Komplex számok

Definíció. Komplex számok*nak nevezzük a valós számokból képzett rendezett* (a, b) *számpárok halmazát, ha közöttük az összeadást és a szorzást következőképpen értelmezzük:*

$$(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$$

$$(a, b)(c, d) := (ac - bd, bc + ad)$$

a*-t a* $z = (a, b)$ *komplex szám valós részének, míg* b*-t a képzetes (imaginárius) részének nevezzük. Jelölésük: Re*(z) *és Im*(z)*. Két komplex szám pontosan akkor egyenlő, ha valós és képzetes részeik megegyeznek. A komplex számhalmaz jele:* $\mathbf{C}$*.*

Állítás. *A komplex számok* **C** *halmaza a fent definiált összeadása és szorzása teljesíti a testaxiómákat:*

$z + w = w + z$	*kommutativitás*
$(z + w) + v = z + (w + v)$	*asszociativitás*
$z + 0 = z$	*nullelem*
$z + (-z) = 0$	*ellentett*
$z \cdot w = w \cdot z$	*kommutativitás*
$(z \cdot w) \cdot v = z \cdot (w \cdot v)$	*asszociativitás*
$1 \cdot z = z$	*egységelem*
$z \cdot \frac{1}{z} = 1 \qquad (z \neq 0)$	*inverz*

Bizonyítás. Ha $z = (a, b) \neq 0$, akkor az a és b valós számok közül legalább az egyik nem nulla, ezért $a^2 + b^2 > 0$. Megmutatjuk, hogy $z = (a, b)$ inverze az $(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2})$ komplex szám lesz:

$$(a, b)\left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right) =$$

$$= \left(\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}, \frac{ba-ab}{a^2+b^2}\right) = (1, 0).$$

Láthatjuk, hogy az egységelem az $(1, 0)$ komplex szám, a zéruselem pedig a $(0, 0)$ komplex szám lesz. Q.e.d.

- Nyilvánvaló, hogy $(a,0)+(b,0)=(a+b,0)$ és $(a,0)\,(b,0)=(ab,0)$ teljesül. Emiatt az $(a,0)$ komplex számot azonosíthatjuk az a valós számmal, s így a valós számtest a komplex számok egy részhalmazát alkotják.

- Ha i-vel jelöljük a $(0,1)$ komplex számot és 1-gyel az $(1,0)$ egységelemet, akkor $i^2=-1$. E jelölésekkel $(a,b)=a+bi$, hiszen

$$a+bi=(a,0)+(b,0)(0,1)=$$

$$=(a,0)+(0,b)=(a,b)$$

A továbbiakban az $a+bi$ klasszikus jelölést alkalmazzuk.

- Ha $z=a+bi$, ahol a és b valós szám, akkor a $\overline{z}=a-bi$ komplex számot z konjugáltjának nevezzük. A konjugált képzése a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

- $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$
- $\overline{z\,w} = \overline{z}\;\overline{w}$
- $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$ és $z - \overline{z} = 2\,\mathrm{Im}(z)i$
- $z\,\overline{z}$ pozitív valós szám, kivéve $z = 0$-t.

• Nem egészen triviális két komplex szám hányadosát képezni, azaz klasszikus alakban kifejezni. Célszerű a nevező konjugáltjával bővíteni a törtet. Pl.

$$\frac{3+4i}{4+2i} = \frac{(3+4i)(4-2i)}{(4+2i)(4-2i)} = 1 + \frac{1}{2}i$$

• A z komplex szám abszolút értékének nevezzük $z\,\overline{z}$ nemnegatív négyzetgyökét, jelölése: $|z|$. Így $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$. Az abszolút érték következő tulajdonságokkal rendelkezik:

- $|z| > 0$, ha $z \neq 0$, és $|0| = 0$
- $|\overline{z}| = |z|$
- $|zw| = |z|\,|w|$
- $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$
- $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$
- $|z + w| \leq |z| + |w|$

A harmadik összefüggés igazolásához legyen $z = a+bi$, $w = c + di$, ahol a, b, c, d valós számok. Ekkor

$$|zw|^2 = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 =$$

$$= (a^2 + b^2)\,(c^2 + d^2) = |z|^2|w|^2.$$

Az utolsó igazolásához azt figyeljük meg, hogy $z\overline{w}$ és $\overline{z}w$ egymás konjugáltja, ezért $z\overline{w} + \overline{z}w = 2\,\mathrm{Re}(z\overline{w})$. Így

$$\begin{aligned}
|z+w|^2 &= (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) = \\
&= z\overline{z} + z\overline{w} + \overline{z}w + w\overline{w} = \\
&= |z|^2 + 2\mathrm{Re}(z\overline{w}) + |w|^2 \leq \\
&\leq |z|^2 + 2|z\overline{w}| + |w|^2 = \\
&= |z|^2 + 2|z|\,|\overline{w}| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2.
\end{aligned}$$

