Komplex számok

1. Mennyi az alábbi komplex számok valós és képzetes része?
   $-7+3i$, $8+0i$, $0+3i$, -41, $5i$, 0, 7, $-i+1$

2. Számítsuk ki a következő összegeket!
   $2+3$, $2i+3i$, $(5+4i)+(7+3i)$, $(3-i)+(3+i)$, $(2+i)-4i+(3+3i)$

3. Végezzük el a következő szorzásokat!
   $4\cdot 2$, $4\cdot(-i)$, $(-i)\cdot(-i)$, $(3-2i)\cdot i$, $(3-2i)\cdot(3+2i)$, $(5+7i)\cdot(1-i)$, $(1+i)^3$

4. Mennyi i^0, i^1, i^2, i^3, i^4? Mennyi i^{100}, i^{101}, i^{102}, i^{103}, i^{104}?
   Mennyi i^{4k}, i^{4k+1}, i^{4k+2}, i^{4k+3}? (k egész szám)

5. Konjugáljuk az alábbi komplex számokat!
   0, -3, i, $-2i$, $1+i$, $-7-3i$

6. Számítsuk ki a következő hányadosokat!
   $\frac{4}{2}$, $\frac{4i}{-2i}$, $\frac{3+2i}{i}$, $\frac{3+2i}{3-2i}$, $\frac{8}{2-7i}$, $\frac{6+3i}{-4+i}$

7. Hozzuk algebrai alakra az alábbi komplex számokra vonatkozó kifejezéseket!
   (a) $\frac{2}{(1-i)(3+i)}$
   (b) $\frac{1}{(3+4i)^2}$
   (c) $\frac{2+i}{i(-3+4i)}$
   (d) $\frac{\sqrt{3}+i}{(1-i)(\sqrt{3}-i)}$
   (e) $\frac{i}{(1-i)(1-2i)(1+2i)}$

8. Állapítsuk meg, hogy milyen komplex számokra igaz
   a) $\overline{z}=z$ b) $\overline{z}=i\cdot z$ c) $\overline{z}=\frac{1}{z}$ d) $\overline{z}=5\cdot z$.

9. Ábrázoljuk a következő komplex számokat a komplex számsíkon!
   $1+i$, 1, 0, i, $-2i$, -1, $-i$, -1, $3+2i$, $3-2i$

10. Hol helyezkednek el az alábbi halmazok a komplex számsíkon?
    $A=\{z:\mathrm{Im}(z)>1\}$, $B=\{z:\mathrm{Re}(z)\le 0\}$, $A\cap B$, $A\cup B$, $B-A$

11. Határozzuk meg a következő komplex számok abszolút értékét!
    0, 1, i, $-i$, $77+77i$, $\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i$, $-1-i$, $-7i$

12. Bizonyítsuk be, hogy $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$ és $\overline{\left(\frac{u}{v}\right)} = \frac{\overline{u}}{\overline{v}}$.

13. Bizonyítsuk be, hogy $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ és $\frac{|u|}{|v|} = \left|\frac{u}{v}\right|$!

14. Írjuk át az alábbi komplex számokat trigonometrikus alakba!

    $2,\ i,\ 0,\ -i,\ -3,\ 1-i,\ 1+i,\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$

15. Legyen $u = 2\cdot(\cos 17^\circ + i\sin 17^\circ)$, $v = 5\cdot(\cos 41^\circ + i\sin 41^\circ)$.

    Mennyi $u\cdot v$, u/v, u^2, u^3, u^{-1}, u^{-2}, $(u\cdot v)^{10}$?

16. Tudjuk, hogy $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^3 = (\cos 3\alpha + i\sin 3\alpha)$. Használjuk fel ezt az összefüggést $\cos 3\alpha$ és $\sin 3\alpha$ kiszámítására!

