1. Szabadvektorok és analitikus geometria

Ebben a fejezetben megismerkedünk a szabadvektorok fogalmával, amely a középiskolai vektorfogalom pontosítása. Előzetes ismeretként feltételezzük az euklideszi geometria alapvető fogalmait és összefüggéseit, mint pl. pont, egyenes, sík, párhuzamossság, merőlegesség, szög, stb. A geometriai térből kiindulva értelmezzük a szabadvektor fogalmát, a velük végezhető műveleteket és azok összefüggéseit, majd végül ezeket alkalmazzuk a térbeli egyenesek és síkok leírására.

1.1. A szabadvektor fogalma

Jelölje $\mathcal{E}$ az euklideszi geometriai teret. Ennek pontjait $P, Q, \ldots, A, B, \ldots$ betűkkel jelöljük. Az egyeneseket általában $e, f, g, \ldots$ betűkkel, míg a síkokat S_1, S_2, stb. betűkkel jelöljük.

Az $\mathcal{E}$ tér pontjaiból képzett rendezett párokat, az $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ Descartes szorzat elemeit **irányított szakasz**nak mondjuk. Az (A, B) és (C, D) irányított szakaszt **ekvivalens**nek nevezzük, ha van a térnek olyan $p \colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ párhuzamos eltolása, amelyre $p(A) = C$ és $p(B) = D$ teljesül, azaz a p párhuzamos eltolás az első irányított szakasz kezdő-, illetve végpontját a másik kezdő-, illetve végpontjába viszi át. Most megmutatjuk, hogy ez a reláció ekvivalenciareláció. A reflexivitás nyilvánvaló, ugyanis bármely (A, B) irányított szakaszt az identikus transzformáció, azaz a nullvektorral történő eltolás önmagába viszi át. A reláció szimmetriája abból következik, hogy ha egy p eltolás (A, B)-t (C, D)-be viszi át, akkor az ellentett $-p$ eltolás (C, D)-t az (A, B)-be. A tranzitivitáshoz elegendő azt látni, hogy eltolások kompozíciója újra eltolás, vagyis ha p_1 az (A, B)-t (C, D)-be viszi át, p_2 pedig (C, D)-t az (E, F)-be, akkor $p_2 \circ p_1$ is eltolás lesz és (A, B)-t (E, F)-be viszi át. Tekintsük most ezen ekvivalenciarelációhoz tartozó osztályokat.

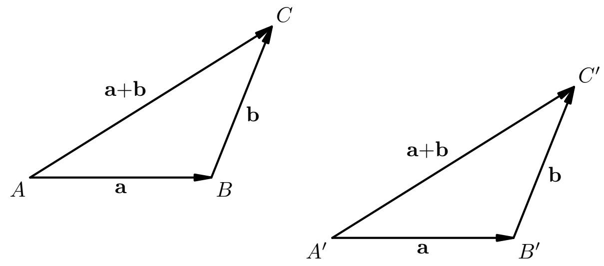
Definíció. *Az euklideszi tér irányított szakaszainak halmazán most bevezetett ekvivalenciareláció osztályait* **szabadvektorok***nak nevezzük. Egy szabadvektort félkövér kis betűvel jelölünk, pl.* $\mathbf{a}$. *Az összes szabadvektor halmazát* $V(\mathcal{E})$*-vel jelöljük.*

A tekintett reláció alapján világos, hogy egy osztályba olyan irányított szakaszok tartoznak, amelyek mind egymásból párhuzamos eltolással megkaphatók. Egy osztály, azaz egy szabadvektor egy elemét a **szabadvektor reprezentánsá**nak mondjuk, és ezt az összefüggést az $(A, B) \in \mathbf{a}$ jelöléssel illetjük. Világos, hogy egy szabadvektornak a tér tetszőleges pontjából indul reprezentánsa, s hogy egy szabadvektor már egy reprezentáns megadásával is egyértelműen meghatározott. Az (A, B) irányított szakasz által meghatározott szabadvektort gyakran $\overrightarrow{AB}$-vel is jelöljük.

1.2. A szabadvektorok összeadása és skalárral szorzása

Definíció. *Az* $\mathbf{a}$ *és* $\mathbf{b}$ *szabadvektorok összegén azt az* $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ *szabadvektort értjük, amelynek egy* (A, C) *reprezentánsához található olyan* $B \in \mathcal{E}$ *pont, hogy* $(A, B) \in \mathbf{a}$

és $(B, C) \in \mathbf{b}$ *teljesül.*



Figyeljük meg, hogy az összeg nem függ a reprezentánsok megválasztásától. Ugyanis, ha másik (A', C') reprezentánsból indulunk ki, akkor B' az $\mathbf{a}$ szabadvektor A'-ből induló reprezentánsának végpontja lesz, és (B', C') éppen $\mathbf{b}$-t reprezentálja.

Az összegvektor fenti meghatározását **összefűzési eljárás**nak is mondják. Ezzel ekvivalens az ún. paralelogramma módszer, amikoris az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ szabadvektokroknak közös kezdőpontból, mondjuk O-ból tekintjük (O, A), illetve (O, B) reprezentánsait, s az OAB pontok által meghatározott paralelogramma negyedik csúcsát C-vel jelölve, az (A, C) átló lesz az összegvektor reprezentánsa.

TÉTEL. *A szabadvektorok összeadása rendelkezik a következő tulajdonságokkal:*

1. $\forall\ \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V(\mathcal{E}):\ \ \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}.$ *(kommutativitás)*
2. $\forall\ \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V(\mathcal{E}):\ \ (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}).$ *(asszociativitás)*
3. $\exists\ \mathbf{0} \in V(\mathcal{E}):\ \forall \mathbf{a} \in V(\mathcal{E}):\ \mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}.$ *(nullvektor létezése)*
4. $\forall\ \mathbf{a} \in V(\mathcal{E})\ \ \exists!\ (-\mathbf{a}) \in V(\mathcal{E}):\ \ \mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}.$ *(inverz elem létezése)*

Bizonyítás. 1. A kommutativitás a paralelogramma módszer alapján nyilvánvaló.

