Többváltozós függvények differenciálhatósága

Az egyváltozós függvények differenciálhatóságát a $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ függvényhatárértékkel definiáltuk, s szemléletes jelentése abban mutatkozott meg, hogy a függvényt legjobban közelítő egyenes iránytangense éppen a differenciálhányados értéke. A legjobb közelítés itt most azt jelentette, hogy a lineáris függvénynek (az egyenesnek) az eltérése a függvénytől (a függvény görbéjétől) oly annyira kicsi, hogy még $x - x_0$-al osztva is nullához tart. A többváltozós függvények esetében is ilyen, legjobban közelítő, lineáris függvénnyel akarjuk közelíteni a függvényt. A lineáris függvények $\mathbb{R}^n$-en (a, x) alakban adhatók meg.

Definíció. *Legyen* $f\colon D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ *és* $x_0\in D$. *Az* f *függvényt* x_0*-ban* differenciálható*nak mondjuk, ha van olyan* $a\in\mathbb{R}^n$*, hogy*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-(a,x-x_0)}{\|x-x_0\|}=0.$$

Iyenkor a*-t* f x_0*-beli differenciálhányadosának vagy deriváltjának modjuk és* $Df(x_0)$*-al jelöljük.*

Megjegyzés. A differenciálhatóság szemléletesen azt jelenti pl. kétváltozós függvény esetében, hogy a $z=f(x,y)$ felülethez érintősík illeszthető az $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ pontjában. Ez a sík a $z=a_1x+a_2y+f(x_0,y_0)$ egyenletű sík, ahol $(a_1,a_2)=Df(x_0,y_0)$ a deriváltvektor koordinátái.

Definíció. *Az* $f\colon D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ *függvény* i*-dik* parciális differenciálhányados*sal rendelkezik* $x_0\in\mathbb{R}^n$*-ban, ha a*

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+te_i)-f(x_0)}{t}$$

határérték létezik, ahol $e_1, \ldots, e_n$ $\mathbb{R}^n$ *természetes bázisa. Ezt a határértéket* $\partial_i f(x_0)$*-al jelöljük, és* x_0*-beli* i*-dik parciális differenciálhányadosnak, vagy parciális deriváltnak nevezzük.*

Ha minden $i = 1, \ldots, n$ esetén létezik a függvény x_0-beli parciális differenciálhányadosa, akkor f-et x_0-ban parciálisan differenciálhatónak mondjuk. Más szokásos jelölések: $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_0),\ D_i f(x_0)$.

- A definíció alapján látható, hogy a parciális differenciálhányados értelmezésében az f függvénynek csak az $x_0 + te_i$ egyenes mentén felvett értékei számítanak. Ilyenkor az $f_i(t) = f(x_0 + te_i)$ egyváltozós függvényt képezzük, s ennek $t = 0$-beli deriváltja adja f x_0-beli parciális differenciálhányadosát.

- Szemlétesen adódik a parciális differenciálhányados jelentése: kétváltozós $f(x, y)$ függvény esetében az (x_0, y_0)-on átmenő x tengellyel (e_1-el) párhuzamos és függőleges (z tengellyel párhuzamos) síkkal metszve a $z = f(x, y)$ felületet, egy görbét kapunk, mely érintőjének iránytangense (az x tengellyel bezárt szögének tangense) adja az x szerinti (azaz első) parciális differenciálhányadost.

A függvény differenciálhatóságát, szembeállítva a parciális differenciálhatósággal, szokták totális differenciálhatóságnak is nevezni. Ugyanis, e két fogalom szoros kapcsolatban áll, de nem azonos. A totális differenciálhatóságból következik a parciális, de fordítva csak akkor, ha a parciális deriváltfüggvények folytonosak is.

Állítás. *Ha az* $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *függvény* x_0*-ban differenciálható, akkor létezik minden* $i = 1, \ldots, n$ *esetén a* $\partial_i f(x_0)$ x_0*-beli parciális differenciálhányados is, és*

$$Df(x_0) = (\partial_1 f(x_0), \ldots, \partial_n f(x_0)).$$

Bizonyítás.

