Sorozatok konvergenciája

1. Állapítsuk meg, hogy az alábbi sorozatok közül melyek konvergensek, melyek divergensek.

$$a_n = (-1)^n, \quad b_n = 2^n, \qquad c_n = (0,3)^n, \qquad d_n = 8\sin(7,2n^\circ),$$
$$e_n = \log_2(n^2+n), \qquad f_n = \frac{2n+1}{7n-3}, \qquad g_n = \sin(2\pi n^2),$$
$$n = 1,2,3,4\dots\ .$$

2. Vizsgáljuk meg a következő sorozatokat monotonítás és korlátosság szempontjából. Határozzuk meg a sorozatok határértékét is.

(a) $a_n = \dfrac{1+2+\cdots+n}{(n+1)(n+10)}$; (b) $a_n = \dfrac{1+2+\cdots+n}{n+4} - \dfrac{n}{2}$; (c) $a_n = \dfrac{5^{n+1}}{n!}$.

3. Vizsgáljuk meg, hogy hányadik tagtól kezdve esnek a sorozat elemei a határérték 10^{-2} sugarú környezetébe:

(a) $a_n = \dfrac{n+2}{3n-8}$; (b) $a_n = 1 - \dfrac{(-1)^n}{n}$.

4. Határozzuk meg a követketkező sorozatok határértékét, amennyiben az létezik.

(a) $a_n = \dfrac{\sqrt[3]{4n^2+3n}}{n+2}$;

(b) $a_n = \sqrt{n^2+1} - n$;

(c) $a_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1}$;

(d) $a_n = \dfrac{\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}+\sqrt[4]{n}+\sqrt[5]{n}}{\sqrt{5n+1}}$;

(e) $a_n = \dfrac{\sqrt{2n^2+2n+3}-\sqrt{2n^2+6n+5}}{\sqrt{3n^2+5n+1}-\sqrt{3n^2+7n-1}}$;

(f) $a_n = \left(\dfrac{n-3}{n-5}\right)^5$;

(g) $a_n = \left(\dfrac{n^2+2}{n^2+3}\right)^{n^2+5}$;

(h) $a_n = \dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3^{n-1}}}$;

(i) $a_n = (1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\dots\left(1+\frac{1}{n}\right)$;

(j) $a_n = \dfrac{10^n+10^2}{5^n+2^n+10^5}$.

5. Mennyi a következő sorozatok határértéke?

$$a_n = \frac{2+8n}{3+9n}; \quad b_n = \log_{10}\left(\frac{2+8n}{3+9n}\right); \quad c_n = \frac{2+8n}{3+9n} + \log_{10}\left(\frac{2+8n}{3+9n}\right);$$
$$d_n = \frac{n^3+7n+49n^2}{231a-1+13n^2}; \quad e_n = \frac{2n^4-n^3+3n^2-n+23}{n^5-2n^4-n+3n^2};$$

6. Tudjuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{8n+3}{4n-23}\right) = 2$. Egy adott $\varepsilon > 0$ számhoz határozzunk meg egy olyan N természetes számot, melyre $\left|\frac{8m+3}{4m-23} - 2\right| < \varepsilon$, ha $m > N$.

7. Tegyük fel, hogy $a_n \to +\infty$. Maximum hány torlódási pontja lehet ennek a sorozatnak?

8. Tegyük fel hogy $a_n \to +\infty$, $b_n \to 0$. Lehetséges-e, hogy $a_nb_n \to 0$, $a_nb_n \to -1, 2, 3$, $a_nb_n \to \infty$, $a_nb_n \to -\infty$?

9. Bizonyítsuk be, hogy ha $a_n \to a$, és $a_n > 0$ bármely $n \in N$-re, akkor $\sqrt{a_n} \to \sqrt{a}$.

10. Tudjuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2,71\ldots$.

    Mutassuk meg, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n = \sqrt{e}$. Mennyi $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{kn}\right)^n$?