2. Az asszociativitás igazolásához tekintsük a következő reprezentánsokat: $(O, A) \in \mathbf{a}, (A, B) \in \mathbf{b}, (B, C) \in \mathbf{c}$. Ekkor $(O, B) \in \mathbf{a} + \mathbf{b}$ és $(A, C) \in \mathbf{b} + \mathbf{c}$. Emiatt (O, C) az igazolandó állítás mindkét oldalán lévő szabadvektort reprezentálja, ezért azok egyenlők.

3. A nullvektort nyilvánvalóan az (A, A) típusú irányított szakaszok reprezentálják, s ez teljesíti a kívánalmakat.

4. Ha $(A, B) \in \mathbf{a}$, akkor $-\mathbf{a}$-val jelölve azt a szabadvektort, amelyet (B, A) reprezentál, az elvárt reláció teljesül. □

A következőkben a valós számokat skalárként említjük. Ismertnek feltételezzük, hogy tetszőleges pozitív λ skalár (valós szám) és bármely O pont esetén van egy O középpontú λ arányú középpontos hasonlóság.

Definíció. *Legyen $\lambda \in \mathbb{R}$ és $\mathbf{a} \in V(\mathcal{E})$.*

Ha λ pozitív skalár, tekintsük $\mathbf{a}$-nak egy (O, A) reprezentánsát, és alkalmazzuk az O középpontú λ arányú hasonlóságot. A' jelölje A képét. $\lambda\mathbf{a}$ azt a szabadvektort jelenti, amelyet (O, A') reprezentál.

Ha λ negatív, akkor $|\lambda|$ arányú középpontos hasonlóságot alkalmazunk, és O-ra tükrözünk, így kapjuk az A' pontot.

Ha $\lambda = 0$, akkor definíció szerint $\lambda\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

Tétel. *A szabadvektorok skalárral való szorzása rendelkezik a következő tulajdonságokkal:*

1. $\forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \mathbf{b} \in V(\mathcal{E}):\ \ (\lambda\mu)\mathbf{a} = \lambda(\mu\mathbf{a}).$ *(asszociativitás)*

2. $\forall\ \lambda \in \mathbb{R},\ \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V(\mathcal{E}):\ \ \lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}.$ *(disztributivitás)*

3. $\lambda, \mu \in \mathbb{R}\ \mathbf{a} \in V(\mathcal{E}):\ \ (\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}.$ *(disztributivitás)*

4. $\forall\ \mathbf{a} \in V(\mathcal{E}):\ \ 1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}.$

Bizonyítás. Az első összefüggés a középpontos hasonlóságok azon tulajdonságából következik, hogy két azonos középpontú hasonlóság kompozíciójakor a hasonlóságok aránya összeszorzódik.

A második részállítás abból adódik, hogy a középpontos hasonlóság paralelogrammát paralelogrammába képez.

A harmadikhoz esetszétválasztást végzünk. Ha λ és μ azonos előjelűek, mondjuk pozitívak, akkor tekintsük az $(O, A) \in \mathbf{a}$ reprezentánst. Reprezentálja (O, A_λ) a $\lambda\mathbf{a}$ szabadvektort, illetve (O, A_μ) a $\mu\mathbf{a}$ szabadvektort, végül $(O, A_{\lambda+\mu})$ a $(\lambda + \mu)\mathbf{a}$ szabadvektort. Nyilvánvalóan $|OA_{\lambda+\mu}| = |OA_\lambda| + |OA_\mu|$, s ezért $|A_\lambda A_{\lambda+\mu}| = |OA_\mu|$, ami állításunkat jelenti.

Különböző előjelű skalárok esetén legyen pl. $\lambda > 0, \mu < 0$, és $\lambda > |\mu|$. Ekkor $|OA_{\lambda+\mu}| = |OA_\lambda| - |OA_\mu|$, azaz megintcsak $|A_\lambda A_{\lambda+\mu}| = |OA_\mu|$, s ez állításunkat adja. □

Amennyiben véges sok vektorból kiindulva, az eddig megismert összeadást és skalárral való szorzást felhasználva újabb vektort állítunk elő, akkor azt mondjuk, hogy **lineáris kombinációt** képeztünk. Pl. az $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ szabadvektorok egy lineáris kombinációja az $\alpha_1\mathbf{a}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{a}_k$ vektor.

Megjegyzés. Ha egy halmazban definiálva van egy összeadásnak nevezett, s az első állításban felsorolt tulajdonságokkal rendelkező művelet, továbbá egy skalárokkal való szorzás, amely a második állításban felsorolt 4 tulajdonsággal rendelkezik, akkor azt mondjuk, hogy egy (absztrakt) vektortér struktúra van megadva. Az ilyen struktúrákat később részletesen fogjuk vizsgálni, s majd akkor úgy fogalmazhatunk, hogy a szabadvektorok halmaza egy valós vektorteret alkot.

1.3. Lineáris függőség a szabadvektorok körében

A lineáris függőséget és függetlenséget most geometrialag értelmezzük, majd megadjuk algebrai jellemzésüket is. Végül megmutatjuk, hogy a szabadvektorok körében 4 vektor már mindig lineárisan függő, s ez vezet a bázis, illetve a koordináták fogalmának bevezetéséhez.

Definíció. *Egy vektort* **lineárisan függő***nek mondunk, ha az a nullvektor.*

Két vektort **lineárisan függő***nek akkor nevezünk, ha egy egyenessel párhuzamosak, azaz kollineárisak.*

Három vektort akkor mondunk **lineárisan függő***nek, ha egy síkkal párhuzamosak, azaz komplanárisak.*

1, 2 vagy 3 tagú vektorrendszert **lineárisan független***nek nevezünk, ha nem lineárisan függő.*

A most következő állítások algebrai jellemzését adják a lineárisan függő, illetve lineárisan független vektorrendszereknek.

Tétel. *Két szabadvektor pontosan akkor lineárisan függő, ha egyik a másiknak skalárszorosa.*

Két szabadvektor pontosan akkor lineárisan független, ha egyik sem skalárszorosa a másiknak.

