Lineáris egyenletrendszerek

Lineáris egyenletrendszernek nevezzük az

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \dots & + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + & \dots & + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + & \dots & + a_{kn}x_n = b_k \end{array}$$

n ismeretlenes, k egyenletből álló egyenletrendszert, ahol $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{k1}, \dots, a_{kn}, b_1, \dots, b_k$ adott valós számok. $x_1, \dots, x_n$ jelöli az ismeretleneket, az a_{ij} számokat a lineáris egyenletrendszer együtthatóinak mondjuk, míg a $b_1, b_2, \dots, b_k$ számokat a konstansoknak.

Amennyiben $b_1 = 0, \dots, b_k = 0$, az egyenletrendszert *homogén*nak nevezzük, általában *inhomogén*nak.

• Az ismeretlenek együtthatói és a konstansok nemcsak a valós számtestből vehetők, hanem lehetnek más számtest, pl. a komplex számtest elemei. Ekkor természetesen a megoldásokat is ugyanazon számtestben keressük.

• Egyenletek, egyenletrendszerek esetében két alapvető kérdés van:
1) Van-e az egyenletrendszernek egyáltalán megoldása, s ha van, a megoldás egyértelmű-e?
2) Hogyan határozhatjuk meg a megoldást, vagy megoldásokat.

• megoldható: ha a lineáris egyenletrendszernek létezik megoldása
ellentmondásos: ha nincs megoldása
határozott: ha pontosan egy megoldás létezi
határozatlan: ha több megoldása van

Két lineáris egyenletrendszert *ekvivalens*nek mondunk, ha megoldásaik halmaza azonos.

Ekvivalens átalakítások:

• az egyenletet megszorozzuk valamely nullától különböző számmal

Ugyanis ha egy $c_1, c_2, \ldots, c_n$ szám n-es megoldja az eredeti egyenletrendszert, akkor az újat is, hiszen az első egyenlet esetében

$$\lambda a_{11}c_1+\lambda a_{12}c_2+\ldots+\lambda a_{1n}c_n = \lambda(a_{11}c_1+a_{12}c_2+\ldots+a_{1n}c_n) = \lambda b_1$$

míg a többi egyenlet ugyanaz, mint az eredetiben.

• valamely egyenletet úgy változtatjuk meg, hogy hozzáadjuk valamelyik másik egyenletet.

Ugyanis ha $c_1, c_2, \ldots, c_n$ megoldja az eredeti egyenletrendszert, akkor az új elsőt is:

$$(a_{11} + a_{21})c_1 + (a_{12} + a_{22})c_2 + \ldots + (a_{1n} + a_{2n})c_n =$$

$$= (a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \ldots + a_{1n}c_n) + (a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \ldots + a_{2n}c_n) = b_1 + b_2$$

s a többit is, hiszen azok ugyanazok, mint az eredetiben.

Gauss elimináció

- alkalmas egy tetszőleges lineáris egyenletrendszer megoldásainak előállítására, illetve annak eldöntésére is, hogy az egyenletrendszer határozott, határozatlan vagy ellentmondásos.

- az ismeretlenek szukcesszív kiküszöbölésének módszere

- az egyenletrendszert ekvivalens átalakításokkal olyan alakra hozzuk, hogy onnan a megoldhatóság, és a megoldások könnyen leolvashatók legyenek.

- trapéz alak vagy speciális esetben háromszögalak

Def.: Egy lineáris egyenletrendszert *trapéz alakú*nak mondunk, ha van olyan $1 \leq r \leq k$, hogy $a_{11} \neq 0, a_{22} \neq 0, \ldots, a_{rr} \neq 0$, $a_{ij} = 0$, ha $i = 1, 2, \ldots, r, j < i$ és $a_{ij} = 0$, ha $i > r, j = 1, \ldots, n$. Speciálisan, az $r = n$ esetben *háromszögalakú*nak nevezzük az egyenletrendszert.

A Gauss elimináció fő lépése:

1. Amennyiben $a_{11} \neq 0$, a második, harmadik, stb., k-adik egyenletből az x_1 ismeretlen eltüntethető, másszóval kiküszöbölhető azáltal, hogy az első egyenlet $(-\frac{a_{i1}}{a_{11}})$-szeresét adjuk az i-dik egyenlethez $(i = 2, 3, \ldots, k)$.

