Vektorterek

Több esetben találkozhattunk olyan struktúrával, ahol az összeadás és a (valós) számmal való szorzás értelmezett, pl. a szabadvektorok esetében, vagy a függvények körében, vagy a mátrixok esetében. Ezek közös vizsgálatát teszi lehetővé a vektortér fogalma.

Definíció. *Egy $V \neq \emptyset$ halmazt valós* vektortér*nek nevezünk, ha V-ben értelmezett az összeadás művelete, melyre teljesülnek az alábbi tulajdonságok*

$$\forall\, a, b \in V: \quad a + b = b + a$$

$$\forall\, a, b, c \in V: \quad (a + b) + c = a + (b + c)$$

$$\exists\, 0 \in V: \quad a + 0 = a$$

$$\forall\, a \in V\, \exists (-a) \in V: \;\; a + (-a) = 0$$

továbbá minden $\lambda \in \mathbb{R}$ valós szám esetén értelmezett az ún. λ-val való szorzás, mely $a \in V$-hez $\lambda\, a$-t rendeli, s e hozzárendelés teljesíti az alábbi tulajdonságokat:

$$\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}, a \in V: \;\; (\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$$

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{R},\; a, b \in V: \;\; \lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$$

$$\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}, a \in V: \;\; (\lambda \cdot \mu)a = \lambda(\mu a)$$

$$1 \cdot a = a$$

- Komplex vektortér ugyanígy értelmezhető, ha a fenti definícióban a valós szám fogalmát a komplex szám fogalmára cseréljük.

- A továbbiakban azt a valós vagy komplex számtestet, mely elemeivel szorozhatunk a vektortérben, skalártestként említjük; e szorzást skalárral való szorzásnak szokás nevezni. Számos vizsgálatban lényegtelen, hogy a skalártest a valós vagy a komplex számtest, de némely vizsgálatban fontos lesz. Ilyenkor felhívjuk majd a figyelmet az eltérésre.

- Két valós V_1 és V_2 vektorteret *izomorf*nak mondunk, ha van közöttük olyan $f\colon V_1 \to V_2$ bijekció, amely műveletettartó, azaz
  $f(a+b) = f(a) + f(b)$ és $f(\lambda a) = \lambda f(a)$ teljesül minden $a, b \in V_1$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén. Ilyenkor a két vektortér műveleteik szempontjából azonosnak tekinthető.

Példák. 1) Legyen $n \in \mathbb{N}$ egy rögzített természetes szám. $\mathbb{R}^n$ jelöli a valós (rendezett) szám-n-esek halmazát ($\mathbb{R}$ n-szeres

Descartes szorzata önmagával). $\mathbb{R}^n$-ben az összeadást, s a λ skalárral való szorzást komponensenként értelmezzük:

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

$$\lambda(x_1, \ldots, x_n) := (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$$

Könnyű ellenőrizni, hogy az így értelmezett összeadás és skalárral való szorzás valóban teljesíti a vektorterektől elvárt tulajdonságokat, ami azt jelenti, hogy $\mathbb{R}^n$ valós vektortér a most értelmezett műveletekkel.

Ez a példa azért különösen fontos, mert mint később látni fogjuk, minden n dimenziós valós vektortér izomorf $\mathbb{R}^n$-nel.

Megjegyzendő, hogy a C komplex számtestből kiindulva ugyanígy értelmezhető C^n komplex szám-n-esek komplex vektortere.

2) Tekintsük a (középiskolában megismert) sík vagy tér vektorait. (Szokás szabadvektoroknak nevezni őket, megkülönböztetendő a vektorfogalom általánosabb fogalmától.) Itt két vektor összege összefűzési eljárással vagy a paralelogramma átlójával értelmezhető, a λ skalárral való szorzás pedig λ arányú középpontos hasonlósággal.