Bizonyítás. Ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ lineárisan függők, akkor közös pontból indított (O, A) és (O, B) reprezentánsaikra igaz, hogy az O, A, B pontok egy egyenesen vannak. Ha $O \neq A$, akkor van olyan $\lambda \in \mathbb{R}$, hogy az O középpontú hasonlóság az A pontot B-be képezi. Ekkor $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$. Ha viszont $O = A$, de $O \neq B$, akkor A és B szerepét felcserélve adódik, hogy $\mathbf{a} = \mu\mathbf{b}$. Ha pedig $O = A = B$, akkor $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{0}$, s így $\mathbf{a} = 0 \cdot \mathbf{a}$.

Fordítva, ha pl. $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$, akkor nyilvánvalóan közös pontból induló (O, A) és (O, B) reprezentánsaikra O, A, B egy egyenesen van, ezért $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ kollineárisak, tehát lineárisan függők.

A lineáris függetlenségre vonatkozó összefüggés logikai tagadással keletkezik.

□

Tétel. *Három szabadvektor pontosan akkor lineárisan függő, ha közülük valamelyik a másik kettőnek lineáris kombinációja.*

Három szabadvektor pontosan akkor lineárisan független, ha egyik sem fejezhető ki a másik kettő lineáris kombinációjaként.

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ lineárisan függők. Ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ lineárisan függő, akkor egyikük pl. $\mathbf{a}$ lineárisan kifejezhető $\mathbf{b}$-vel: $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$. Ezért $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b} + 0 \cdot \mathbf{c}$. Ha viszont $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ lineárisan függetlenek, akkor tekintsük mindháromnak O-ból induló reprezentánsát: $(O, A) \in \mathbf{a}$, $(O, B) \in \mathbf{b}$, $(O, C) \in \mathbf{c}$. Most húzzunk párhuzamost C-ből OB-val, illetve OA-vel, ezek messék az OA, illetve OB egyeneseket A', illetve B' pontokban. Az (O, A'), illetve (O, B') irányított szakaszok által meghatározott szabadvektorokra nyilvánvalóan $\overrightarrow{OA'} = \alpha\mathbf{a}$ és $\overrightarrow{OB'} = \beta\mathbf{b}$, továbbá $\mathbf{c} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'}$ érvényes. Ezért $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$ teljesül.

Fordítva, ha pl. $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$ teljesül, akkor egy közös kezdőpontból indított reprezentánsokkal könnyen láthatjuk, hogy végpontjaik a kezdőponttal mind egy síkba esnek, ezért komplanárisak.

A lineáris függetlenségre vonatkozó összefüggés logikai tagadással keletkezik.
□

Tetszőleges vektorrendszer tagjaival a nullvektor mindig előállítható $\mathbf{0} = 0\cdot\mathbf{a}_1 + \cdots + 0\cdot\mathbf{a}_k$ alakban. Ezt triviális előállításnak mondjuk.

Tétel. *A szabadvektorok egy vektorrendszere pontosan akkor lineárisan függő, ha belőlük a nullvektor nem triviális módon is előállítható.*

A szabadvektorok egy vektorrendszere pontosan akkor lineárisan független, ha belőlük a nullvektor csak triviálisan állítható elő.

Bizonyítás. Ha pl. $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ lineárisan függő, akkor előző állítás alapján tudjuk, hogy valamelyik, pl. $\mathbf{c}$ kifejezhető a többivel: $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$. Ezért $\mathbf{0} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + (-1)\mathbf{c}$. Ez nem triviális előállítása a nullvektornak.

Hasonló egyszerűséggel adódik az állítás 1 és 2 tagú vektorrendszerekre is.

Ha fordítva, pl. $\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c} = \mathbf{0}$, és pl. $\gamma \neq 0$, akkor a $\mathbf{c} = -\frac{\alpha}{\gamma}\mathbf{a} - \frac{\beta}{\gamma}\mathbf{b}$ előállítás lehetséges, vagyis ismét az előző állítás alapján $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ lineárisan függő.

A lineáris függetlenségre vonatkozó kijelentés logikai tagadással keletkezik. □

A lineáris függetlenségnek egy önálló jellemzését is adjuk.

Tétel. *Egy vektorrendszer pontosan akkor lineárisan független, ha belőlük egy tetszőleges szabadvektor legfeljebb egyféleképpen állítható elő.*

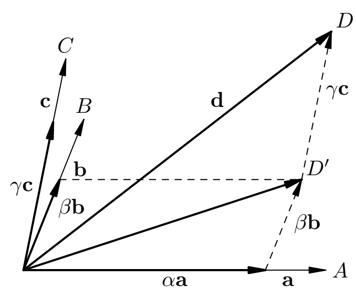
Bizonyítás. A feltétel szükséges: Pl. három tagú $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ vektorrendszer esetén, ha $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} = \alpha'\mathbf{a} + \beta'\mathbf{b} + \gamma'\mathbf{c}$ teljesedik, akkor

$$(\alpha' - \alpha)\mathbf{a} + (\beta' - \beta)\mathbf{b} + (\gamma' - \gamma)\mathbf{c} = \mathbf{0}.$$

A lineáris függetlenség miatt $\alpha = \alpha', \beta = \beta', \gamma = \gamma'$, tehát $\mathbf{x}$ előállítása csak egyféleképpen lehetséges.

A feltétel elégséges: Ha minden szabadvektor legfeljebb egyféleképpen áll elő a megadott szabadvektorokkal, akkor a nullvektor is, ezért az előző állítás miatt a vektorrendszer lineárisan független. □

Tétel. *Ha $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ lineárisan független vektorrendszer, $\mathbf{d}$ tetszőleges, akkor $\mathbf{d}$ mindig előállítható lineáris kombinációként a megadott $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ szabadvektorokkal.*



Bizonyítás. Egy geometriai konstrukciót adunk a lineáris kombináció megkeresésére: Tekintsük mind a négy vektor közös O pontból induló reprezentánsait, a végpontok legyenek A, B, C, D. Az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ szabadvektorok lineáris függetlensége miatt a az O, A, B, C pontok nincsenek egy síkban. Húzzunk párhuzamost D-ből OC-vel, ez messe az OAB síkot a D' pontban. Mivel D' az OAB síkban van, $\overrightarrow{OD'} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$. Másrészt $D'D \parallel OC$, ezért $\overrightarrow{D'D} = \gamma\mathbf{c}$. Ezért $\mathbf{d} = \overrightarrow{OD'} + \overrightarrow{D'D} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$. □

Tételünk azt fejezi ki, hogy a szabadvektorok körében 4 szabadvektor már mindig lineárisan függő.

