

DEBRECENI EGYETEM
MATEMATIKAI INTÉZET

Feladatok matematikából 3. rész

fizika és villamosmérők alapszakos hallgatók részére

Debrecen, 2006 ősz

Határozatlan integrál

1. Számítsuk ki a következő integrálokat!

a.) $\int \frac{1}{x^2} dx$

k.) $\int (t^2 + 6t - 5) dt$

b.) $\int \frac{x^2 - 1}{x + 1} dx$

l.) $\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} dx$

c.) $\int \frac{x + 1}{\sqrt{x}} dx$

m.) $\int \left(2e^x + \frac{5}{x} + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx$

d.) $\int (1 + e^{x-1}) dx$

n.) $\int \frac{1}{x + 5} dx$

e.) $\int (x^4 + 3x^2 + 5x + 2) dx$

o.) $\int (2x - 3)^{10} dx$

f.) $\int (1 - x^2)^2 dx$

p.) $\int \sqrt[3]{1 - 3x} dx$

g.) $\int x(1 - x)(1 - 2x) dx$

q.) $\int \frac{1}{\sqrt{2 - 5x}} dx$

h.) $\int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) dx$

r.) $\int \frac{1}{5 + 2x^2} dx$

i.) $\int \frac{x + 1}{\sqrt{x}} dx$

s.) $\int \frac{1}{2 + 3x^2} dx$

j.) $\int \frac{1 + x^2}{x^2} dx$

t.) $\int \frac{1}{\sqrt{2 - 3x^2}} dx$

2. Határozzuk meg a következő integrálokat!

a.) $\int \frac{x + 1}{x^2 + 2x - 1} dx$

g.) $\int \frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}} dx$

b.) $\int \frac{x - 2}{x(x - 4)} dx$

h.) $\int \frac{2x}{1 + x^2} dx$

c.) $\int \frac{1}{x \ln x} dx$

i.) $\int \frac{x}{2 + 3x^2} dx$

d.) $\int \operatorname{tg} x dx$

j.) $\int \frac{5x}{\sqrt{1 - 2x^2}} dx$

e.) $\int \frac{\sin 2x}{1 + \sin^2 x} dx$

k.) $\int \frac{2x + 5}{1 + 3x^2} dx$

f.) $\int \frac{8x - 7}{4x^2 - 7x + 11} dx$

l.) $\int \frac{1 + x}{2 + 3x^2} dx$

3. Határozzuk meg a következő határozatlan integrálokat!

a.) $\int x e^{-x^2} dx$	f.) $\int \sin^3 x \cos x dx$
b.) $\int \frac{3x}{(2+3x^2)^3} dx$	g.) $\int \frac{3+x}{\sqrt{5-2x^2}} dx$
c.) $\int \frac{x}{(1+x^2)^2} dx$	h.) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}} dx$
d.) $\int \frac{x}{(8x^2+27)^{\frac{2}{3}}} dx$	i.) $\int \frac{\operatorname{arc\,tg}^3 x}{1+x^2} dx$
e.) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$	j.) $\int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x} dx$

4. Számítsuk ki a következő határozatlan integrálokat!

a.) $\int x e^x dx$	i.) $\int (x^3 + 3x^2 + 1)e^x dx$
b.) $\int x^3 e^x dx$	j.) $\int (x^2 + 1) \cos x dx$
c.) $\int x \sin x dx$	k.) $\int (x^3 - 3x^2 - 7) \sin x dx$
d.) $\int x \ln x dx$	l.) $\int (x^2 + 1) \ln x dx$
e.) $\int e^x \cos x dx$	m.) $\int x^7 \ln x dx$
f.) $\int e^x \cos^2 x dx$	n.) $\int x \operatorname{arc\,tg} x dx$
g.) $\int e^{-x} \sin x dx$	o.) $\int \operatorname{arc\,tg} x dx$
h.) $\int \ln x dx$	p.) $\int \arcsin x dx$

5. Számítsuk ki a következő integrálokat!

a.) $\int \frac{x^3}{(x+2)^4} dx$	
b.) $\int \frac{1}{\sqrt{x+1} + (\sqrt{x+1})^3} dx$	
c.) $\int \frac{e^{4x}}{1+e^x} dx$	
d.) $\int \sqrt{e^x - 1} dx$	(Alkalmazzuk az $e^x - 1 = t^2$ helyettesítést!)

e.) $\int \operatorname{tg}^3 x dx$ (Alkalmazzuk az $t = \operatorname{tg} x$ helyettesítést!)

f.) $\int \sqrt{x} e^{\sqrt{x}} dx$

g.) $\int \sqrt{1-x^2} dx$ (Alkalmazzuk az $x = \sin t$ helyettesítést!)