11. Tegyük fel, hogy $a_n \to +\infty$. Bizonyítsuk be, hogy $\log_2 a_n \to +\infty$.

12. Tegyük fel, hogy $a_n \to 13$. Legyen $b_n = a_{n+1} - a_n$. Bizonyítsuk be, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

13. Legyen $a_1 = q$, $a_2 = q + q^2$, $a_3 = q + q^2 + q^3, \ldots$. Milyen q esetén konvergens ez a sorozat?

14. Legyen $a_1 = \frac{1}{1\cdot 2}$, $a_2 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3}$, $a_3 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4}, \ldots$. Bizonyítsuk be, hogy az a_n sorozat konvergens.

15. Legyen $a_1 = 1$, $a_2 = 1 + \frac{1}{2^2}$, $a_3 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}, \ldots$. Bizonyítsuk be, hogy az a_n sorozat konvergens.

16. Számítsuk ki a $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ határértéket, ahol

    (a) $s_n = \dfrac{1}{1\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$;

    (b) $s_n = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{8} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+2)}$;

    (c) $s_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)}$.

Sorok konvergenciája

17. Számítsuk ki a következő végtelen sorok összegét:

$$\text{(a)}\quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{5^{2k+1}}; \quad \text{(b)}\quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1+(-1)^k}{10^k}; \quad \text{(c)}\quad \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5^k} - \frac{2}{5^{k+1}}\right).$$

18. Konvergensek-e a következő sorok:

$$\text{(a)}\quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k}; \qquad \text{(b)}\quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1}; \qquad \text{(c)}\quad \frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\frac{1}{11}+\dots;$$

$$\text{(d)}\quad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln k}; \qquad \text{(e)}\quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{k!}; \qquad \text{(f)}\quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k-1}{(2k)!};$$

$$\text{(g)}\quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}; \qquad \text{(h)}\quad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\sqrt{k}}; \qquad \text{(i)}\quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k(k+2)};$$

$$\text{(j)}\quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{k^3+1}.$$

19. A következő feladatokban alkalmazzuk a hányados-, illetve gyökkritériumot.

$$\text{(a)}\quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{(3k+4)5^k}; \qquad \text{(b)}\quad \sum_{k=1}^{\infty} k^{100} 2^{-2k}; \qquad \text{(c)}\quad \sum_{k=1}^{\infty} k! 2^{1-k};$$

$$\text{(d)}\quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!}{k^k}; \qquad \text{(e)}\quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k+1}{3k}\right)^k.$$

20. Számítsuk ki a következő hatványsorok konvergenciasugarát:

$$\text{(a)}\quad \sum_{k=1}^{\infty} k x^k; \qquad \text{(b)}\quad \sum_{k=0}^{\infty} 3^{k+1} x^k; \qquad \text{(c)}\quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Függvények határértéke

21. Az $f(x) = \frac{5}{2-x}$ függvény az $x = 2$ helyen nincs értelmezve. Közelítsük meg a 2-t először az
$$x_n^{(1)} = 1 + \frac{n}{n+1} \quad \text{sorozattal, majd az} \quad x_n^{(2)} = 2 + \frac{1}{n}$$
sorozattal, és határozzuk meg a megfelelő függvényértékek sorozatának határértékét. Értelmezzük az eredményt.

22. Határozzuk meg a következő határértékeket:

(a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-2x-3}{x^2-5x+6}$;

(b) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{2-\sqrt{x-1}}{x^2-25}$;

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-x}{x^3+x^2+x}$;

(d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x^2}{\sqrt{x}-\sqrt{2-x}}$;

(e) $\lim\limits_{x\to(-a)} \dfrac{a^2-x^2}{x^3+a^3}$;

(f) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{2}{1-x^2} - \dfrac{3}{1-x^3}\right)$;

(g) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+3x-1}{2x^2-x+1}$;

(h) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$;

(i) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{1+4x^2}}{1-x}$;

(j) $\lim\limits_{x\to\infty} \left[x\left(\dfrac{1}{a+\frac{1}{x}} - \dfrac{1}{a}\right)\right]$;

(k) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+5x} - x\right)$;

(l) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[4]{x^3+x}-x}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x}}$;