Az előző állításunkkal kombinálva többet is mondhatunk: 3 tagú lineárisan független vektorrendszer segítségével tetszőleges szabadvektor pontosan egyféleképpen állítható elő. Ennek alapján bevezetjük a következő elnevezéseket:

Definíció. *A szabadvektorok körében egy lineárisan független 3 tagú vektorrendszert* **bázis***nak nevezünk. Ha* $\mathbf{d} = \alpha\mathbf{d} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$*, akkor az* α, β, γ *számhármast a* $\mathbf{d}$ *vektornak az* $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ *bázisra vonatkozó* **koordinátái***nak mondjuk.*

Könnyen láthatjuk, hogy ha lerögzítünk egy bázist, akkor két tetszőleges szabadvektor összegének koordinátái úgy adódnak az egyes szabadvektorok koordinátáiból, hogy a megfelelő koordináták összeadódnak. Skalárral való szorzáskor pedig mindegyik koordináta megszorzódik az adott skalárral.

1.4. Szabadvektorok skaláris szorzata

Most a szabadvektorok skaláris szorzatával foglalkozunk, amely a középiskolai fogalom átismétlését jelenti, csak most a térbeli szabadvektorok esetére. A fogalom tárgyalásánál ismertnek feltételezzük a térbeli távolság- és szögfogalmat. Egy szabadvektor hosszán tetszőleges reprezentánsának hosszát értjük, s két szabadvektor szögén pedig közös pontból induló reprezentánsainak szögét.

A skaláris szorzatot gyakran nevezik belső szorzatnak is.

Definíció. *Az* $\mathbf{a}$ *és* $\mathbf{b}$ *szabadvektorok skaláris szorzatán az*

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

számot értjük.

Speciális esetként figyeljük meg, hogy ha a két szabadvektor merőleges, akkor skaláris szorzatuk nulla. Ez megfordítható: ha két szabadvektor skaláris szorzata nulla, akkor a vektorok merőlegesek egymásra, beleértve azt is, hogy lehetnek nullvektorok is.

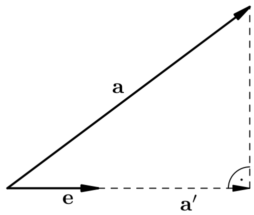
Másrészt, ha egy szabadvektornak önmagával képezzük a skaláris szorzatát, akkor a szabadvektor hosszának négyzetét kapjuk.

Egy szabadvektort **egységvektor**nak nevezünk, ha hossza 1. A skaláris szorzat szoros kapcsolatban van az egységvektorokra történő merőleges vetítéssel.

Nevezetesen, ha $\mathbf{e}$ egy egységvektor, $\mathbf{a}$ tetszőleges szabadvektor, akkor $\mathbf{a}$-nak az $\mathbf{e}$ irányára eső merőleges vetülete éppen az

$$\mathbf{a}' = (\mathbf{e}, \mathbf{a})\mathbf{e}$$

vektor lesz. Ezt könnyen láthatjuk a merőleges vetület hosszának kiszámításával, akár hegyes-, akár tompaszöget zár be a két szabadvektor.



A következő állítás a skaláris szorzat alapvető tulajdonságait fejezi ki.

TÉTEL. *A szabadvektor skaláris szorzata rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:*

1. $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a}) \qquad \forall\, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V(\mathcal{E})$ *(szimmetrikus)*
2. $(\mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{c}) + (\mathbf{b}, \mathbf{c}) \qquad \forall\, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V(\mathcal{E})$ *(additív)*
3. $(\lambda\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \qquad \forall\, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V(\mathcal{E})$ *(homogén)*
4. $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) \geq 0 \qquad \mathbf{a} \in V(\mathcal{E})$ *és* $= 0 \Longleftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0}$ *(pozitív definit)*

Bizonyítás. Az 1. és 4. állítás nyilvánvaló.

A 3. a λ skalár előjele szerinti esetszétválasztással könnyen igazolható. Például, ha $\lambda < 0$, akkor a

$$(\lambda\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\lambda| \cdot |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\sphericalangle(\lambda\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -\lambda|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot (-\cos\sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{b})) = \lambda(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

A 2. tulajdonságot elegendő belátni, akkor ha pl. $\mathbf{c} = \mathbf{e}$ egységvektor, az 1. és a 3. teljesülése miatt. Most kihasználjuk az adott $\mathbf{e}$ egységvektor irányára eső merőleges vetítés azon nyilvánvaló tulajdonságát, hogy csatlakozó irányított szakaszok merőleges vetülete is csatlakozó. Jelöljük most az $\mathbf{a}$ szabadvektor $\mathbf{e}$-re eső vetületét $\mathbf{a}'$-vel. Az említett tulajdonság akkor így fejezhető ki:

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})' = \mathbf{a}' + \mathbf{b}'.$$

Ezt kihasználva kapjuk, hogy

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{e}) = (\mathbf{a}+\mathbf{b})' = \mathbf{a}' + \mathbf{b}' = (\mathbf{a}, \mathbf{c}) + (\mathbf{b}, \mathbf{e}).$$

□

A skaláris szorzat kiszámítása koordinátákból akkor válik egyszerűvé, ha speciális, ún. ortonormált bázisra vonatkozó koordinátáit tekintjük a vektoroknak.

Egy $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ bázist **ortonormált**nak mondunk, ha mindegyik egységvektor, és páronként merőlegesek. Ez úgy is kifejezhető, hogy

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \begin{cases} 1 & \text{ha } i = j \\ 0 & \text{ha } i \neq j. \end{cases}$$

TÉTEL. *Legyen* $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ *egy ortonormált bázis. Az* $\mathbf{a}$ *és* $\mathbf{b}$ *vektorok e bázisra vonatkozó koordinátáit jelölje* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$*, illetve* $\beta_1, \beta_2, \beta_3$*. Ekkor*

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3.$$

Bizonyítás. Először azt figyeljük meg, hogy az ortonormált bázisra vonatkozó koordináták a skaláris szorzattal egyszerűen kiszámíthatók:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{e}_i) = (\alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_i) = \alpha_1(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_i) + \alpha_2(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_i) + \alpha_3(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_i) = \alpha_i.$$

Ezt felhasználva számítsuk ki most az $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ skaláris szorzatot:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \beta_1(\mathbf{a}, \mathbf{e}_1) + \beta_2(\mathbf{a}, \mathbf{e}_2) + \beta_3(\mathbf{a}, \mathbf{e}_3) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3.$$

□

Az állításban megadott jobboldali formulát a két koordinátahármas **kompozíciós szorzat**ának is nevezik.