h.) $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx$

6. Határozzuk meg a következő integrálokat!

a.) $\int \frac{1}{1-x^2} dx$

h.) $\int \frac{5}{(x-2)(x+5)} dx$

b.) $\int \frac{1}{x^2-2x-3} dx$

i.) $\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} dx$

c.) $\int \frac{1}{x^2+2x+6} dx$

j.) $\int \frac{x}{x^2-2x-3} dx$

d.) $\int \frac{2x+3}{x^2+3x-10} dx$

k.) $\int \frac{3x+1}{x^2+5x+6} dx$

e.) $\int \frac{x^3}{x^2+1} dx$

l.) $\int \frac{1+2x}{x^2-4x-5} dx$

f.) $\int \frac{1}{x^3-x} dx$

m.) $\int \frac{2x}{1+x} dx$

g.) $\int \frac{1}{e^x + e^{-x} + 2} dx$

n.) $\int \frac{x^2-2x+1}{x^2+2x-3} dx$

7. Alkalmos helyettesítéssel számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat!

a.) $\int \frac{1}{1+2\cos x} dx$ (Alkalmazzuk az $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ helyettesítést!)

b.) $\int \frac{dx}{1+\sin x}$

c.) $\int \frac{dx}{1+\cos x}$

d.) $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}} dx$

e.) $\int \frac{dx}{\cos x}$

f.) $\int \frac{dx}{5+3\cos x}$

g.) $\int \sin(\ln x) dx$

8. Integráljuk az alábbi racionális törtfüggvényeket, illetve helyettesítéssel ilyenekre visszavezethető függvényeket.

a.) $\frac{1}{x^3-8}$

b.) $\frac{1}{x^2-2x-3}$

c.) $\frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}$

d.) $\frac{x-3}{x^3-x}$

e.) $\frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)}$

f.) $\frac{\ln x + 1}{x^x - 1}$

Határozott integrál

9. Számítsuk ki a következő határozott integrálokat!

$$\int_2^{10} 1 \, dx ; \quad \int_{22}^3 1 \, dx ; \quad \int_0^{2\pi} \sin x \, dx ; \quad \int_{\sqrt{2}}^{-1} \cos x \, dx ;$$

$$\int_{-1}^{\pi} x^2 \, dx ; \quad \int_1^{100} \frac{1}{x} \, dx ; \quad \int_2^3 \left(e^x + x^2 + \frac{1}{x} \right) dx .$$

10. Legyen

$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{ha } x < 1 \\ 3 & \text{ha } x = 1 \\ -1 & \text{ha } x > 1 \end{cases} ; \quad g(x) = \begin{cases} -1 & \text{ha } x < 0 \\ 2x & \text{ha } x > 0. \end{cases}$$

Mennyi a következő integrálok értéke ?

$$\int_{-10}^{20} f(x) \, dx ; \quad \int_{-5}^{-3} f(x) \, dx ; \quad \int_1^1 f(x) \, dx ;$$

$$\int_0^3 g(x) \, dx ; \quad \int_{-1}^{-2} g(x) \, dx ; \quad \int_{-10}^{30} g(x) \, dx .$$

Mennyi $\int_a^b f(x) \, dx$ és $\int_a^b g(x) \, dx$?

11. Számítsuk ki a következő integrálokat!

$$\int_0^3 x^2 e^{2x} \, dx ; \quad \int_{-2}^2 \frac{2x}{(x^2 - 100)^7} \, dx ; \quad \int_{\pi/3}^{\pi/2} \operatorname{ctg}(x) \, dx ; \quad \int_{0,5}^1 \sqrt{1-x^2} \, dx .$$

12. Számítsuk ki a következő határozott integrálokat!

$$\int_2^3 \sqrt{x} e^{\sqrt{x}} \, dx ; \quad \int_4^{12} \frac{1}{1-x^2} \, dx ; \quad \int_0^e \frac{e^{4x}}{1+e^x} \, dx ; \quad \int_2^4 \frac{1}{x^3-x} \, dx .$$

13. Ha egy $[a, b]$ -n értelmezett $f(x)$ függvény görbéjét megforgatjuk az x -tengely körül, akkor az általa "határolt" forgástest térfogata

$$V = \int_a^b f^2(x) \pi \, dx .$$

Ezt felhasználva számítsuk ki egy gömb és egy kúp térfogatát!

14. Léteznek-e a következő improprius integrálok ? Ha igen, számítsuk ki őket!

$$\int_0^{\infty} \ln x \, dx ; \quad \int_0^e \ln x \, dx ; \quad \int_{-1}^1 \ln |x| \, dx ; \quad \int_{-\infty}^1 \frac{1}{x} \, dx ; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} \, dx ; \quad \int_{+\infty}^0 e^{-x} \, dx ;$$

$$\int_{-\infty}^0 e^x \, dx ; \quad \int_{-\infty}^1 \frac{1}{x^2} \, dx ; \quad \int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2} \, dx ; \quad \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx ; \quad \int_2^{\infty} \frac{3}{\sqrt{x}} \, dx .$$

15. Léteznek-e az alábbi improprius integrálok ? Ha igen, számítsuk ki őket !

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3} ; \quad \int_2^{\infty} \frac{dx}{(1-x)^2} ; \quad \int_4^{\infty} x e^{-2x} \, dx ; \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2+6x}} ;$$

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-x/3} \, dx ; \quad \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x}} ; \quad \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}} ; \quad \int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{x}} \, dx .$$