17. Legyen $u = 64\cdot(\cos 48^\circ + i\sin 48^\circ)$. Számítsuk ki u második, harmadik és negyedik gyökeit!

18. Ábrázoljuk a komplex számsíkon 1-nek az összes n-edik gyökeit $n = 2,\ 3,\ 4$ és 5-re! Milyen alakzatokat feszítenek ki az egységgyökök, mint csúcspontok?

19. Oldjuk meg a következő egyenleteket a komplex számok körében!

    $(2+3i)\cdot z - 4i = 0$, $2\cdot i\cdot z^2 + 2\cdot i\cdot z + 1 = 0$, $(3+2i)z^2 - 4z + (2-i) = 0$.

20. Ábrázoljuk a komplex számsíkon a következő halmazokat!

    $A = \{z : |z| \le 1\}, \quad B = \left\{z : \left|\frac{1}{z}\right| \le 1\right\}, \quad C = \left\{z : \frac{1}{|z-i|} > 2\right\}$

21. Odjuk meg a $z\cdot\overline{z} + z - (10+i) = 0$ egyenletet!

22. Oldjuk meg az $x^{200} - x^{100} + 1 = 0$ egyenletet!

23. Oldjuk meg az $x^2 + 2x + 10 = 0$ egyenletet! Számítsuk ki a két gyök szorzatát és összegét, majd hasonlítsuk össze az eredményt az együtthatókkal! Mit figyelhetünk meg (és miért)?

24. Határozza meg az alábbi egyenletek megoldásait a komplex számok halmazán!

    (a) $z^2 - 2iz - 5 = 0$
    (b) $z^2 - (2+3i)z - 1 + 3i = 0$
    (c) $z^2 + (5-2i)z - 5(1-i) = 0$
    (d) $z^2 + (1-2i)z - 2i = 0$

Lineáris egyenletrendszerek

25. Oldjuk meg a következő lineáris egyenletrendszereket!

$$\begin{array}{rrrrcr} x_1 & +x_2 & +2x_3 & +3x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & -x_2 & -x_3 & -2x_4 & = & -4 \\ 2x_1 & +3x_2 & -x_3 & -x_4 & = & -6 \\ x_1 & +2x_2 & +3x_3 & -x_4 & = & -4 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrcr} 2x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 2 \\ x_1 & +3x_2 & +x_3 & = & 5 \\ x_1 & +x_2 & +5x_3 & = & -7 \\ 2x_1 & +3x_2 & -3x_3 & = & 14 \end{array}$$

26. Adjuk meg a következő lineáris egyenletrendszerek összes megoldását!

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4 \\ 4 & 5 & -5 & -5 & 7 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 7 & -3 & 5 \\ 1 & 3 & -2 & 5 & -7 \\ 3 & -2 & 7 & -5 & 8 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

27. Tekintsük a következő lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{array}{rrrcl} 2x_1 & +3x_2 & -x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & +\lambda x_2 & +4x_3 & = & 5 \\ 7x_1 & +4x_2 & +2x_3 & = & k \end{array}$$

a) Legyen $k = 8$. λ milyen értékei esetén nincs megoldása az egyenletrendszernek?

b) Most legyen $\lambda = -2$. Milyen k esetén oldható meg az egyenletrendszer?

28. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Számítsuk ki AB-t, BA-t, AC-t, ADF-t, DF-et. Figyeljük meg a speciális esetek hatását!

29. Mikor invertálható az $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mátrix? Hogyan számíthatjuk ki az inverzét?

30. Egy mátrixot felső triangulárisnak mondunk, ha főátlója alatt mindenütt nulla áll. Mutassuk meg, hogy felső triangulári mátrixok szorzata is felső trianguláris.

31. Határozza meg a következő mátrixok inverzét, ha létezik!

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

32. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Mutassuk meg, hogy van olyan 3×3-as nemzéró mátrix, melyre $A \cdot X = 0$.