1.5. Szabadvektorok vektoriális szorzata

A vektoriális szorzat definiálásához szükségünk van a tér irányításának fogalmára. Ezt a fogalmat teljes pontossággal majd csak egy későbbi lépésben, több eszköz birtokában lehetne megtenni. Most csak egy vázlatos fogalomkiépítést, és egy még szemléletesebb megközelítést írunk le.

Először is emlékeztetünk a térbeli egybevágóságokra. Ezek olyan térbeli távolságtartó transzformációk, amelyek megkaphatók az eltolások, a tengely körüli elforgatások, és a síkra vonatkozó tükrözések véges sokszori, egymás utáni végrehajtásával. Azokat az egybevágóságokat, amelyeknek van olyan előállítása, amelyben síkra vonatkozó tükrözés nem szerepel, mozgásnak mondjuk.

Tekintsünk most két bázist a szabadvektorok körében, s mindezen vektoroknak egyetlen közös kezdőpontból induló reprezentásait. Ha van olyan mozgás, amely az első bázis reprezentánsait úgy képezi le, hogy a képreprezentánsok közül az első a második bázis első vektorának reprezentánsával egy egyenesbe, és egy irányba esik, továbbá a második képreprezentáns a második bázis második vektorának reprezentánsával azonos félsíkba esik, s végül a harmadik képreprezentáns a második bázis harmadik vektorának reprezentánsával azonos féltérbe esik, akkor a két bázist ekvivalensnek (vagy azonos irányításúnak) mondjuk. Könnyen igazolható, hogy ez egy ekvivalenciareláció a bázisok halmazán, s pontosan két osztály van e reláció szerint. Akkor mondjuk, hogy a tér irányítva van, ha ki van jelölve az egyik osztály. Az ebbe a kijelölt osztályba tartozó bázisokat pozitív irányításúnak (vagy röviden pozitívnak) mondjuk, míg a másik osztályba tartozókat negatív irányításúnak.

Később majd be fogjuk látni azt is, hogy a bázisban két vektor cseréje megváltoztatja az irányítást, a ciklikus permutáció viszont nem.

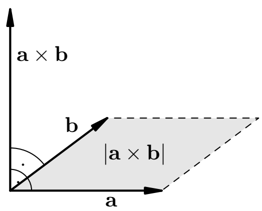
Hétköznapi térszemléletünkre alapozva szokásos a következő elnevezés és fogalombevezetés is. Egy bázist jobbsodrású (vagy jobb-) rendszernek neveznek, ha a 'harmadik végpontja felől nézve az első vektor 180°-nál kisebb szögben forgatható a második vektor irányába az óramutató járásával ellentétes irányban'. (Ezt a fajta tárgyalást részletesebben lásd Hajós György: Bevezetés a geometriába c. művében [5].)

A továbbiakban feltételezzük, hogy a tér irányítva van.

Definíció. *Két lineárisan független szabadvektor,* **a** *és* **b** **vektoriális szorzat***án azt a szabadvektort értjük, amelyre*

1. $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin \sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$,
2. $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ *merőleges* $\mathbf{a}$*-ra és* $\mathbf{b}$*-re,*
3. $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b})$ *pozitív irányítású bázis.*

Ha pedig **a** *és* **b** *lineárisan függők, akkor vektoriális szorzatuk a nullvektor.*



Megjegyezzük, hogy az első esetben, vagyis amikor **a** és **b** lineárisan függetlenek, akkor a vektoriális szorzat sohasem nullvektor. Másrészt, ha **a** és **b** merőlegesek egymásra, akkor a vektoriális szorzat hossza éppen ez egyes szabadvektorok hosszának szorzata.

A következő állítás a vektoriális szorzás alaptulajdonságait adja meg.

Tétel.

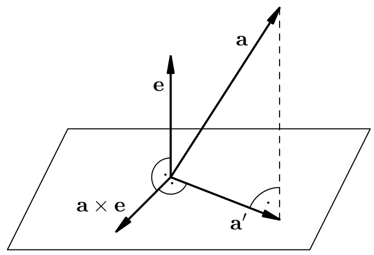
1. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \qquad \forall\, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V(\mathcal{E})$ *(antiszimmetrikus)*
2. $(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \qquad \forall\, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V(\mathcal{E})$ *(homogén)*
3. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} \qquad \forall\, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V(\mathcal{E})$ *(additív)*
4. *Az* **a** *vektornak az* **e** *egységvektorra merőleges komponense*

$$\mathbf{a}_m = (\mathbf{e} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{e}.$$

Bizonyítás. Az 1. állítás abból következik, hogy egy vektorhármasban ha felcseréljük két vektor sorrendjét, akkor az irányítás megváltozik, de a $\mathbf{b}\times\mathbf{a}$ első két jellemzője ugyanaz, mint a $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ vektoriális szorzaté.

A 2. állítás pozitív λ esetén nyilvánvaló. Negatív λ esetén az irányításban kétszer történik váltás, ezért végül azonos lesz a jobb- és baloldalon álló vektoriális szorzás képzésénél adódó vektorhármasok irányítása.