3) Tekintsünk most egy tetszőleges nemüres X halmazt, s az összes X-en értelmezett valós függvényt:

$$V = \{f\colon X \to \mathbb{R}\}$$

E függvénytérben az összeadás és a λ-val való szorzás szokásosan értelmezett:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad (x \in X)$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x) \quad (x \in X)$$

Nyilvánvalóan teljesülnek a vektortér-tulajdonságok, tehát a V függvénytér valós vektortér. Ha komplex értékű $f\colon X \to C$ függvényeket tekintünk, ily módon komplex vektortérhez jutunk. Speciális eseteket kapunk, ha X-et konkrétan megválasztjuk. Pl. $X = \mathbb{N}$ esetén adódik, hogy a valós számsorozatok is valós vektorteret alkotnak.

4) Legyen $n \in \mathbb{N}$ rögzített, s tekintsük a legfeljebb n-edfokú polinomok $\mathcal{P}_n$ halmazát. Az összeadás és skalárral való szorzás úgy értelmezett, mint a függvények körében szokásos. Láthatjuk azonban, hogy egy $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ és egy $q(x) = b_n x^n + \ldots + b_1 x + b_0$ polinom összege együtthatókként képződik:

$$(p+q)(x) = (a_n + b_n)x^n + \ldots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

Ebből könnyen adódik, hogy $\mathcal{P}_n$ és R^{n+1} izomorf vektorterek, mivel a

$$p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathcal{P}_n \mapsto (a_n, \ldots, a_1, a_0) \in R^{n+1}$$

leképezés bijekció és műveletttartó (izomorfizmus).

Lineáris függőség

Tekintsük az $a_1, a_2, \ldots, a_k \in V$ vektorrendszert. Ha $b = \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_k a_k$, akkor azt mondjuk, hogy b *lineáris kombináció*ja az $a_1, a_2, \ldots, a_k$ vektoroknak. Ilyenkor azt is mondjuk, hogy b lineárisan van kifejezve a vektorrendszerrel.

Két kérdésre keressük a választ:

1) ha b előállítható az $a_1, a_2, \ldots, a_k$ vektorrendszerrel, milyen esetben egyértelmű ez az előállítás,

2) vajon minden $b \in V$ vektor előállítható-e a megadott $a_1, a_2, \ldots, a_k$ vektorrendszerből.

Egy $a_1, a_2, \ldots, a_k$ legalább 2 tagú vektorrendszert *lineárisan függő*nek mondunk, ha valamely vektora lineáris kombinációja a vektorrendszer többi vektorának. 1 elemű a 'vektorrendszert' linárisan függőnek akkor mondunk, ha $a = 0$. Egy $a_1, a_2, \ldots, a_k$ vektorrendszer *lineárisan független*, ha nem lineárisan függő. Ez azt jelenti legalább 2 tagú vektorrendszer esetében, hogy közülük egyik sem fejezhető ki a többi lineáris kombinációjaként.

- A lineárisan független vektorrendszereket jellemzi azon tulajdonságuk, hogy vektoraiból a zérusvektor csak triviálisan állítható elő, azaz
  $\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_k a_k = 0$ csak úgy lehetséges, ha $\alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_k = 0$. Ugyanis, ha másféleképp is lehetséges, pl. $\alpha_k \neq 0$, akkor $a_k = (-\dfrac{\alpha_1}{\alpha_k})a_1 + \ldots + (-\dfrac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k})a_{k-1}$, azaz a_k lineárisan kifejezhető $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$-el.

- A lineárisan függő vektorrendszereket az jellemzi, hogy tagjaiból a zérusvektor nemcsak triviálisan (csupa 0 együtthatókkal) állítható elő. Valóban, ha $a_k = \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_{k-1} a_{k-1}$, akkor $0 = \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_{k-1} a_{k-1} + (-1) a_k$.

