Determinánsok

A determináns fogalma olyan algebrai segédeszköz, amellyel jól jellemezhető a mátrixok invertálhatósága, a mátrix rangja. Segítségével lineáris egyenletrendszerek megoldhatósága dönthető el, sőt konkrét kiszámítási módszereket is szolgáltat az előbbi kérdésekre, bár ez nem mindig hatékony.

- Definiáló tulajdonságok
- Klasszikus kiszámítási szabály
- Gyakorlati kiszámítási szabály
- Invertálható mátrixok determinánsa
- Kifejtési tétel
- Mátrix rangjának meghatározása

Jelöléseket vezetünk be: tekintsünk egy $A \in \mathcal{M}_n$ n-edrendű kvadratikus mátrixot:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

oszlopvektorait jelölje $a_1, a_2, \dots, a_n$:

$$a_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \dots a_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ezek a vektorok most a skalár-n-esek $\mathbb{R}^n$ vektorterében lévő vektorok. Ilyenkor azt is írjuk, hogy $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Definíció. *Determinánsfüggvénynek nevezzük azt a* $\mathit{det}\colon \mathcal{M}_n \to \mathbb{R}$ *leképezést, amely teljesíti a következő tulajdonságokat:*

- *oszlopvektoraiban additív:*

  $$\mathit{det}\,(a_1+a_1', a_2, \ldots, a_n) = \mathit{det}\,(a_1, a_2, \ldots, a_n) + \mathit{det}\,(a_1', a_2, \ldots, a_n)$$

- *skalárszorzó kiemelhető:*

  $$\mathit{det}\,(\lambda a_1, a_2, \ldots, a_n) = \lambda \mathit{det}\,(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

- *bármely két oszlop felcserélésekor előjelet vált:*

  $$\mathit{det}\,(a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_i, \ldots, a_n) = -\mathit{det}\,(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_j \ldots, a_n)$$

- *az egységmátrix determinánsa* 1*:*

  $$\mathit{det}\,E = \mathit{det}\,(e_1, e_2, \ldots, e_n) = 1$$

A determináns fogalma bizonyos értelemben általánosítása a terület, illetve térfogat fogalmának. Ugyanis, a síkban két vektor, a és b — közös pontból indított reprezentánsaikkal — egy paralelogrammát határoz meg. Ennek $t(a, b)$ területét pozítívnak tekintve, ha a paralelogramma pozítív körüljárású, míg negatívnak, ha negatív körüljárású, könnyen látható, hogy teljesíti a a determináns definíciójában megkívánt első 3 tulajdonságot. A negyedik pedig azt fejezi ki, hogy az egységnégyzet területe 1. Hasonlóan megfigyelhetjük, hogy a tér 3 szabadvektorából reprezentánsaikkal képezhető paralelepipedon térfogata is ezen tulajdonságokkal rendelkezik. E térfogat pontosan akkor nulla, ha a három vektor lineárisan függő.

A 4 kiinduló tulajdonságból vezetjük le a determinánsok további tulajdonságait, illetve konkrét kiszámítási lehetőségeit. Ha az egyik oszlopvektor a zérusvektor, akkor a determináns értéke 0, hiszen

$$\det(0, a_2, \ldots, a_n) = \det(0 \cdot 0, a_2, \ldots, a_n) = 0 \cdot \det(0, a_2, \ldots, a_n) = 0$$

Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns értéke 0, hiszen az alternáló tulajdonságot kihasználva:

$$\det(a_1, \ldots, a, \ldots, a, \ldots, a_n) = -\det(a_1, \ldots, a, \ldots, a \ldots, a_n),$$

s ez csak úgy lehet, ha $\det(a_1, \ldots, a_n) = 0$.

Állítás. *Az A mátrix determinánsa a következőképp számítható ki:*

$$|A| = \sum_{i_1, \ldots, i_n} (-1)^I a_{i_1 1} \ldots a_{i_n n},$$

ahol az összegzés kiterjed az $1, 2 \ldots, n$ számok összes permutációjára, tehát ez az összeg $n!$ tagú.