Az additivitás belátását megintcsak elegendő ellenőrizni a $\mathbf{c}=\mathbf{e}$ egységvektor esetben. Figyeljük meg, hogy ha $\mathbf{e}$ rögzített egységvektor, akkor tetszőleges $\mathbf{a}$ szabadvektorral képzett vektoriális szorzata két geometriai transzformáció egymás utáni végrehajtásával megkapható:



Először $\mathbf{a}$-t merőlegesen levetítjük az $\mathbf{e}$-re merőleges síkra, majd ezt elforgatjuk 90°-kal $\mathbf{e}$ kezdőpontja körül abban a síkban. Ez a szabadvektor ugyanis éppen megfelelő hosszúságú, merőleges $\mathbf{a}$-ra és $\mathbf{e}$-re, és a megfelelő irányítottság is teljesül. Mint minden geometriai transzformáció, ez is az illeszkedést megtartja, ezért teljesül a

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{e}=\mathbf{a}\times\mathbf{e}+\mathbf{b}\times\mathbf{e}$$

összefüggés.

A fenti gondolatmenet alapján nyilvánvaló, hogy $\mathbf{e}\times(\mathbf{e}\times\mathbf{a})=-\mathbf{a}_m$, amiből következik a 4. állítás.

□

Ha $(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)$ egy pozitív irányítású ortonormált bázis, akkor könnyen láthatjuk, hogy

$$\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2=\mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3=\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1=\mathbf{e}_2.$$

Ezt is felhasználva kapjuk, hogy a vektoriális szorzat a pozitív irányítású bázisokra vonatkozó koordinátákból számítható ki, viszonylag könnyen.

Tétel. *Legyen* $(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)$ *egy pozitív irányítású ortonormált bázis. Az* $\mathbf{a}$ *és* $\mathbf{b}$ *vektorok e bázisra vonatkozó koordinátáit jelölje* $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$*, illetve* β_1,β_2,β_3*. Ekkor*

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_2 & \beta_3\end{vmatrix}\mathbf{e}_1+\begin{vmatrix}\alpha_3 & \alpha_1\\ \beta_3 & \beta_1\end{vmatrix}\mathbf{e}_2+\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}\mathbf{e}_3.$$

ahol $\begin{vmatrix}\alpha_i & \alpha_j\\ \beta_i & \beta_j\end{vmatrix}=\alpha_i\beta_j-\alpha_j\beta_i.$

Bizonyítás.

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}\times\mathbf{b} &= (\alpha_1\mathbf{e}_1+\alpha_2\mathbf{e}_2+\alpha_3\mathbf{e}_3)\times(\beta_1\mathbf{e}_1+\beta_2\mathbf{e}_2+\beta_3\mathbf{e}_3)\\
&= \alpha_1\beta_1(\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_1)+\alpha_1\beta_2(\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2)+\alpha_1\beta_3(\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_3)\\
&\quad+\alpha_2\beta_1(\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_1)+\alpha_2\beta_2(\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_2)+\alpha_2\beta_3(\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3)\\
&\quad+\alpha_3\beta_1(\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1)+\alpha_3\beta_2(\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_2)+\alpha_3\beta_3(\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_3)\\
&= \begin{vmatrix}\alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_2 & \beta_3\end{vmatrix}\mathbf{e}_1+\begin{vmatrix}\alpha_3 & \alpha_1\\ \beta_3 & \beta_1\end{vmatrix}\mathbf{e}_2+\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}\mathbf{e}_3.
\end{aligned}$$

A számításban kihasználtuk az állítás előtt jelzett összefüggéseket, s hogy $\mathbf{e}_i\times\mathbf{e}_i=\mathbf{0}$. □

TÉTEL. **Kifejtési tétel**
Tetszőleges $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ *szabadvektorokra*

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}=(\mathbf{a},\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{b},\mathbf{c})\mathbf{a}$$

és

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{a},\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{a},\mathbf{b})\mathbf{c}$$

Bizonyítás. Az előző állítás jelöléseit használva legyenek $\mathbf{c}$ koordinátái $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$. A bizonyítás érdekében egyszerűen kiszámítjuk a bal- és jobboldalon szereplő vektorok koordinátáit. A baloldali vektor első koordinátája:

$$\begin{vmatrix}\begin{vmatrix}\alpha_3 & \alpha_1\\ \beta_3 & \beta_1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}\\ \gamma_2 & \gamma_3\end{vmatrix}=(\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3)\gamma_3-(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)\gamma_2.$$

A jobboldal első koordinátája:

$$(\alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_2+\alpha_3\gamma_3)\beta_1-(\beta_1\gamma_1+\beta_2\gamma_2+\beta_3\gamma_3)\alpha_1.$$

Láthatjuk, hogy itt az 1. és 4. tag kiesik, a többi tag viszont éppen a baloldal első koordinátájának tagjait adja. Hasonlóan ellenőrizhető a többi koordináták egyenlősége is. □

TÉTEL. **Jacobi azonosság**
Tetszőleges $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ *szabadvektorokra*

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}+(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\times\mathbf{a}+(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\times\mathbf{b}=\mathbf{0}.$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk a kifejtési tételt mindhárom tagra:

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}+(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\times\mathbf{a}+(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\times\mathbf{b}=\\
&(\mathbf{a},\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{b},\mathbf{c})\mathbf{a}+(\mathbf{b},\mathbf{a}),\mathbf{c}-(\mathbf{c},\mathbf{a})\mathbf{b}+(\mathbf{c},\mathbf{b})\mathbf{a}-(\mathbf{a},\mathbf{b}),\mathbf{c}=\mathbf{0}.
\end{aligned}$$

□

1.6. Szabadvektorok vegyes szorzata

Három szabadvektor vegyesszorzata a már megismert két szorzás segítségével adódik, ezért tulajdonságai azokéból könnyen adódnak majd.

DEFINÍCIÓ. $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c})$.

