módszerével az inhomogén lineáris differenciálegyenletrendszer egy partikuláris megoldását?