- A származtatott képlet azonban csak korlátozottan hatékony a determináns értékének kiszámítására, mivel nagyobb n esetén általában az összes $n!$ szorzat megkeresése hosszadalmas. Ha azonban a mátrix speciális alakú, pl. felső vagy alsó háromszög alakú, akkor e kiszámítási képletből azonnal adódik, hogy egyetlen olyan szorzat van, amely nem biztosan zérus: a főátlóban álló elemek szorzata:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$$

- A determináns fenti kiszámítási módjából következik, hogy a transzponált mátrix determinánsa ugyanannyi, mint az eredetié:

$$\det A^T = \det A \qquad \text{más jelöléssel:} \qquad |A^T| = |A|$$

A determinánsok gyakorlati kiszámítása szempontjából jelentős a következő állítás.

Állítás. *Ha egy mátrix egy oszlopát (vagy sorát) úgy változtatjuk meg, hogy hozzádjuk másik oszlopának (vagy sorának) skalárszorosát, akkor az új mátrix determinánsa megegyezik az eredetiével.*

Bizonyítás. Ha pl. az elsőhöz adjuk a második oszlopvektort, akkor:

$$\det(a_1+a_2, a_2, \ldots, a_n) = \det(a_1, a_2, \ldots, a_n) + \det(a_2, a_2, \ldots, a_n)$$

A második összeadandó nulla, hiszen két oszlopa azonos. $\square$

Most következő állításunk azt jelenti, hogy a determináns eltűnése (nulla volta) csak attól függ, hogy az oszlopvektorok lineárisan függők, vagy függetlenek.

Állítás. *Egy A mátrix determinánsa pontosan akkor nulla, ha az oszlopvektorai lineárisan függők.*

Bizonyítás. Ha az oszlopvektorok lineárisan függők, pl. az első lineárisan kifejezhető a többivel: $a_1 = \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n$, akkor

$$\det(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \det(\lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n, a_2, \ldots, a_n) =$$

$$= \lambda_2 \det(a_2, a_2, \ldots, a_n) + \ldots + \lambda_n \det(a_n, a_2, \ldots, a_n)$$

Az utóbbi determinánsok mindegyikében két oszlop azonos, ezért a determinánsok nullák.

Amennyiben az oszlopvektorok lineárisan függetlenek, akkor bázist alkotnak $\mathbb{R}^n$-ben, ezért a természetes bázis tagjai is előállíthatók velük:

$$e_j = \sum_{i=1}^{n} \beta_{ij} a_i \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

Ugyanazon érveléssel, mint a determináns hagyományos képletének levezetésénél alkalmaztunk, azt kapjuk, hogy

$$1 = \det(e_1, \ldots, e_n) = \left(\sum_{i_1, \ldots, i_n} (-1)^I \beta_{i_1 1} \ldots \beta_{i_n n} \right) \det(a_1, \ldots, a_n)$$

Emiatt $\det A = \det(a_1, \ldots, a_n)$ nem lehet nulla. $\square$

Állítás. *Szorzástétel:*

$$\mathit{det}\,(A \cdot B) = \mathit{det}\,A \cdot \mathit{det}\,B \qquad \textit{más jelöléssel:} \qquad |A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

Bizonyítás. Legyen $C = A \cdot B$, és jelölje $c_1, \ldots, c_n$ a C mátrix oszlopvektorait. Ekkor

$$c_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} a_i \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

teljesül. Ezért az iménti eljárással újra azt kapjuk, hogy

$$\det C = \det\,(c_1, \ldots, c_n) = (\sum_{i_1, \ldots, i_n} (-1)^I \, b_{i_1 1} \ldots b_{i_n n}) \det\,(a_1, \ldots, a_n) =$$

$$= \det B \cdot \det A$$

$\square$

Az eddigiekből következik, hogy

Állítás. *Egy kvadratikus mátrix pontosan akkor invertálható, ha determinánsa nem nulla.*

Bizonyítás. Ha invertálható, akkor van olyan B, hogy $A \cdot B = E$, ezért a szorzástétel alapján

$$1 = \det E = \det (A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

tehát $\det A$ nem lehet nulla.