TÉTEL. *Három szabadvektor vegyesszorzata pontosan akkor nulla, ha a vektorok lineárisan függő vektorrendszert alkotnak.*

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ lineárisan függő. Ekkor valamelyik, pl. $\mathbf{c}$ kifejezhető a másik kettővel: $\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$. Behelyettesítve a vegyesszorzat képletébe:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) = \alpha(\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{a}) + \beta(\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{b}) = 0.$$

Fordítva, ha $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$, akkor $\mathbf{c}$ merőleges $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$-re, de ilyen $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ is, ezért egy síkkal párhuzamosak, tehát lineárisan függők. □

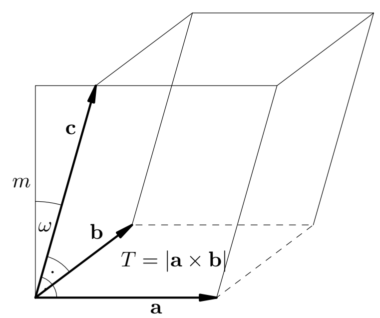
TÉTEL. *Legyenek az* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ *szabadvektorok lineárisan függetlenek. Ekkor a vegyesszorzatuk értéke megegyezik a közös kezdőpontból indított reprezentánsaik által meghatározott paralelepipedon térfogatával, ha* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ *pozitív irányítású. Negatív irányítású* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ *vektorhármas esetén e térfogat* (-1)*-szerese lesz a vegyesszorzat.*

Bizonyítás. Csak pozitív irányítottságú lineárisan független vektorhármas esetén bizonyítunk. Ennek alapján a másik eset is könnyen adódik.

Nevezzük az $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ által kifeszített lapot a paralelepipedon alaplapjának. Ha ω jelöli a magasságnak $\mathbf{c}$-vel bezárt szögét, akkor a paralelepipedon magassága: $m = |\mathbf{c}| \cos\omega$. Az alaplap területe: $T = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$. Így

$$V = T \cdot m = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \cdot |\mathbf{c}| \cos\omega = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}).$$

□



Most megadjuk a vegyesszorzás műveleti tulajdonságait:

TÉTEL. *A vegyesszorzat minden változójában additív és homogén, továbbá antiszimmetrikus (másszóval alternáló), azaz bármely két változó felcserélése esetén a vegyesszorzat értéke csak előjelet vált.*

Bizonyítás. Az additivitás és a homogenitás a skaláris és a vektoriális szorzás ilyen tulajdonságaiból következik. Például

$$(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = ((\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) \times \mathbf{b}, \mathbf{c}) = ((\mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}) + (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}), \mathbf{c})$$

$$= (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}, \mathbf{c}) + (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c}).$$

Az antiszimmetria igazolásához először figyeljük meg, hogy ha két szabadvektor azonos, akkor a vegyesszorzat értéke 0.

$$(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{a}, \mathbf{c}) = (\mathbf{0}, \mathbf{c}) = 0.$$

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{a}) = 0,$$

hiszen $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ merőleges $\mathbf{a}$-ra.

Az első két változóra vonatkozó antiszimmetria azonnal adódik a vektoriális szorzás antiszimmetriájából:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c}) = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a}, \mathbf{c}) = -(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c})$$

A második és harmadik vektor felcseréléséhez számítsuk ki a következőt:

$$0 = (\mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{c}, \mathbf{b} + \mathbf{c})$$

$$= (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{b}) + (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + (\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}) + (\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + (\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}).$$

Innen kapjuk, hogy

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = -(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}).$$

□

A vektoriális szorzás és a skaláris szorzat kiszámítási módjából azonnal adódik az alábbi kiszámítási lehetőség a vegyesszorzatra is:

TÉTEL. *Ha az* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ *szabadvektorok koordinátái egy pozitív irányítású ortonormált bázisra vonatkozóan* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$*;* $\beta_1, \beta_2, \beta_3$*, illetve* $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$*, akkor*

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} \gamma_1 - \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix} \gamma_2 + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \gamma_3 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

1.7. Egyenesek és síkok egyenletei

A térbeli egyenesek és síkok leírásához a koordinátarendszer fogalmát értelmezzük.

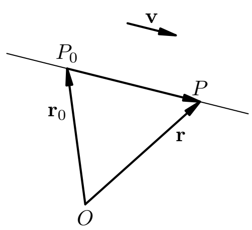
DEFINÍCIÓ. *Az euklideszi geometriai tér egy rögzített* O *pontjából és a szabadvektorok egy bázisából álló párját a tér* **koordinátarendszer***ének mondjuk.* O*-t origónak nevezzük. Amennyiben a bázis ortonormált, akkor a Descartes-féle koordinátarendszerről beszélünk.*

A koordinátarendszerek használatát egyrészt az teszi hasznossá, hogy az origó rögzítése által bijektív megfeleltetés alakul ki a tér pontjai és a szabadvektorok halmaza között. Ugyanis, tetszőleges $P \in \mathcal{E}$ ponthoz az $\overrightarrow{OP}$ vektort rendeljük, és fordítva egy $\mathbf{a} \in V(\mathcal{E})$ szabadvektorhoz az O-ból induló reprezentánsának végpontja tartozik. Másrészt a bázisvektorok segítségével a tér pontjaira vonatkozó összefüggéseket algebrai összefüggésekké lehet átalakítani.

Tekintsünk most egy egyenest a térben, s annak egy rögzített pontja legyen P_0, továbbá egy az egyenessel párhuzamos, de nem nullvektor legyen $\mathbf{v}$. Ezt a szabadvektort az egyenes **irányvektorá**nak mondjuk.

TÉTEL. *A tér egyeneseit, és csak azokat lehet előállítani* $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \lambda\mathbf{v}$ *alakban előálló szabadvektorok origóból induló reprezentánsainak végpontjaiként, ahol* $\mathbf{r}_0$ *az origóból az egyenes egy rögzített* P_0 *pontjába mutató vektor,* $\mathbf{v}$ *az egyenes egy irányvektora,* $\mathbf{r}$ *pedig az origóból az egyenes tetszőleges pontjába mutató vektor,* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tetszőleges.*

Az egyenes ilyen előállítását **paraméteres vektorelőállítás**nak nevezik.



Bizonyítás. Ha egy egyenest tekintünk, s a jelzett adatokat, akkor az egyenes tetszőleges P pontja esetén $\overrightarrow{P_0P}$ párhuzamos az egyenessel, ezért van olyan λ, hogy $\overrightarrow{P_0P} = \lambda\mathbf{v}$. Ezért $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P} = \mathbf{r}_0 + \lambda\mathbf{v}$.