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+te_i)-f(x_0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+te_i)-f(x_0)-(Df(x_0),te_i)}{t} + (Df(x_0),e_i) =$$

$$= \lim_{x_0+te_i \to x_0} \frac{f(x_0+te_i)-f(x_0)-(Df(x_0),te_i)}{\|te_i\|} + (Df(x_0),e_i) = (Df(x_0),e_i)$$

$\square$

Állítás. *Ha* $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *függvény* $x_0 \in D$ *egy környezetében parciálisan differenciálható és a parciális deriváltfüggvények* x_0*-ban folytonosak, akkor* f x_0*-ban totálisan is differenciálható.*

Bizonyítás. Kétváltozós függvény esetében írjuk le a bizonyítást.

Legyen $(x_0, y_0) \in D \subset \mathbb{R}^2$. Megmutatjuk, hogy $Df(x_0, y_0) = (\partial_1 f(x_0, y_0), \partial_2 f(x_0, y_0))$. Ugyanis az abszolútérték tulajdonságai, s $|h| \leq \|(h,k)\|$, $|k| \leq \|(h,k)\|$ alapján a Lagrange tétel kétszeri alkalmazásával:

$$\frac{|f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - \partial_1 f(x_0, y_0)h - \partial_2 f(x_0, y_0)k|}{\|(h,k)\|} \leq$$

$$\leq \frac{|f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0+k) - \partial_1 f(x_0, y_0)h|}{|h|} +$$

$$+ \frac{|f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0) - \partial_2 f(x_0, y_0)k|}{|k|} =$$

$$= |\partial_1 f(x_0+h', y_0) - \partial_1 f(x_0, y_0)| + |\partial_2 f(x_0, y_0+k') - \partial_2 f(x_0, y_0)|$$

A parciális deriváltak folytonosságából adódik állításunk. $\square$

Magasabb rendű parciális deriváltak

Amennyiben $x_0 \in \mathbb{R}^n$ egy környezetében mindenütt értelmezett valamely parciális derivált, akkor mint e környezeten értelmezett n-változós függvényt parciálisan újra differenciálhatjuk. Ekkor kapjuk a másodrendű parciális differenciálhányadosokat. Jelölése: $\partial_{11} f$ jelenti a $\partial_1 f$ függvénynek az első, x_1 szerinti parciális deriváltját, $\partial_{12} f$ jelentése: a $\partial_1 f$ függvénynek a második, x_2 szerinti parciális deriváltja. Továbbhaladva, még magasabb rendű (többszörös) parciális deriváltak is értelmezhetők. Pl. $\partial_{213} f$ harmadrendű parciális derivált, sorrendben a második, majd első, majd harmadik változó szerint. A magasabb rendű deriváltak képzésében a változók sorrendje nem számít:

Állítás. *Ha az $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény $x_0 \in D$ egy környezetében kétszer parciálisan differenciálható és a* *másodrendű parciális deriváltfüggvények* x_0*-ban folytonosak, akkor a másodrendű vegyes parciális deriváltak* x_0*-ban megegyeznek. Pl.* $\partial_{12} f(x_0) = \partial_{21} f(x_0)$*.*

A bizonyítást mellőzzük.

Kétváltozós függvények szélsőértéke

Definíció. *Az* $f\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *kétváltozós függvénynek helyi szélsőértéke van* (x_0, y_0)*-ban, ha van* (x_0, y_0)*-nak olyan* $G((x_0, y_0), \varepsilon)$ *nyílt környezete, hogy bármely* $(x, y) \in D \cap G((x_0, y_0), \varepsilon)$*-ra* $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ *(helyi maximum) vagy bármely* $(x, y) \in D \cap G((x_0, y_0), \varepsilon)$*-ra* $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ *(helyi minimum) .*

Állítás. *Ha f-nek helyi szélsőértéke van (x_0, y_0)-ban és parciálisan deriválható (x_0, y_0)-ban, akkor a parciális deriváltak ott eltűnnek:*

$$\partial_1 f(x_0, y_0) = 0 \quad \textit{és} \quad \partial_2 f(x_0, y_0) = 0.$$

Ez nyilvánvalóan következik abból, hogy az $f_1(t) = f((x_0, y_0)+te_1)$ illetve az $f_2(t) = f((x_0, y_0)+te_2)$ függvénynek szélsőértéke van $t = 0$-ban.