33. Mutassuk meg, hogy az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 1 \\ -14 & 8 & -5 \\ 11 & 14 & 3 \end{pmatrix}$$

mátrixok invertálhatók, és határozzuk mg az $A \cdot X = B$ egyenlet összes megoldását!

34. Egy $k \times n$ típusú A mátrix transzponáltján azt az A^T $n \times k$ típusú mátrixot értjük, mely (i, j)-dik eleme az A mátrix (j, i)-dik elemével egyezik meg $(i = 1, 2, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, k)$. Igazoljuk, hogy

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$
$$(AB)^T = B^T A^T$$

s ha A invertálható, akkor A^T is, és $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

35. Az A kvadratikus mátrixot szimmetrikusnak mondjuk, ha $A^T = A$, s antiszimmetrikusnak, ha $A^T = -A$. Mutassuk meg, hogy

a) szimmetrikus mátrixok összege is szimmetrikus

b) antiszimmetrikus mátrixok összege is antiszimmetrikus

c) bármely kvadratikus mátrix előáll egy szimmetrikus és egy antiszimmetrikus mátrix összegeként.

d) antiszimmetrikus mátrix főátlójában mindenütt nulla áll.

e) ha A és B szimmetrikus, és $AB = BA$, akkor AB is szimmetrikus.

Vektorterek

36. Alteret alkotnak-e a valós R^5 vektortérben a megadott részhalmazok?

    (a) $L = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid \; x_1 = x_5, x_2 = x_3 \}$

    (b) $L = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid \; x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \}$

    (c) $L = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid \; x_i$ páros szám $\; i = 1, 2, .., 5 \}$

    (d) $L = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid \; x_1$ és $x_5$racionális szám $\}$

    (e) $L = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid \; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \}$

    Hány dimenziósak az alterek?

37. Tekintsük a legfeljebb n-edfokú valós együtthatós polinomok $\mathcal{P}_n[t]$ valós vektorterét! Alteret alkotnak-e, s ha igen hány dimenziósat a megadott polinomhalmazok?

    (a) $L = \{ p \in \mathcal{P}_n[t] \mid p(1994) = 0 \}$

    (b) $L = \{ p \in \mathcal{P}_n[t] \mid p(t) = p(-t) \; \forall t \in R \}$

    (c) $L = \{ p(t) = a_n t^n + \ldots + a_1 t + a_0 \mid a_i \in Q, i = 1, \ldots, n \}$

    (d) $L = \{ p \in \mathcal{P}_n[t] \mid p(1) + p(-1) = 0 \}$

38. Igazoljuk, hogy az a, b, c vektorrendszer pontosan akkor lineárisan független, ha az $a + b + c, a + b, a$ vektorrendszer lineárisan független.

39. Mutassuk meg, hogy $a_1, a_2, \ldots, a_k$ pontosan akkor lineárisan független, ha $a_1, a_2 - a_1, \ldots, a_k - a_{k-1}$ is az.

40. Lineárisan függetlenek-e a megadott vektorrendszerek?

    a) a $\mathcal{P}_3[t]$ vektortérben: $p_1(t) = (t-1)^2, \; p_2(t) = t^2 - 1, \; p_3(t) = 2t^2 + 2t - 3$.

    b) a C^3 komplex vektortérben: $a = (1, 0, 1), \; b = (i, 1, 0) \; c = (i, 2, 1 + i)$.

41. Igazoljuk, hogy e_i, $i = 1, \ldots, n$ bázis R^n-ben, s adjuk meg az x vektor koordinátáit az adott bázisra vonatkozóan:

$n = 3$
$e_1 = (1, 1, 1)$
$e_2 = (1, 1, 2)$
$e_3 = (1, 2, 3)$
$x = (6, 9, 14)$

$n = 4$
$e_1 = (1, 1, 0, 1)$
$e_2 = (2, 1, 3, 2)$
$e_3 = (1, 1, 0, 0)$
$e_4 = (0, 1, -1, -1)$
$x = (0, 0, 0, 1)$

