Lineáris, másodrendű differenciálegyenletek
Általános alakja: $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$
Ha $r(x) = 0$, az egyenlet homogén.
Ha $r(x) \neq 0$, az egyenlet inhomogén.

Tétel: Az inhomogén egyenlet általános megoldása = a homogén rész általános megoldása + az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása. Röviden: $y_{inh,ált} = y_{hom,ált} + y_{inh,part}$
Bizonyítás: Az inhomogén egyenlet bármely két megoldásának különbsége megoldása a homogén résznek.

Tétel: Ha y_1 megoldása az $y'' + p(x)y' + q(x)y = r_1(x)$ egyenletnek és
y_2 megoldása az $y'' + p(x)y' + q(x)y = r_2(x)$ egyenletnek,
akkor $y_1 + y_2$ megoldása az $y'' + p(x)y' + q(x)y = r_1(x) + r_2(x)$ egyenletnek.

A homogén rész megoldása:
Ha y_1 és y_2 független megoldásai az $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ egyenletnek, akkor az általános megoldás: $y_{hom,ált} = c_1 y_1 + c_2 y_2$, ahol c_1 és c_2 tetszőleges konstansok.
(Itt a független megoldások most azt jelenti, hogy y_1 és y_2 hányadosa nem konstans.)

Speciális eset: Ha $p(x)$ *és* $q(x)$ konstans, akkor az egyenletet <u>állandó együtthatós</u> lineáris másodrendű differenciálegyenletnek nevezzük. A továbbiakban csak ilyen állandó együtthatós differenciálegyenletekkel foglalkozunk: $y'' + py' + qy = r(x)$.

Állandó együtthatós homogén másodrendű differenciálegyenlet általános megoldása
$y'' + py' + qy = 0$
Az $x^2 + px + q = 0$ közönséges másodfokú egyenletet az $y'' + py' + qy = 0$ differenciálegyenlet karakterisztikus egyenletének nevezzük.
(i) Ha a karakterisztikus egyenlet diszkriminánsa pozitív, az egyenletnek két különböző valós gyöke van. Legyenek ezek λ_1 és λ_2. Ekkor a differenciálegyenlet általános megoldása:
$$y_{hom,ált} = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}.$$
(ii) Ha a karakterisztikus egyenlet diszkriminánsa zérus, akkor az egyenlet egy (kétszeres) valós gyöke van. Legyen ez λ. Ekkor a differenciálegyenlet általános megoldása:
$$y_{hom,ált} = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}.$$
(iii) Ha a karakterisztikus egyenlet diszkriminánsa negatív, az egyenletnek két különböző komplex gyöke van, amelyek egymás konjugáltjai. Legyenek ezek $\alpha \pm i\beta$. Ekkor a differenciálegyenlet általános megoldása:
$$y_{hom,ált} = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldásának keresése speciális jobb oldal esetén próbafüggvény módszerrel:

(1) Ha az $y'' + py' + qy = r(x)$ differenciálegyenletben $r(x) = P_n(x)e^{\alpha x} \cos \beta x$ vagy $r(x) = P_n(x)e^{\alpha x} \sin \beta x$, ahol $P_n(x)$ egy *n*-ed fokú polinom és $\alpha \pm i\beta$ nem gyöke a karakterisztikus egyenletnek, akkor a differenciálegyenletnek van $y = Q_n(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + R_n(x)e^{\alpha x} \sin \beta x$ alakú megoldása, ahol $Q_n(x)$ és $R_n(x)$ ismeretlen együtthatójú *n*-ed fokú polinomok. Ezek együtthatóit úgy határozzuk meg, hogy az $y = Q_n(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + R_n(x)e^{\alpha x} \sin \beta x$ függvényt behelyettesítjük az $y'' + py' + qy = r(x)$ differenciálegyenletbe és az együtthatókra kapott egyenletrendszert megoldjuk.

(2) (Egyszeres rezonancia esete) Ha az $y'' + py' + qy = r(x)$ differenciálegyenletben $r(x) = P_n(x)e^{\alpha x} \cos \beta x$ vagy $r(x) = P_n(x)e^{\alpha x} \sin \beta x$, ahol $P_n(x)$ egy *n*-ed fokú polinom és $\alpha + i\beta$ vagy $\alpha - i\beta$ (egyszeres) gyöke a karakterisztikus egyenletnek, akkor a differenciálegyenletnek van $y = xQ_n(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + xR_n(x)e^{\alpha x} \sin \beta x$ alakú megoldása, ahol $Q_n(x)$ és $R_n(x)$ ismeretlen együtthatójú *n*-ed fokú polinomok. Ezek együtthatóit úgy határozzuk meg, hogy az $y = xQ_n(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + xR_n(x)e^{\alpha x} \sin \beta x$ függvényt behelyettesítjük az $y'' + py' + qy = r(x)$ differenciálegyenletbe és az együtthatókra kapott egyenletrendszert megoldjuk.

(3) (Kétszeres rezonancia esete) Ha az $y'' + py' + qy = r(x)$ differenciálegyenletben $r(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$, ahol $P_n(x)$ egy *n*-ed fokú polinom és α kétszeres gyöke a karakterisztikus egyenletnek, akkor a differenciálegyenletnek van $y = x^2 Q_n(x)e^{\alpha x}$ alakú megoldása, ahol $Q_n(x)$ ismeretlen együtthatójú *n*-ed fokú polinom. Együtthatóit úgy határozzuk meg, hogy az $y = x^2 Q_n(x)e^{\alpha x}$ függvényt behelyettesítjük az $y'' + py' + qy = r(x)$ differenciálegyenletbe és az együtthatókra kapott egyenletrendszert megoldjuk.