A most mondott feltétel — hasonlóan az egyváltozós függvények esetéhez — szükséges, de nem elegendő feltétel. Ugyanis, pl. az $f(x, y) = xy$ függvénynek $(0, 0)$-ban nincs szélsőértéke, noha $\partial_1 f(0, 0) = 0$, $\partial_2 f(0, 0) = 0$.

Egy elégséges feltétel megfogalmazásához használjuk a másodrendű parciális deriváltakkal képzett kétváltozós $\mathbb{R}^2$-ön értelmezett $Q(h,k) = \partial_{11}f(x_0,y_0)h^2 + 2\partial_{12}f(x_0,y_0)hk + \partial_{22}f(x_0,y_0)k^2$ kvadratikus formát.

Állítás. *Ha az* $f\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *kétváltozós függvény értelmezési tartományának egy belső* $(x_0,y_0) \in D$ *pontjában a másodrendű parciális deriváltak folytonosak, az elsőrendű parciális deriváltak értéke nulla:* $\partial_1 f(x_0,y_0) = 0$ *és* $\partial_2 f(x_0,y_0) = 0$*, és a* $Q(h,k)$ *kvadratikus forma pozitív definit, akkor az* f *függvénynek* (x_0,y_0)*-ban helyi minimuma van.*

Bizonyítás. Legyen $\varphi(t) = f(x_0+th, y_0+tk)$, $0 \le t \le 1$. Alkalmazzuk φ-re 0-ban a Taylor polinommal való közelítést. Ekkor a maradéktag előállítása alapján:

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{1}{2}\varphi''(t)$$

valamely $0 \leq t \leq 1$-re. Figyeljük meg először, hogy

$$\varphi'(t) = \partial_1 f(x_0 + th, y_0 + tk)h + \partial_2 f(x_0 + th, y_0 + tk)k$$

(Ezt az előző bizonyításhoz hasonlóan lehetne igazolni.) Ebből adódóan

$$\varphi''(t) = \partial_{11} f(x_0+th, y_0+tk)h^2+2\partial_{12} f(x_0+th, y_0+tk)hk+\partial_{22} f(x_0+th, y_0+tk)k^2$$

A feltétel miatt most $\varphi'(0) = 0$, s így

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) =$$

$$= \frac{1}{2}(\partial_{11} f(x_0+th, y_0+tk)h^2+2\partial_{12} f(x_0+th, y_0+tk)hk+\partial_{22} f(x_0+th, y_0+tk)k^2)$$

Mivel $Q(h, k) > 0$ $(h, k) \neq 0$ esetén, a másodrendű parciális deriváltak folytonossága miatt

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) > 0.$$

(x_0, y_0)-nak egy (elegendően kis) környezetében. $\square$

- Ha a tételben a Q kvadratikus forma negatív definit, akkor a további feltételek teljesülése esetén f-nek (x_0, y_0)-ban helyi maximuma van.

- Egy kétváltozós $Q(h,k) = a_{11}h^2 + 2a_{12}hk + a_{22}k^2$ kvadratikus forma pozitív (negatív) definitsége — könnyen igazolhatóan — eldönthető a_{11} és $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ előjele alapján: Q pontosan akkor pozitív (negatív) definit, ha $a_{11} > 0$ ($a_{11} < 0$) és $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$.

- Belátható az is, hogy ha Q indefinit, azaz mind pozítív, mind negatív értékeket felvesz, akkor f-nek nincs helyi szélsőértéke (x_0, y_0)-ban.

- Ha Q-ra nem teljesülnek a fenti feltételek egyike sem, attól még f-nek lehet ott helyi szélsőértéke. Ilyenkor további vizsgálat szükséges.