$n = 4$
$e_1 = (1, 2, 1, 2)$
$e_2 = (2, 3, 0, -1)$
$e_3 = (1, 2, 1, 3)$
$e_4 = (1, 3, -1, 0)$
$x = (7, 14, -1, 1)$

42. Határozzuk meg a következő vektorok által generált altér bázisát és dimenzióját!

$$a_1 = (2, 1, 3, -1) \quad a_2 = (-1, 1, -3, 1) \quad a_3 = (4, 5, 3, 1) \quad a_4 = (1, 5, -3, 1)$$

$$b_1 = (1, 1, 1, 1, 0) \quad b_2 = (1, 1, -1, -1, -1) \quad b_3 = (2, 2, 0, 0, -1) \quad b_4 = (1, 1, 5, 5, 2) \quad b_5 = (1, -1, -1, 0, 0)$$

43. Az n-edrendű kvadratikus mátrixok vektorterében tekintsük a szimmetrikus, illetve a ferdeszimmetrikus mátrixok halmazát!

$$\mathcal{S}_n = \{\, A \in \mathcal{M}_n \mid A^T = A \,\} \qquad \mathcal{A}_n = \{\, A \in \mathcal{M}_n \mid A^T = -A \,\}$$

Igazoljuk, hogy $\mathcal{S}_n$ és $\mathcal{A}_n$ altér $\mathcal{M}_n$-ben! Adjuk meg ezen alterek egy-egy bázisát és dimenzióját!

44. Tekintsük a komplex számhármasok C^3 halmazát a szokásos műveletekkel. Hány dimenziós vektorteret kapunk, ha a skalártest C, R illetve Q?

45. Mennyi az A mátrix rangja? Adja meg a sorvektorai által generált altér egy bázisát!

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & -1 & 6 \end{pmatrix}$

Determinánsok

46. Igazoljuk, hogy

$$\text{a)} \qquad \det\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21};$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \qquad \det\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \; & x_{11}x_{22}x_{33} + x_{12}x_{23}x_{31} + x_{13}x_{21}x_{32} \\ & -x_{13}x_{22}x_{31} - x_{12}x_{21}x_{33} - x_{11}x_{23}x_{32} \end{aligned}$$

47. Számítsa ki a következő determinánsok értékét:

$$\text{a)} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}; \qquad \text{b)} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{vmatrix};$$

$$\text{c)} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}; \qquad \text{d)} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 31 & 23 & 55 & 42 \end{vmatrix}!$$

48. A kifejtési tétel alkalmazásával számítsa ki a következő determinánsok értékét:

$$\text{a)} \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \\ 5 & 6 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}; \qquad \text{b)} \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -8 & 5 & 9 & 5 \\ -11 & 7 & 7 & 4 \end{vmatrix}!$$

49. Határozzuk meg az A mátrix determinánsát, ha az A mátrix a_{ij} elemét a következő eljárás szerint képezzük:

a) $a_{ij} = \min(i; j)$,

b) $a_{ij} = \max(i; j)$.

50. Legyen A egy $(n+1)$-ed rend kvadratikus mátrix. Az x mely értékeinél lesz az $|A| = 0$, ha

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n-x \end{vmatrix}.$$

51. Határozzuk meg a következő mátrixok inverzét:

$$\text{a)}\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \qquad \text{b)}\quad \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 5 & 11 & -16 \end{pmatrix};$$

$$\text{c)}\quad \begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}; \qquad \text{d)}\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{e)}\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}; \qquad \text{f)}\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

52. Milyen λ értékek mellett invertálhatók az alábbi mátrixok:

$$\text{a)}\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}; \qquad \text{b)}\quad \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -12 \\ -2 & -3 & \lambda \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix};$$

$$\text{c)}\quad \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}!$$

53. Oldjuk meg Cramer szabállyal a következő lineáris egyenletrendszereket:

$$\text{a)}\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix};$$

$$\text{b)}\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 4 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}$$