2. Ha $a_{11} = 0$, akkor az első egyenletben nem nulla együtthatóval szereplő ismeretlent kell előrehozni első ismeretlennek, s ekkor végrehajtani az ismeretlen kiküszöbölését.

3. A második lépésben a második ismeretlent küszöböljük ki a második egyenlet utáni egyenletekből, stb. és így tovább mindaddig, amíg van mit kiküszöbölni. Ily módon trapéz alakhoz jutottunk.

A trapéz alakról felismerhető, hogy van-e megoldása az egyenletrendszernek.

Pontosan akkor megoldható, ha trapéz alakjában az $r+1$-dik egyenlettől kezdve a jobboldali konstansok mind 0-ák.

A megoldható esetben az egyenletrendszer pontosan akkor lesz határozott, ha $r = n$, azaz háromszögalakra jutottunk. Ugyanis ekkor az utolsó, n-dik egyenletből adódik x_n egyetlen lehetséges értéke, ezt behelyettesítve az előzőbe x_{n-1}, majd ezt is az előzőbe helyettesítve az újabb ismeretlen értéke, stb. s végül az első egyenetből x_1.

Ha viszont $r < n$, akkor az egyenletrendszer határozatlan, hiszen az $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ ún. szabad ismeretleneknek tetszőleges értéket adva az egyenletrendszer határozottá válik, azaz az előbbiekben alkalmazott visszahelyettesítéses módszerrel egy (partikuláris) megoldást kapunk. A szabad ismeretlenek viszont sokféleképp megválaszthatók, teljesen tetszőlegesen, ezért végtelen sok megoldása van az egyenletrendszernek. Ilyenkor szokás a megoldásokat a szabad ismeretlenek függvényében felírni.

- Homogén lineáris egyenletrendszer mindig megoldható, hiszen $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$ triviálisan megoldást ad. Ezért a megoldhatóság kérdése nem érdekes, hanem az, hogy e triviálistól különböző megoldás van-e. A Gauss elimináció módszere szerint ez akkor következik be, ha $r < n$. Speciálisan láthatjuk, hogy ha az egyenletek száma kevesebb, mint az ismeretlenek száma ($k < n$), akkor a homogén lineáris egyenletrendszernek mindig van triviálistól különböző megoldása is.

- Tudjuk, hogy a síkon Descartes féle koordinátarendszert tekintve az egyenesek $Ax + By = C$ lineáris egyenletekkel adhatók meg. Ezért egy kétismeretlenes két egyenletből álló lineáris egyenletrendszer megoldhatósága azzal ekvivalens, hogy a megfelelő egyeneseknek van-e közös pontjuk. Ha egy közös pontjuk van, metszők, akkor határozott az egyenletrendszer, ha azonos a két egyenes, akkor határozatlan az egyenletrendszer, s ha párhuzamosak, akkor az egyenletrendszer ellentmondásos. A 3 ismeretlenes lineáris egyenletek térbeli síkok egyenletei. Ezért a 3 ismeretlenes egyenletrendszer megoldása úgy is fölfogható, mint síkok metszéspontjának (vagy metszéspontjainak) meghatározása.

Mátrixszámítás

Ha adott $k \cdot n$ darab valós szám, s ezeket k sorban, s n oszlopban helyezzük el, akkor $k \times n$ *típusú mátrix*ról beszélünk. Jelölése:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

a_{ij}: az A mátrix i-dik sorának j-dik eleme

a_{ij} az A mátrix (i, j)-dik eleme.

Az összes $k \times n$ típusú mátrixok halmazát $\mathcal{M}_{k \times n}$ jelöli.

Ha egy mátrixban a sorok és oszlopok száma megegyezik: $k = n$, akkor n-edrendű *kvadratikus* (négyzetes) mátrixról beszélünk. Ezek halmazát adott n esetén $\mathcal{M}_n$ jelöli.