Példa. Az $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$ függvény esetében $\partial_1 f(0,0) = 0$ és $\partial_2 f(0,0) = 0$ teljesül, továbbá $\partial_{11} f(0,0) = 2$, $\partial_{12} f(0,0) = 1$, $\partial_{22} f(0,0) = 2$, ezért $\partial_{11} f(0,0)\partial_{22} f(0,0) - (\partial_{12} f(0,0))^2 > 0$ és $\partial_{11} f(0,0) > 0$ miatt f-nek $(0,0)$-ban helyi minimuma van.

Feltételes szélsőérték-számítás

Amennyiben egy két-, vagy többváltozós függvény szélsőértékeit keressük azzal a megszorítással, hogy a változók között egy, vagy több összefüggést feltételezünk, akkor feltételes szélsőérték-számításról beszélünk.

A legegyszerűbb esetben $f(x, y)$ kétváltozós függvény, s egyetlen feltétel van: $g(x, y) = 0$, melyet a változóknak teljesíteniük kell. Az $f(x, y)$ függvényt tulajdonképpen csak azon (x, y) változópárokra tekintjük, amelyek megengedettek, azaz teljesítik a $g(x, y) = 0$ feltételt.

Általánosabban, azaz három-, vagy még többváltozós függvény esetében lehet akár egy, akár több – de kevesebb, mint a változók száma – korlátozó feltétel a változókra. A Lagrange-féle multiplikátoros eljárás olyan módszert ad, amely segíthet a szélsőértékhelyek megkeresésében.

A) Kétváltozós függvény feltételes szélsőértéke egy feltétel mellett

Legyenek adottak az $f, g\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kétváltozós függvények. Jelölje S a feltételi halmazt:

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, g(x, y) = 0\,\}.$$

Az $f_{|S}$ S-re megszorított függvény helyi szélsőértékhelyeit nevezzük az $f(x, y)$ függvény $g(x, y) = 0$ feltétel melletti feltételes szélsőértékhelyeinek. Pontosabban, $(x_0, y_0) \in D$ helyi feltételes minimumhelye f-nek, ha (x_0, y_0)-nak létezik olyan $\delta > 0$ sugarú környezete, hogy minden $(x, y) \in G(x_0, y_0) \cap S$ esetén $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$. Maximumhely esetén az utolsó egyenlőtlenség fordítva szerepel.

A Lagrange multiplikátoros eljárás alapja a következő tétel, mely — ugyan csak szükséges feltételeket ad a helyi szélsőérték létezésére, — a gyakorlati problémákban azonban jól alkalmazható.

Állítás. *Ha $f, g\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ parciálisan differenciálható függvények, és f-nek (x_0, y_0)-ban feltételes szélsőértéke van a $g(x, y) = 0$ feltétel mellett, továbbá $Dg(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, akkor van olyan $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, hogy az*

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

függvénynek (x_0, y_0, λ_0) stacionárius helye, azaz L mindegyik (x_0, y_0, λ_0)-beli parciális deriváltja nulla.

A tételben szereplő L függvényt Lagrange függvénynek, λ-t pedig multiplikátornak szokták nevezni.

Bizonyítás. A bizonyításban kihasználjuk a kétváltozós függvényekből képzett összetett függvények derivációs, n. láncszabályát.

Eszerint, ha $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, és $\varphi_1, \varphi_2: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ típus függvények, akkor az

$$F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad F(x) = f(\varphi_1(x), \varphi_2(x))$$

összetett függvény deriváltját a következőképpen kapjuk:

$$F'(x) = \partial_1 f(x, \varphi(x))\varphi_1' + \partial_2 f(x, \varphi(x))\varphi_2'(x),$$

ahol most $\partial_1 f$, illetve $\partial_2 f$ az f függvény parciális deriváltjait jelöli.