(m) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x+\sqrt[3]{x^3+1}}$;

(n) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1-\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[3]{2x^2}+\sqrt[4]{x^2+x}}$;

(o) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x - \sqrt{\dfrac{4x^3+3x^2}{4x-3}}\right)$;

(p) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[4]{x^5+6x^2+3}-x^2}{\sqrt[3]{x^5+4x-7}+2x^2}$;

(q) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{ex^2+5-x}{x^3-\sqrt{2}x+2}$;

(r) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3-5x+1}{1+x^2-2x^3}$;

(s) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1-x+ex^4}{\frac{1}{e}+\sqrt[3]{2}x^2-\frac{1}{5}x^4}$;

(t) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^5+x^4-2x+1}{x^2-x^3-3x+2}$;

(u) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^{1+2x}$;

(v) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x+3}{1+2x}\right)^{x+2}$;

(w) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^3}{x^3-1}\right)^{\frac{x^3}{2}}$;

(z) $\lim\limits_{x\to 0} (1+3\,\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$.

23. Igazoljuk, hogy fennállnak a következő összefüggések:

   (a) $\lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}} = e$;

   (b) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[x]{1+3x} = e^3$;

   (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e, \qquad a>0,\ a\neq 1$;

   (d) $\lim\limits_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{n}{x}} = e^{na}, \qquad a>0,\ n\in N$.

24. Döntsük el, monotonok-e a következő függvények:

   (a) $f(x) = 1-x^2 \qquad x<1$;

   (b) $f(x) = \dfrac{1}{x+1} \qquad x\neq -1$;

   (c) $f(x) = \dfrac{x}{4-x^2} \qquad -2<x<2$;

   (d) $f(x) = |1-x^2| \qquad x>1$;

   (e) $f(x) = \left|\dfrac{\sin x}{|\sin x|}\right| \qquad x\neq k\pi,\ k\in Z$;

   (f) $f(x) = 1-\sin 4x \qquad 0\le x\le \pi/2$.

25. Lehetséges-e, hogy nem folytonos függvények összege, illetve szorzata folytonos?

26. Bizonyítsuk be, hogy minden páratlan fokú, valós együtthatós egyenletnek van valós gyöke.

27. Vizsgáljuk meg, hogy viselkednek a következő függvények szakadási helyeik környezetében és a végtelenben:

   (a) $f(x) = \dfrac{3}{x-1}$;

   (b) $f(x) = \dfrac{(x-2)^2}{x^2-5x+6}$;

   (c) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-x}$;

   (d) $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x^2(x-3)^3}$;

   (e) $f(x) = 3^{\frac{1}{x+1}}$;

   (f) $f(x) = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{x}$;

   (g) $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}x^2, & \text{ha } x\le 2 \\ x, & \text{ha } x>2; \end{cases}$

   (h) $f(x) = \begin{cases} 1-x^2, & \text{ha } x\le 0 \\ (1-x)^2, & \text{ha } 0<x\le 2 \\ 4-x, & \text{ha } x>2. \end{cases}$

28. Állapítsuk meg, hogy vannak-e olyan pontok, melyben az

$$f(x) = \begin{cases} 4-x^2, & \text{ha } x \text{ racionális} \\ 4+x^2, & \text{ha } x \text{ irracionális} \end{cases}$$

függvény folytonos.

Egyváltozós függvények deriváltja

29. Számítsuk ki az $f(x) = 1/x^2$ függvény deriváltját $x = 2$-ben, azaz határozzuk meg a $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1/x^2 - 1/2^2}{x-2}$ határértéket.

30. Bizonyítsuk be, hogy az $f(x) = |x|$ függvény nem differenciálható $x = 0$-ban. Ehhez meg kell adnunk egy olyan $x_n \to 0$ sorozatot, hogy az $\dfrac{|x_n| - |0|}{x_n - 0} = \dfrac{|x_n|}{x_n}$ sorozat nem konvergens.