Azt a speciális mátrixot, melynek minden eleme nulla, *nullmátrix*nak mondjuk, s általában O-val jelöljük. n-edrendű *egységmátrix*on azt az n-edrendű kvadratikus mátrixot értjük, melynek főátlójában (diagonálisában) mindenütt 1 áll, másutt pedig 0: Jele:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

- valós, komplex elemű mátrix, függvény mtrix

- sormátrix, oszlopmátrix

Mátrixműveletek

Két *mátrix összeadása* csak akkor lehetséges, ha azonos típusúak.

Az $A=(a_{ij})$ és $B=(b_{ij})$ $k{\times}n$ típusú mátrixok összege az a $k{\times}n$ típusú mátrix, melynek (i,j)-dik eleme A (i,j)-dik elemének és B (i,j)-dik elemének összege:

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \ldots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \ldots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{k1}+b_{k1} & a_{k2}+b_{k2} & \ldots & a_{kn}+b_{kn} \end{pmatrix}$$

$$(A+B)+C=A+(B+C)$$

$$A+B=B+A$$

$$A+O=O+A=A$$

$$A+(-A)=O$$

Legyen λ tetszőleges valós szám. λA azt a mátrixot jelöli, mely A-ból úgy keletkezik, hogy A minden elemét megszorozzuk λ-val. Ezt a fajta szorzást *skalárral való szorzás*nak mondjuk.

$$(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)$$

$$(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$$

$$\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$$

Két mátrix szorzata csak akkor értelmezett, ha az elsőnek annyi oszlopa van, mint ahány sora a másodiknak.

Az $A \in \mathcal{M}_{k\times n}$ és a $B \in \mathcal{M}_{n\times l}$ *mátrixok szorzata* az a $C \in \mathcal{M}_{k\times l}$ mátrix, mely (i,j)-dik eleme:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sj}$$

A mátrixszorzás tulajdonságai:

$$A(BC) = (AB)C$$

$$(A+B)C = AC + BC$$

$$A(B+C) = AB + AC$$

$$AE = A$$

Fontos fölfigyelnünk arra, hogy a mátrix szorzás *nem* kommutatív: általában $AB \neq BA$.

Lineáris egyenletrendszer mátrixegyenletként is értelmezhető: Ha A jelöli a lineáris egyenletrendszer együtthatóiból képzett $k \times n$-es mátrixot, X az ismeretleneket tartalmazó $n \times 1$-es oszlopmátrixot, s B a konstansokat tartalmazó $k \times 1$ oszlopmátrixot, akkor az egyenletrendszer az

$$AX = B$$

mátrixegyenletté tömöríthető.

Egy A kvadratikus mátrixot *invertálható*nak mondunk, ha létezik hozzá olyan B mátrix, hogy $AB = BA = E$. Ezt a B mátrixot A *inverzmátrix*ának nevezzük, s a jele A^{-1}.

Meg lehet mutatni, hogy ha A invertálható, akkor csak egyetlen inverze van. Viszont nem minden kvadratikus mátrix invertálható, pl. a $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix sem. Később fogunk majd mondani feltételeket arra, hogy egy mátrix mikor invertálható.

Az n-edrendű invertálható mátrixok halmaza a szorzás műveletére nézve zárt, azaz két invertálható mátrix szorzata is invertálható, és

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Az inverz mátrix meghatározása a következő megfigyelésen alapszik: Az inverzmátrix első oszlopában szereplő számok megkeresése egy olyan lineáris egyenletrendszer megoldását jelenti, mely együtthatómátrixa A, a jobboldali konstansok oszlopa pedig az E egységmátrix első oszlopa. Az inverz mátrix második, stb. j-dik oszlopának megkeresése azon lineáris egyenletrendszer megoldását jelenti, mely együttható mátrixa A, a jobboldali konstansok oszlopa E második, stb. j-dik oszlopa. Tehát n darab lineáris egyenletrendszert kell megoldanunk, de ezek baloldala mind ugyanaz. Mivel a Gauss elimináció lépéseit csupán a baloldali együtthatómátrix irányítja, ezeket az egyenletrendszerek egyidejűleg is megoldhatjuk. Ezt a módszert *szimultán Gauss elimináció*nak nevezzük.