Esetünkben a $g(x, y) = 0$ implicit egyenletből a tétel feltételei miatt kifejezhető az egyik változó, mondjuk y excplit $y = \varphi(x)$ alakban, legalábbis x_0 egy környezetében. Ekkor természetesen $g(x, \varphi(x)) = 0$, s így ezt deriválva x_0-ban

$$\partial_1 g(x_0, y_0) + \partial_2 g(x_0, y_0)\varphi'(x_0) = 0$$

adódik. Másrészt, a $g(x,y)=0$ görbe mentén tekintve csupán f-et, az $F(x)=f(x,\varphi(x))$ függvénynek helyi szélsőértéke van x_0-ban. Ezért $F'(x_0)=0$, s így

$$\partial_1 f(x_0,y_0)+\partial_2 f(x_0,y_0)\varphi'(x_0)=0.$$

A fenti két egyenletből

$$\varphi'(x_0)=-\frac{\partial_1 g(x_0,y_0)}{\partial_2 g(x_0,y_0)} \quad \text{és} \quad \varphi'(x_0)=-\frac{\partial_1 f(x_0,y_0)}{\partial_2 f(x_0,y_0)}$$

adódik. Ezeket egyenlővé téve, átrendezve kapjuk, hogy

$$\frac{\partial_1 f(x_0,y_0)}{\partial_1 g(x_0,y_0)}=\frac{\partial_2 f(x_0,y_0)}{\partial_2 g(x_0,y_0)}.$$

Ezt a közös értéket $-\lambda_0$-lal jelölve,

$$\partial_1 f(x_0,y_0)+\lambda_0\partial_1 g(x_0,y_0)=0$$

$$\partial_2 f(x_0,y_0)+\lambda_0\partial_2 g(x_0,y_0)=0$$

adódik, mely ekvivalens a

$$\partial_1 L(x_0, y_0, \lambda_0) = 0$$

$$\partial_2 L(x_0, y_0, \lambda_0) = 0$$

feltételrendszerrel. L harmadik parciális deriváltjára automatikusan teljesül

$$\partial_3 L(x_0, y_0, \lambda_0) = 0,$$

ugyanis az tulajdonképpen a feltételi egyenlet: $g(x_0, y_0) = 0$.

$\square$

A módszert gy alkalmazzuk, hogy képezzük az

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

Lagrange függvényt, és keressük ennek stacionárius helyeit. Ehhez megoldjuk a 3 ismeretlenes 3 egyenletből álló egyenletrendszert:

$$\partial_1 f(x,y) + \lambda \partial_1 g(x,y) = 0$$

$$\partial_2 f(x,y) + \lambda \partial_2 g(x,y) = 0$$

$$g(x_0, y_0) = 0.$$

A kapott megoldások lehetnek csak szélsőértékhelyek. Legtöbbször a feladat sajátosságából adódik, hogy valóban azok és milyen minőségűek (maximum vagy minimum).

Példa. Legyen a célfüggvény $f(x,y) = 2\ln x + 3\ln y$ alak, s feltételi egyenlet pedig $4x + 5y = p$, ahol p egy valós (pozitív) paramétert jelent.

f teljes értelmezési tartománya $D = \{(x, y) \,|\, x > 0, y > 0\}$. A feltételi egyenlet most egy egyenest jelent, de a D-re vonatkozó korlátok miatt annak csak egy (nyílt) szakaszát. A Lagrange függvény alakja:

$$L(x, y, \lambda) = 2\ln x + 3\ln y + \lambda(4x + 5y - p).$$

Kiszámítjuk L parciális deriváltjait:

$$\begin{aligned} \partial_x L(x, y, \lambda) &= \quad \tfrac{2}{x} + 4\lambda \\ \partial_y L(x, y, \lambda) &= \quad \tfrac{3}{y} + 5\lambda \\ \partial_\lambda L(x, y, \lambda) &= 4x + 5y - p. \end{aligned}$$

Tehát a megoldandó egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} \frac{2}{x} + 4\lambda &= 0 \\ \frac{3}{x} + 5\lambda &= 0 \\ 4x + 5y - p &= 0. \end{aligned}$$

A megoldás: $x = \frac{p}{10}$, $y = \frac{3p}{25}$, $\lambda = -\frac{5}{p}$. A talált (x, y) számpárban nyilván maximum van, hiszen a célfüggvény alulról nem korlátos.