31. Ábrázoljuk az

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 0 \\ x^2 & \text{ha } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{és a} \quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 0 \\ x & \text{ha } x \geq 0 \end{cases}$$

függvényeket. Differenciálható-e f és g $x = 0$-ban?

32. Deriváljuk a következő függvényeket:

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{5}; \qquad g(x) = x + \frac{4}{2x^2}; \qquad h(x) = \frac{2+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}};$$
$$i(x) = \sin 2x; \qquad j(x) = 2\sin x \cos x; \qquad k(x) = \sin x^3;$$
$$\ell(x) = \sin(\cos x); \qquad m(x) = \ln(\sin x); \qquad n(x) = x^x;$$
$$o(x) = x^{\,\operatorname{tg} x}; \qquad p(x) = \left(\operatorname{tg}\sqrt{x^2 + \cos x}\right)^3; \qquad q(x) = \operatorname{tg} x / \cos x.$$

33. Adjuk meg a következő függvények deriváltját:

$$f(x) = \ln \frac{\sqrt{2x+1}}{\sin x}; \qquad g(x) = \ln\left(\frac{\cos x \sin(2x)^2}{x^3 + (3x-1)^2}\right);$$
$$h(x) = x^{\cos x}; \qquad i(x) = x^2 + (\sin x)^{\sin x};$$
$$j(x) = (\ln 2x)^{3x^2}; \qquad k(x) = (3x^2)^{\sqrt[3]{x-4}};$$
$$\ell(x) = \lg\{5x^3 + 3x^2 - \sin^2(2-x)\}; \qquad m(x) = \left(\left(\sqrt[7]{(x-4)}\right) x^6\right)^{\sqrt[3]{x-4}}.$$

34. Határozzuk meg az

$$(a) \quad y = \arcsin x; \qquad (b) \quad y = \operatorname{arc\,tg} x;$$
$$(c) \quad y = \operatorname{arc\,ctg} x; \qquad (d) \quad y = \arccos x.$$

függvény deriváltját.

35. Deriválhatók-e az alábbi függvények? Ha igen, mennyi a differenciálhányadosuk?

$$f(x) = |x^3|; \qquad g(x) = |\ln x|; \qquad h(x) = |\ln x^3|; \qquad i(x) = |x-2| \cdot |x-3|.$$

36. Legyen f egy páros, g pedig egy páratlan függvény, azaz teljesüljön $f(x) = f(-x)$ és $g(x) = -g(-x)$. Mit mondhatunk ekkor f és g deriváltjáról?

37. Tekintsük az $f(x) = -x^3 + 2x^2 - x$ függvényt. Hol vannak f helyi szélsőértékei? Adjuk meg azokat az intervallumokat, ahol f monoton növekvő, illetve monoton csökkenő.

38. Legyen $f(x) = x^2$. Lagrange tétele szerint létezik egy olyan $z \in (1,2)$ szám, hogy $\dfrac{2^2 - 1^2}{2-1} = 3 = f'(z)$. Keressük meg z-t.

39. Ha f differenciálható x_0-ban, és f-nek ott helyi szélső értéke van, akkor $f'(x_0) = 0$. Adjunk meg egy olyan konkrét függvényt, hogy $f'(x_0) = 0$, de f-nek nincs helyi szélsőértéke x_0-ban.

40. Határozzuk meg a következő függvények magasabbrendű deriváltjait:

$$
\begin{array}{lll}
(a) & f(x) = 8x^4 + 4x^5 + 3x^2 + 5 & f^{(5)}(x) = \\
(b) & f(x) = e^{-x^2} & f^{(2)}(x) = \\
(c) & f(x) = e^x \cos x & f^{(3)}(x) = \\
(d) & f(x) = x^2 \ln x & f^{(2)}(x) = \\
(e) & f(x) = \operatorname{arc\,tg} x & f^{(3)}(x) =
\end{array}
$$

41. Vizsgáljuk meg a következő függvényeket, van-e szélsőértékük, s ha van, milyen. Határozzuk meg azokat az intervallumokat, amelyekben a függvény monoton.