- Ha egy vektorrendszer nem tartalmazza a zérusvektort, akkor pontosan akkor lineárisan függő, ha valamely vektora előáll az *előtte* állók lineáris kombinációjaként. Ugyanis van olyan tag a vektorrendszerben, melyre $a_1, \ldots, a_j$ lineárisan függő, de $a_1, \ldots, a_{j-1}$ még nem, hiszen $a_1 \neq 0$ egyedül nem lineárisan függő. Ilyenkor a_j lineárisan kifejezhető $a_1, \ldots, a_{j-1}$-el.

Állítás. *Egy* $a_1, \ldots, a_k$ *vektorrendszer pontosan akkor lineárisan független, ha a* V *vektortér tetszőlges* $b \in V$ *vektora* *legfeljebb egyféleképpen fejezhető ki lineárisan az $a_1, \ldots, a_k$ vektorrendszer tagjaival.*

Bizonyítás. Ha $b = \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_k a_k = \alpha_1' a_1 + \ldots + \alpha_k' a_k$ teljesül, akkor

$$(\alpha_1 - \alpha_1')a_1 + \ldots + (\alpha_k - \alpha_k')a_k = 0.$$

Ezért $a_1, \ldots, a_k$ lineáris függetlenségéből $(\alpha_1 - \alpha_1') = 0, \ldots, (\alpha_k - \alpha_k') = 0$, s így $\alpha_1 = \alpha_1', \ldots, \alpha_k = \alpha_k'$ következik, tehát a két előállítás azonos. Fordítva, a zérusvektorra alkalmazva a feltételt, adódik $a_1, \ldots, a_k$ lineáris függetlensége. $\square$

Bázis és dimenzió

Egy $a_1, \ldots, a_k$ vektorrendszert *generátorrendszer*nek nevezünk, ha a vektortér bármely b vektora előállítható lineáris kombinációval az $a_1, \ldots, a_k$ vektorokból, azaz $\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ skalárok, hogy $b = \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_k a_k$. Ha egy V vektortérnek van véges tagszámú generátorrendszere, akkor V-t végesen generáltnak, vagy véges dimenziósnak mondjuk.

$a_1, \ldots, a_k$ vektorrendszer *bázis,* ha lineárisan független és generátorrendszer. Ilyenkor bármely $b \in V$ egyértelműen fejezhető ki lineárisan az $a_1, \ldots, a_k$ bázis tagjaival:

$$\forall\ b \in V\ \ \exists!\ \beta_1, \ldots, \beta_k \in \mathbb{R} : b = \beta_1 a_1 + \ldots + \beta_k a_k$$

Az itt fellépő $\beta_1, \ldots, \beta_k$ skalárokat a b vektornak az $a_1, \ldots, a_k$ bázisra vonatkozó *koordinátái*nak nevezzük.

Most megmutatjuk, hogy egy végesen generált vektortérben a bázisok tagszáma egyenlő.

Állítás. *Ha $a_1, \ldots, a_k$ bázis és $b_1, \ldots, b_l$ is bázis V-ben, akkor $k = l$.*

Bizonyítás. Az $a_1, \ldots, a_k$ bázisból hagyjuk el az első vektort. $a_2, \ldots, a_k$ nem bázis, mert a_1 nem fejezhető ki vele. $a_2, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_l$ lineárisan függő generátorrendszer, mert generátorrendszer bővítése. Sorban haladva, egyesével hagyjuk el azokat a b_i vektorokat, amelyek a előtte állóknak lineáris kombinációja. A megmaradó vektorrendszer generátorrendszer és lineárisan független, tehát bázis. Néhány, legalább 1 b_i vektor megmaradt a vektorrendszerben, mert $a_2, \ldots, a_k$ önmagában nem bázis. A következő lépésben a_2-t hagyjuk el, s egészítjük ki az összes $b_1, \ldots, b_l$ vektorokkal, majd elhagyjuk a felesleges b_i-ket, mint előbb. Újra bázishoz jutunk. Folytatva a_3-al, stb. végül a_k-t is elhagyva, olyan bázishoz jutunk k lépésben, mely bizonyos b_i vektorokból áll. Minden lépésben legalább egy b_i vektor bekerült a bázisba, de ugyanaz nem szerepelhet kétszer, ezért $k \leq l$. Felcserélve a két eredeti bázis szerepét $l \leq k$ adódik, tehát $k = l$. □