Fordítva, ha $\det A$ nem nulla, akkor az oszlopvektorai lineárisan függetlenek, tehát bázist alkotnak, belőlük a természetes bázis vektorai előállíthatók:

$$e_j = \sum_{i=1}^{n} \beta_{ij} a_i \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

Láthatjuk, hogy az itt fellépő β_{ij} együtthatókból képzett B mátrixszal $A \cdot B = E$ teljesül, tehát B lesz A-nak inverze. $\square$

Kifejtési tétel

Tekintsük az n-edrendű A kvadratikus mátrixot, s töröljük belőle a kiválasztott i-dik sort és j-dik oszlopot. A visszamaradó $(n-1)$-edrendű mátrix determinánsát az A mátrix (i,j)-dik aldeterminánsának mondjuk, jele: D_{ij}. Az (i,j)-dik algebrai aldeterminánsnak nevezzük az $(-1)^{i+j}D_{ij}$ értéket, jele: A_{ij}. Ezen aldeterminánsok segítségével is kiszámítható A determinánsának értéke:

Állítás. *Oszlop szerinti kifejtés: Legyen j egy rögzített oszlopindex. Ekkor*

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$

Sor szerinti kifejtés: Legyen i egy rögzített sorindex. Ekkor

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$

- A kifejtési tétel alkalmazása akkor célszerű, ha egy sorban vagy oszlopban relatíve sok nulla elem van. Ekkor esetleg kevés aldetermináns kiszámítása már az egész deteminánns meghatározásához vezet.

- Ha egy kiválasztott sor (vagy oszlop) elemeit egy másik kiválasztott sor (vagy oszlop) megfelelő elemeihez tartozó algebrai aldeterminánsokkal szorozzuk, s e szorzatok összegét képezzük, 0-át kapunk: (Ferde kifejtési tétel) Ha $j \neq k$

$$0 = a_{1j}A_{1k} + \ldots + a_{nj}A_{nk} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ik}$$

  Ha $i \neq k$

$$0 = a_{i1}A_{k1} + \ldots + a_{in}A_{kn} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj}$$

  Az első igazolásához fejtsük a $\det(a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_j, \ldots, a_n) = 0$ determinánst a k-dik oszlopa szerint!

- Az algebrai aldeterminánsok segítségével kifejezhetjük az inverz mátrix elemeit:

$$A^{-1} = (b_{ij}); \qquad b_{ij} = \frac{A_{ji}}{|A|}$$

Ugyanis, az így megadott mátrixszal kiszámítva a $A \cdot A^{-1}$ szorzatmátrix (i, j)-dik elemét:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \frac{1}{|A|} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = \delta_{ij}$$

ahol δ_{ij} az egységmátrix elemeit jelöli.

Rangszámtétel

Legyen most A egy $k \times n$-es mátrix. A *mátrix rangján* oszlopvektorainak a rangját értjük. Mindjárt látni fogjuk, hogy ez megegyezik a sorvektorainak rangjával.

Tetszőleges $A \in \mathcal{M}_{k\times n}$ mátrix l-edrendű aldeterminánsát úgy értelmezzük, hogy kiválasztunk l darab sort és l darab oszlopot, s ezek metszetében szereplő elemek alkotta l-edrendű determinánst képezzük. Ilyen l-edrendű aldeterminánsa a mátrixnak sok van, pontosan $\binom{k}{l}\binom{n}{l}$ darab. Most bebizonyítjuk, hogy tetszőleges mátrix rangja meghatározható ezen aldeterminánsokkal, nevezetesen:

Állítás. *Az A mátrix rangja megegyezik maximális rendű nullától különböző aldeterminánsának rendjével.*

- A rangszámtétel alapján látható, hogy tetszőleges mátrix sorvektorainak rangja oszlopvektorainak rangjával egyenlő, hiszen a determinánsok értéke transzponáláskor nem változik.

- A rangszámtételből az is adódik, hogy ha egy kvadratikus mátrix determinánsa nulla, akkor oszlopvektorai lineárisan függők. Ugyanis, ha $|A| = 0$, akkor A rangja kisebb, mint n, tehát oszlopvektorainak rangja a vektorok tagszámánál kisebb, ezért lineárisan független nem lehet.