$$
\begin{array}{llll}
(a) & f(x) = x^4 - x^2; & (b) & f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}; \\
(c) & f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}; & (d) & f(x) = \sin x + \cos x; \\
(e) & f(x) = x\sqrt{1-x^2}; & (f) & f(x) = -x \ln x.
\end{array}
$$

42. A következő függvényeknél vizsgáljuk meg, hogy a függvény görbéje mely intervallumban konvex, illetve konkáv. Határozzuk meg a függvény inflexiós pontjának koordinátáit is.

$$
\begin{array}{llll}
(a) & f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 9; & (b) & g(x) = (x-2)^2 - 5; \\
(c) & h(x) = \dfrac{4x}{x^2+1}; & (d) & i(x) = 1 + \left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^2; \\
(e) & j(x) = \dfrac{x^2}{2} + \ln x; & (f) & k(x) = \operatorname{arc\,tg} x; \\
(g) & \ell(x) = \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}); & (h) & m(x) = x(\ln x)^{-1}.
\end{array}
$$

43. Vizsgáljuk meg a következő függvényeket. (Határozzuk meg a gyököket, határértékeket, azokat az intervallumokat, ahol monoton növekvő, illetve csökkenő, konvex illetve konkáv, végül ábrázoljuk a függvényt.)

$(a)\quad f_1(x) = 8(x^3 - 9x);$ $\qquad (b)\quad f_2(x) = (x-1)^2(x+3)^2;$

$(c)\quad f_3(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 2x + 1};$ $\qquad (d)\quad f_4(x) = \dfrac{1 + x^3}{x^2};$

$(e)\quad f_5(x) = \dfrac{x}{(x-1)e^x};$ $\qquad (f)\quad f_6(x) = \sin 2x + 2\cos x;$

$(g)\quad f_7(x) = \dfrac{\sin x}{2 - \cos x}$ $\qquad 0 < x < 2\pi.$

44. L'Hospital szabály alkalmazásával határozzuk meg az alábbi határértékeket:

$(a)\quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos kx}{1 - \cos mx};$ $\quad (b)\quad \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{\ln(x+1)};$ $\quad (c)\quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{\sin x};$

$(d)\quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x};$ $\quad (e)\quad \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{a^{\ln x} - x};$ $\quad (f)\quad \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 5x};$

$(g)\quad \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\ln\left(\frac{x}{2}\right)}{x - 2};$ $\quad (h)\quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arc\,tg} x}{x};$ $\quad (i)\quad \lim\limits_{x\to +0} \dfrac{7^x - 5^x}{x^2};$

$(j)\quad \lim\limits_{x\to +0} 2x \ln x;$ $\quad (k)\quad \lim\limits_{x\to +0} x^{\sin x};$ $\quad (l)\quad \lim\limits_{x\to 0} 2x \operatorname{ctg} 3x;$

$(m)\quad \lim\limits_{x\to +0} (\sin x)^{\frac{1}{x}};$ $\quad (n)\quad \lim\limits_{x\to 0} x^2 e^{\ x^{\frac{1}{2}}}\ ;$ $\quad (o)\quad \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2 - 2x - 1}{5x^2 - x - 4};$

45. Határozuk meg az $y = \cos x$ függvény Maclaurin-sorát, valamint az $x = \pi$ helyen a Taylor sorát.

46. Legyen $g(x) = 6x^6 - 25x^5 + 8x^4 - 9x^3 + 4x^2 + 1$. Írjuk fel a függvény $x = 2$ helyhez tartozó Taylor-formuláját, azaz alakítsuk át a függvényt úgy, hogy benne csak az $(x-2)$ hatványai szerepeljenek.

47. Határozzuk meg az $y = e^x$ függvény Maclaurin-sorát, valamint az $x = 1$ helyen a Taylor-sorát.

48. A $K = 1$ cm kerületű téglalapok közül melyiknek a legnagyobb a területe?

49. Az 1 m^2 területű téglalapok közül melyiknek a legkisebb a kerülete?

50. Az $r = 2$m sugarú körbe írható téglalapok közül melyiknek a legnagyobb a területe? És a kerülete?