Definíció. *Végesen generált vektortér bázisainak közös tagszámát a vektortér* dimenzió*jának nevezzük.*

Példa. 1) Tekintsük $\mathbb{R}^n$-ben az $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots,$
$e_n = (0, \ldots, 0, 1)$, vektorokat. Könnyen láhatjuk, hogy $e_1, e_2, \ldots, e_n$ bázis $\mathbb{R}^n$-ben; neve természetes vagy kanonikus bázis. $e_1, e_2, \ldots, e_n$ lineárisan független, mert ha $\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n = (0, 0, \ldots, 0)$, akkor $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (0, 0, \ldots, 0)$,

azaz $\alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_n = 0$. Generátorrendszer, hiszen ha $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges vektor, akkor nyilván $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$. Ez azt is jelenti, hogy $\mathbb{R}^n$-ben egy vektornak a természetes bázisra vonatkozó koordinátái éppen a komponensei.

2) A tér szabadvektorai vektorterének bázisát kaphatjuk úgy, hogy ha tekintünk négy nem komplanáris (nem egysíkú) O, A_1, A_2, A_3 pontot. Ekkor az $\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}, \overrightarrow{OA_3}$ szabadvektorok bázist adnak.

Megjegyzés. Legyen $a_1, \ldots, a_n$ egy rögzített bázisa a n dimenziós V valós vektortérnek. Jelölje $\kappa: V \to \mathbb{R}^n$ az e bázishoz tartozó koordinátaleképezést: $\kappa(b) = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, ha $b = \beta_1a_1 + \ldots + \beta_na_n$. A κ koordinátaleképezés bijektív, hiszen a koordináták egyértelműen meghatározzák a vektort, s minden szám-n-es valamely vektornak koordináta n-ese. κ művelettartó is, hiszen

$$\kappa(b+c) = (\beta_1+\gamma_1,\ldots,\beta_n+\gamma_n) =$$

$$= (\beta_1,\ldots,\beta_n) + (\gamma_1,\ldots,\gamma_n) = \kappa(b)+\kappa(c)$$

$$\kappa(\lambda b) = (\lambda\beta_1,\ldots,\lambda\beta_n) = \lambda(\beta_1,\ldots,\beta_n) = \lambda\kappa(b)$$

Ez azt jelenti, hogy V izomorf $\mathbb{R}^n$-el. Ebből az is adódik, hogy bármely két azonos dimenziójú valós vektortér izomorf egymással.

Altér és rang

A V vektortér egy nemüres L részhalmazát *altér*nek mondjuk, ha a lineáris kombináció képzés nem "vezet ki" L-ből, azaz bármely $a, b \in L$ és $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén $\alpha a + \beta b \in L$. Ilyenkor az L altér is vektortér, hiszen egyrészt a műveleti tulajdonságok öröklődnek L-re,másrészt a zérusvektor $0 \cdot a = 0$ miatt van benne L-ben, a $(-a)$ inverz pedig $-a = (-1)a$ miatt.

Minden vektortérben van két triviális altér, egyik a csak a zérusvektort tartalmazó $L_0 = \{0\}$ zérusaltér, másik $L = V$. Nem triviális példa: 1) A tér szabadvektorai vektorterében egy adott síkkal párhuzamos szabadvektorok alteret alkotnak. 2) $\mathbb{R}^2$-ben pl. $L = \{(x, 0) \,|\, x \in \mathbb{R}\}$ altér. 3) $\mathcal{P}_4$-ben pl. $L = \mathcal{P}_2$ altér.