A komplex számsík

Amennyiben a sík egy Descartes-féle (derékszögű) koordinátarendszerében a $z = a + bi$ komplex számhoz hozzárendeljük az (a, b) koordinátájú pontot, egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést kapunk a sík pontjai és a komplex számok halmaza között. Az $a + 0i$ alakú (valós) komplex számoknak az x tengely pontjai, míg a tisztán képzetes ($0 + b\,i$ alakú) komplex számoknak az y tengely pontjai felelnek meg. Ha a $z = (a, b) = a + b\,i$ komplex számot az origóból induló (a, b) végpontú vektorral szemléltetjük, a komplex számok összeadásának a vektorok összeadása felel meg, a konjugálásnak az x tengelyre való tükrözés, míg a komplex szám abszolút értéke a megfelelő vektor hossza. A szorzás szemléletes jelentése az ún. trigonometrikus alak segítségével lesz könnyen látható.

Amennyiben φ jelöli a $z = (a, b) = a + b\,i$ komplex számnak, mint vektornak a pozitív irányú x tengellyel bezárt forgásszögét, s $r = |z|$ az abszolút értéket, akkor látható, hogy

$$a = r \cos\varphi, \quad b = r \sin\varphi$$

Tehát $z = a + b\,i = r(\cos\varphi + i\,\sin\varphi)$. Az utóbbit nevezzük a komplex szám trigonometrikus alakjának, φ-t a z komplex szám argumentumának (vagy irányszögének), jele: $\varphi = \arg z$. A klasszikus algebrai alakból a trigonometrikus alak előállításához r és φ kiszámítása így történhet: $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, s $b \geq 0$ esetén φ-t a $\cos\varphi = \frac{a}{r}$ összefüggésből, míg $b \leq 0$ esetén $\varphi = 2\pi - \varphi_0$, ahol $\cos\varphi_0 = \frac{a}{r}$.

Szorozzuk össze a $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\ \sin\varphi_1)$ és $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\ \sin\varphi_2)$ komplex számokat. Ekkor

$$z_1\, z_2 = r_1\, r_2\, [(\cos\varphi_1\ \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\ \sin\varphi_2) +$$

$$+ i(\sin\varphi_1\ \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\ \sin\varphi_2)]$$

A trigonometrikus függvények ismert addíciós képlete alapján:

$$z_1\, z_2 = r_1\, r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\ \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

Innen láthatjuk, hogy szorzásnál az argumentumok összeadódnak, az abszolút értékek pedig összeszorzódnak. Egy adott komplex számmal való szorzás ezért úgy szemléltethető, mint origó körüli arg φ szögű elforgatás és $r = |z|$ arányú nyújtás együttese.

A szorzásra vonatkozó képletből adódik, hogy trigonometrikus alakban a hatványozás elvégzése nagyon leegyszerűsödik.

$$z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)), \quad n \in \mathbf{N}$$

(Moivre képlet)

Az osztás formulájának megtalálásához előbb $\frac{1}{z}$-t állítjuk elő trigonometrikus alakban:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$$

Ezért

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1\frac{1}{z_2} =$$

$$= r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\,\frac{1}{r_2}(\cos(-\varphi_2) + i\sin(-\varphi_2)) =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Komplex szám n-edik gyöke

Definíció. *Az $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ komplex szám n-edik gyökén olyan komplex számot értünk, amelynek n-edik hatványa z-vel egyenlő.*

Ha tehát w z-nek az n-edik gyöke, akkor $w^n = z$. Tegyük fel, hogy $w = t(\cos\psi + i\sin\psi)$, akkor a hatványozás miatt

$$t^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Két komplex szám akkor egyenlő, ha abszolút értékeik megegyeznek, irányszögeik pedig 2π egész számú többszörösében különböznek egymástól. Ezért

$$t^n = r, \quad n\psi - \varphi = k\,2\pi$$

ahol k egész szám. Mivel t és r nemnegatív,

$$t = \sqrt[n]{r}, \quad \psi = (\varphi + k\,2\pi)/n$$

A Moivre képlet alapján látható, hogy w valóban n-edik gyök. w-nek ezen előállításában ugyan végtelen sok k érték szerepel, de könnyen látható, hogy a $k = 0, 1, \ldots, n-1$ választással n különböző w számot kapunk, s a további k értékek nem adnak újabb gyököt. Ez azt jelenti tehát, hogy minden komplex számnak — a 0-át kivéve,— pontosan n darab n-edik gyöke van.