Fordítva, ha egy előállítás adott tetszőleges $\mathbf{r}_0$ és $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ vektorokkal, akkor megkonstruálhatjuk a megfelelő egyenest: $\mathbf{r}_0$-nak (O, P_0) reprezentánsa végpontján keresztül átmenő $\mathbf{v}$-vel párhuzamos egyenest tekintjük. Ilyen egyenes egyértelműen létezik, s ennek éppen a megadott lesz a vektoros előállítása. □

Az $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ koordinátarendszerre vonatkozóan a pontokhoz koordináták rendelhetők, mégpedig a P pont koordinátáinak az $\overrightarrow{OP}$ vektor koordinátáit tekintjük.

Ha koordinátáikkal adottak a pontok, és a szabadvektorok:

$$P_0\,(x_0, y_0, z_0), \qquad P\,(x, y, z), \qquad \mathbf{v}\,(v_1, v_2, v_3),$$

akkor a fenti vektoregyenlet az alábbi három, koordinátákkal kifejezett egyenlet rendszerével lesz ekvivalens:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \lambda v_1 \\ y &= y_0 + \lambda v_2 \\ z &= z_0 + \lambda v_3. \end{aligned}$$

Ezt szokták nevezni az egyenes koordinátás egyenletrendszerének. Ha $\mathbf{v}$ szabadvektor egyik koordinátája sem nulla, azaz egyik koordinátasíkkal sem párhuzamos az egyenes, akkor ez egyenletrendszer átalakítható a következővé:

$$\frac{x-x_0}{v_1}=\frac{y-y_0}{v_2}=\frac{z-z_0}{v_3}.$$

Megjegyezzük, hogy ha pl. $v_1=0$, akkor az egyenletrendszer alakja

$$x=x_0,\quad \frac{y-y_0}{v_2}=\frac{z-z_0}{v_3},$$

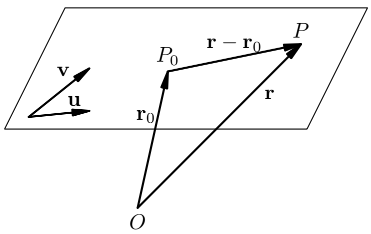
és ha $v_1=0,\ v_2=0$, akkor pedig

$$x=x_0,\quad y=y_0.$$

Most a sík paraméteres vektorelőállítása következik.

Tétel. *A tér síkjait, és csak azokat lehet előállítani* $\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+\lambda\mathbf{u}+\mu\mathbf{v}$ *alakban előálló szabadvektorok origóból induló reprezentánsainak végpontjaiként, ahol* $\mathbf{r}_0$ *az origóból a sík egy rögzített* P_0 *pontjába mutató vektor,* $\mathbf{u}$ *és* $\mathbf{v}$ *a sík két egymással nem párhuzamos irányvektora,* $\mathbf{r}$ *pedig az origóból a sík tetszőleges pontjába mutató vektor,* $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ *tetszőleges.*

A bizonyítás az egyenes esetéhez hasonlóan történhet.



A paraméteres koordinátás előállítás:

$$\begin{aligned} x &= x_0+\lambda u_1+\mu v_1\\ y &= y_0+\lambda u_2+\mu v_2\\ z &= z_0+\lambda u_3+\mu v_3. \end{aligned}$$

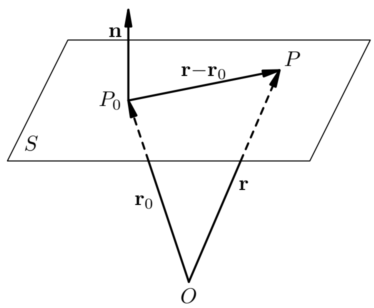
A skaláris szorzat felhasználásával leírva a síkokat, kapjuk a síkok **Hesse–féle egyenletét.** Általában egy alakzat egyenletén olyan egyenletet értünk, amelyet az alakzat pontjainak koordinátái kielégítenek, de az alakzathoz nem tartozó pontok koordinátái nem.

Egy adott S sík esetében egy arra merőleges, nem nulla vektort a **sík normálvektor**ának nevezünk.

Tétel. *Ha rögzítve van a térben az origó, akkor a tér síkjai, és csak azok rendelkeznek*

$$(\mathbf{n}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$$

alakú egyenlettel, ahol $\mathbf{r}_0$ *az origóból a sík egy rögzített* P_0 *pontjába mutató vektor,* $\mathbf{n}$ *a sík egy normálvektora,* $\mathbf{r}$ *pedig az origóból a sík tetszőleges pontjába mutató vektor.*



Bizonyítás. Ha adott egy S sík, továbbá egy rögzített P_0 pontja és egy $\mathbf{n}$ normálvektora, akkor a sík egy P pontja — és csak azok esetén — $\overrightarrow{P_0P} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ párhuzamos a síkkal, azaz merőleges az $\mathbf{n}$ normálvektorra:

$$(\mathbf{n}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0.$$

Fordítva, ha egy egyenlet adott tetszőleges $\mathbf{r}_0$ és $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ vektorral, akkor megkonstruálhatjuk a megfelelő síkot: ez az $\mathbf{r}_0$ O-ból induló reprezentánsának végpontján átmenő $\mathbf{n}$-re merőleges sík lesz. □

Ha a normálvektor koordinátáit (n_1, n_2, n_3)-mal jelöljük, akkor a Hesse féle egyenlet koordinátákkal kifejezett alakja:

$$n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) + n_3(z - z_0) = 0.$$

Ezt gyakran átrendezzük az

$$Ax + By + Cz = D$$

alakba, jelezve azt, hogy egy tetszőleges ilyen egyenlet megadásával, — ahol $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$ — minden esetben síkot kapunk.

Amennyiben a normálvektor egységvektor is, akkor a Hesse-féle egyenletet **normálegyenlet**nek nevezik.

Egyetlen alkalmazásként egy pontnak egy síktól való távolságát fejezzük ki: Ha P egy tetszőleges pont a térben, koordinátái (x, y, z), és az S síknak egy normálegyenlete adott, akkor a pont és sík távolsága a $\overrightarrow{P_0P} = \mathbf{p} - \mathbf{r}_0$ vektornak az $\mathbf{n}$ (egységnyi hosszú) normálvektorra eső merőleges vetületének a hossza:

$$d(P, S) = |(\mathbf{n}, \mathbf{p} - \mathbf{r}_0)|.$$

Koordinátákkal kifejezve:

$$d(P,S) = |n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) + n_3(z - z_0)|.$$