Definíció. *Egy adott* $a_1, \ldots, a_k$ *vektorrendszer által generált altérnek mondjuk az* $a_1, \ldots, a_k$ *vektorrendszer tagjaiból képezhető összes lineáris kombinációk halmazát:*

$$\mathcal{L}(a_1, \ldots, a_k) = \{\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_k a_k \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}\}$$

Ez nyilvánvalóan altér, sőt a legszűkebb olyan altér, mely tartalmazza az összes $a_1, \ldots, a_k$ vektort. A legszűkebb kifejezés azt jelenti, hogy a generált $\mathcal{L}(a_1, \ldots, a_k)$ altér benne van minden olyan altérben, mely tartalmazza az összes $a_1, \ldots, a_k$ vektort.

Láthatjuk, hogy $a_1, \ldots, a_k$ generátorrendszer az $\mathcal{L}(a_1, \ldots, a_k)$ altérben, de nem mindig bázis, csak ha lineárisan független.

Definíció. *Az* $\mathcal{L}(a_1, \ldots, a_k)$ *generált altér dimenzióját az* $a_1, \ldots, a_k$ *vektorrendszer* rang*jának nevezzük. Jele: rg*$(a_1, \ldots, a_k)$*.*

Általában $\mathrm{rg}(a_1, \ldots, a_k) \le k$, egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $a_1, \ldots, a_k$ lineárisan független. Ha $a_1, \ldots, a_k$ lineárisan függő, sorban elhagyhatjuk belőle az olyan vektorokat, melyek lineárisan kifejezhetők a megmaradókkal. Így végül olyan részrendszerhez jutunk, mely lineárisan független és generátorrendszer, tehát bázis $\mathcal{L}(a_1, \ldots, a_k)$-ban.

Állítás. *Az* $a_1, \ldots, a_k$ *vektorrendszer rangja megegyezik maximális lineárisan független részrendszerének tagszámával.*

Bizonyítás. Ha pl. $a_1, \ldots, a_r$ maximális lineárisan független részrendszere az $a_1, \ldots, a_k$ vektorrendszernek, akkor bázis

$\mathcal{L}(a_1, \dots, a_k)$-ban. Ugyanis, bármely $a_j, j \geq r+1$ esetén $a_1, \dots, a_r, a_j$ lineárisan függő, s így $a_j = \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_r a_r$. Mivel bármely $b \in \mathcal{L}(a_1, \dots, a_k)$ kifejezhető lineárisan $a_1, \dots, a_k$-val, ezért $a_1, \dots, a_r$-rel is. Tehát $\mathrm{rg}(a_1, \dots, a_k) = r$. □

Állítás. *Egy $a_1, \dots, a_k$ vektorrendszer rangja nem változik, ha*

— *megváltoztatjuk a vektorok sorrendjét,*

— *valamely tagját $\lambda \neq 0$ skalárral szorozzuk,*

— *valamely vektorához egy másik vektorát hozzáadjuk.*

Bizonyítás. Többet látunk be: a generált altér sem változik. A harmadik esetben pl. $\mathcal{L}(a_1 + a_2, a_2, \dots, a_k) = \mathcal{L}(a_1, a_2, \dots, a_k)$, mert $a_1 + a_2, a_2, \dots, a_k \in \mathcal{L}(a_1, a_2, \dots, a_k)$ miatt a generált altér fogalmának minimum tulajdonsága szerint $\mathcal{L}(a_1+a_2,a_2,\ldots,a_k)\subset\mathcal{L}(a_1,a_2,\ldots,a_k)$, s hasonlóan $a_1=(a_1+a_2)-a_2,a_2,\ldots,a_k\in\mathcal{L}(a_1+a_2,a_2,\ldots,a_k)$ miatt, $\mathcal{L}(a_1+a_2,a_2,\ldots,a_k)\subset\mathcal{L}(a_1,a_2,\ldots,a_k)$. $\square$

Ez utóbbi állítás — mely leírja a rangmegtartó átalakításokat — hatékonyan alkalmazható konkrét vektorterekben adott vektorrendszerek rangjának meghatározására.