16. Legyen $f(x) = (\sqrt{|x|} \cdot (1-x))^{-1}$. Melyek léteznek a következő integrálok közül ?

$$\int_{-\infty}^2 f(x) \, dx ; \quad \int_2^0 f(x) \, dx ; \quad \int_0^{0.5} f(x) \, dx ; \quad \int_{0.5}^1 f(x) \, dx ;$$

$$\int_1^2 f(x) \, dx ; \quad \int_2^{\infty} f(x) \, dx ; \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx .$$

17. Mennyi $\int_{\pi}^{-\pi} x^2(1-2x)^{20} \, dx ; \quad \int |x-2| \, dx ; \quad \int_0^4 |x-2| \, dx ; \quad \int |x|e^x \, dx ;$

$$\int_{-10}^{10} |x|e^x \, dx ; \quad \int \ln |x| \, dx ; \quad \int_{-2}^1 \ln |x| \, dx ; \quad \int x|x| \, dx ; \quad \int_{-2001}^{1976} x|x| \, dx ;$$

18. Következik -e a $\lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A f(x) \, dx$ határérték létezéséből,

hogyan $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx$ konvergens ?

19. Mennyi $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x \, dx$ és $\int_0^2 \sqrt{4-x^2} \, dx$. Próbáljuk meg az eredményt megtalálni a primitív függvény kiszámítása nélkül !
20. Tegyük fel, hogy a GNP növekedési üteme az n -edik évben $f(n) \frac{\%}{\text{év}}$. Hányszorosára nő ekkor a GNP az n_1 és n_2 -edik évek között ?
21. Legyen $A = \{(x, y) \mid y \geq x^2\}$ és $B = \{(x, y) \mid y \leq x + 2\}$. Mennyi $A \cap B$ területe ?
22. Mennyi az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipszis területe ?
23. Mennyi az $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ függvény görbéjének a hossza $x = -0,5$ és $x = 1$ között ?
24. Forgassuk meg az y tengely körül az $y = 8 - 2x - x^2$ egyenletű parabolának az első síknegyedbe eső részét ! Mekkora térfogatú test keletkezik ?

Differenciálegyenletek

25. Oldjuk meg a következő differenciálegyenleteket !

a) $y' = e^x \sin x$	f) $xy' = 1 + y^2$
b) $(1 + \sin x)y' = 1$	g) $1 + y^2 + xy' = 0$
c) $(1 + e^x)y' = e^x$	h) $y' \sin x = y \ln y$
d) $y' - yx = yx^3$	i) $(1 - x)y' + y^2 = 0$
e) $x^2 + 5 = xy' y'$	j) $xe^y y' - x^2 + x = 0.$

26. Határozzuk meg az $(1 + e^x)yy' = e^x$ differenciálegyenlet $y(1) = 1$ kezdeti feltételt teljesítő megoldását !

27. Oldjuk meg a következő differenciálegyenleteket !

a) $y' = (x - y)^2 + 1$ b) $y' = \sin(x - y)$ c) $(y')^2 = x + y + 1$ ($y' > 0$)

(Javaslat: előbb alkalmazzunk helyettesítést)

28. Oldd meg !

a) $x + y + xy' = 0$	b) $xy' = y \ln y - y \ln x$
c) $(x - y)y' = x + y$	d) $x^2 + xy + y^2 - x^2 y' = 0$
e) $y' = \frac{1 - \frac{y}{x}}{1 - 2\frac{y}{x}}$	f) $(3y + 2x)y' = 6y + 4x$
g) $yy' + 2xy' + 2y = 0$	h) $y' = \frac{y-2x}{y-x}.$

(Javaslat: előbb alkalmazzuk $z = \frac{y}{x}$ helyettesítést !)

29. Oldjuk meg a következő lineáris differenciálegyenleteket !

a) $y' = y - x$	g) $y' - 2y - x = e^x \sin x$
b) $xy' - y = xe^{-x}$	h) $y' + y \operatorname{tg} x = \sin x$
c) $y' + 3y - 3e^{-2x} = 0$	i) $y' \sin x + y \cos x = 2 - \cos^2 x$
d) $y' = \frac{y}{x} - 2x^2$	j) $y' - y - e^x = 0$
e) $xy' - 3y + 5x = 0$	k) $x^2 y' = xy + 3y$
f) $(x + 1)y' - y = 0$	l) $y' x = 2y - x^4.$

30. Oldja meg az $xy' + y = xe^x$ differenciálegyenletet! Határozza meg a megoldásfüggvények határértékét $x \rightarrow \infty$ esetén!

a) $xy' + y = xe^{-x}$ b) $xy' + y = -3x^2$

31. Jelölje $y(x)$ egy iparág dolgozóinak összlétszámát az x időpillanatban. Tegyük fel, hogy a létszámcsökkenés sebessége olyan hogy $y'(x) = -\lambda y(x)$, ahol $\lambda > 0$, az iparágra jellemző kilépési együttható, konstans. $x = 0$ -ban a kezdő létszám ismert. Mennyi idő alatt csökken le a kezdő létszám a $3/4$ -ére ?