B) Többváltozós függvény feltételes szélsőértéke több feltétel mellett

n változós $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ célfüggvény esetén több korlátozó feltétel is lehet. A feltételek száma azonban nem haladhatja meg f változóinak számát. A feltételi halmazt (másszóval, megengedett tartományt) k darab ($k < n$) egyenlet adja meg:

$$S = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \,|\, g_1(\underline{x}) = 0, \ldots, g_k(\underline{x}) = 0\}.$$

A feltételes szélsőérték keresése most is az $f_{|S}$ S-re megszorított függvény szélsőértékeinek keresését jelenti. A következő tétel a feltételes szélsőérték létezésének egy szükséges feltételét adja meg.

Állítás. *Ha* $f, g_1, g_2, \ldots, g_k \colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *parciálisan differenciálható függvények, és* f*-nek* $\underline{x}_0$*-ban feltételes szélsőértéke van a* $g_1(\underline{x}) = 0, \ldots, g_k(\underline{x}) = 0$ *feltételek mellett (*$k < n$*), továbbá* $Dg_1(\underline{x}_0), \ldots, Dg_k(\underline{x}_0)$ *lineárisan függetlenek, akkor van olyan* $\lambda_0^1, \ldots, \lambda_0^k \in \mathbb{R}$*, hogy az*

$$L(\underline{x}, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) = f(\underline{x}) + \lambda_1 g_1(\underline{x}) + \ldots + \lambda_k g_k(\underline{x})$$

függvénynek $(\underline{x}_0, \lambda_0^1, \ldots, \lambda_0^k)$ *stacionárius helye, azaz ott* L *mindegyik parciális deriváltja nulla.*

A tételben szereplő L függvényt Lagrange függvénynek, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$-kat pedig multiplikátoroknak szokták nevezni.

A tétel bizonyítását mellőzzük. A szélsőértékhelyek kereséséhez ilyenkor a Lagrange függvény parciális deriváltját képezzük először az n darab $x_1, x_2, \ldots, x_n$ változó szerint, majd a k darab $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ segédváltozó szerint. Az utóbbiak most is a $g_1, \ldots, g_k$ függvények lesznek. Tehát a megoldandó egyenletrendszer alakja:

$$\begin{aligned}
\partial_1 f(x_1, \ldots, x_n) + \lambda_1 \partial_1 g_1(x_1, \ldots, x_n) + \ldots + \lambda_k \partial_1 g_k(x_1, \ldots, x_n) &= 0 \\
&\vdots \\
\partial_n f(x_1, \ldots, x_n) + \lambda_1 \partial_n g_1(x_1, \ldots, x_n) + \ldots + \lambda_k \partial_n g_k(x_1, \ldots, x_n) &= 0 \\
g_1(x_1, \ldots, x_n) &= 0 \\
&\vdots \\
g_k(x_1, \ldots, x_n) &= 0.
\end{aligned}$$

Alkalmazásképpen bemutatjuk a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség egyik bizonyítási lehetőségét.

A célfüggvény: $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$, ahol $x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$.

Egy feltétel adott: $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a$, ahol $a \in \mathbb{R}$ rögzített pozitív szám.

A Lagrange függvény:

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} + \lambda(x_1 + x_2 + \ldots + x_n - a).$$

Ennek x_i szerinti parciális deriváltja:

$$\frac{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}}{n x_i} + \lambda = 0$$

minden $i = 1, 2, \ldots, n$-re. Emiatt $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ következik. A feltétel miatt $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \frac{a}{n}$. Ezen a helyen csak maximum lehet, hiszen nemnegatívak a változók, tehát a minimumérték nulla. Ebből adódóan minden más (a feltételt teljesítő $x_1, x_2, \ldots, x_n$ esetén

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq f(\frac{a}{n}, \frac{a}{n}, \ldots, \frac{a}{n}) = \frac{a}{n},$$

azaz $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a$ miatt

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$