A sorozat fogalma

Definíció. *A természetes számok* $\mathbb{N}$ *halmazán értelmezett függvényeket* sorozatok*nak nevezzük. Amennyiben az értékkészlet a valós számok halmaza, valós számsorozatról beszélünk, mígha az értékkészlet a komplex számok halmaza, akkor komplex (értékű) sorozatról. A* $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *függvényjelölés helyett gyakoribb az* a_n *jelölés alkalmazása, ahol* a_n *a függvényértékeket jelöli (*$a_n = f(n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ *esetén), melyeket a sorozat tagjainak mondunk.*

Egy a_n *valós(!) számsorozatot* monoton növekvő*nek mondunk, ha* $a_n \leq a_{n+1}$ *teljesül minden* $n \in \mathbb{N}$*-re.* Szigorúan monoton növekvő *az* a_n *sorozat, ha* $a_n < a_{n+1}$ *teljesül minden* $n \in \mathbb{N}$*-re. Analóg módon értelmezzük a monoton csökkenő, illetve szigorúan monoton csökkenő sorozatok fogalmát.*

- $a_n = 1 - \frac{1}{n^2}$ szigorúan monoton növekvő
- $b_n = [\frac{100}{n}]$ monoton csökkenő, korlátos
- $c_n = \log_2 n, \quad d_n = (-1)^n n$ nem korlátosak
- $k(n) = 5$ konstans sorozat
- $t_n = \frac{1}{n}$
- $q_n = a_1 q^n$ mértani sorozat

- $s_n = a_1 + (n-1)d$ számtani sorozat

- $a_1 = 1, a_2 = 1, \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$
  Fibonacci sorozat

Definíció. *Egy* a_n *sorozat* torlódási pontján *olyan* a *számot értünk, melynek tetszőleges* $\varepsilon > 0$ *sugarú nyílt környezetében a sorozatnak végtelen sok tagja található. Azt mondjuk, hogy az* a_n *sorozat* konvergens *és* határértéke a, *ha* a*-nak bármely* $\varepsilon > 0$ *sugarú nyílt környezete a sorozat összes tagját tartalmazza véges sok kivételével, azaz ha bármely* $\varepsilon > 0$*-hoz létezik olyan* $n_0 \in \mathbb{N}$ *küszöbszám, hogy minden* $n > n_0$ *esetén* $|a_n - a| < \varepsilon$*. Ilyenkor azt is mondjuk, hogy* a_n *konvergál (vagy tart)* a*-hoz, jelben:* $a_n \to a$*, vagy* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$*.*

- a határérték $\Longrightarrow$ torlódási pont is
- a határérték $\not\Longleftarrow$ torlódási pont
- ha a_n korlátos, s csak egyetlen torlódási ponttal rendelkezik, akkor konvergens is, és határértéke az egyetlen torlódási pont lesz
- konvergens sorozatnak csak egyetlen határértéke van
- a konvergens sorozatok korlátosak

Példák

konvergens sorozatra: $a_n = \dfrac{1}{n}$. Ez a sorozat konvergens, s határértéke 0, hiszen ha tetszőleges $\varepsilon > 0$-t választunk, hozzá lehet találni olyan küszöbindexet, pl. $n_0 = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$-et, melyre bármely $n > n_0$ esetén valóban $|a_n - 0| = \dfrac{1}{n} < \varepsilon$. Nem konvergens viszont, pl. az $b_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n}$ sorozat, hiszen két torlódási pontja is van.

Állítás. *Valós, monoton növekvő korlátos sorozat konvergál a pontos felső korlátjához. Valós, monoton csökkenő korlátos sorozat konvergál a pontos alsó korlátjához.*

Bizonyítás. Az a_n monoton növekvő korlátos sorozat pontos felső korlátját jelölje a, s tekintsünk egy tetszőleges pozítív ε-t. $a - \varepsilon$ nem felső korlátja a sorozat elemeinek, ezért van olyan $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $a_{n_0} > a - \varepsilon$. A monotonitás miatt ekkor minden $n > n_0$ esetén $a \geq a_n > a - \varepsilon$, tehát $|a_n - a| < \varepsilon$. Hasonló érvelés adható monoton csökkenő sorozat esetén is. $\square$

Műveletek konvergens sorozatokkal

Sorozatokkal ugyanazon műveleteket végezhetjük, mint a valós, illetve a komplex számokkal: Az a_n és b_n sorozatok összegének, szorzatának, illetve ha $b_n \neq 0$, akkor hányadosának nevezzük rendre az $a_n + b_n$, $a_n b_n$, $\dfrac{a_n}{b_n}$ sorozatokat.

Állítás.

- *Ha* $a_n \to 0$ *és* b_n *korlátos, akkor* $a_n b_n \to 0$.

- *Ha* $a_n \to a$ *és* $b_n \to b$, *akkor* $a_n + b_n \to a + b$.

- *Ha* $a_n \to a$ *és* $b_n \to b$, *akkor* $a_n b_n \to ab$.

- *Ha* $a_n \to a$, $b_n \to b$ *és* $b_n \neq 0$, $b \neq 0$, *akkor* $\dfrac{a_n}{b_n} \to \dfrac{a}{b}$.

Bizonyítás. Jelölje K a b_n sorozat egy korlátját: $b_n \leq K$. Tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén $a_n \to 0$ miatt van olyan n_0, hogy ha $n > n_0$, akkor $|a_n| < \dfrac{\varepsilon}{K}$. Ezért

$$|a_n b_n| = |a_n|\,|b_n| < \frac{\varepsilon}{K} K = \varepsilon.$$

A második igazolásához is tetszőleges $\varepsilon > 0$-ból indulunk ki. a_n és b_n konvergenciája miatt $\varepsilon/2$-höz van olyan n_1 és n_2, hogy $n > n_1$, illetve $n > n_2$ esetén $|a_n - a| < \varepsilon/2$, illetve $|b_n - b| < \varepsilon/2$ teljesedik. Ekkor minden $n > \max\{n_1, n_2\}$ esetén

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Szorzat esetében a következő átalakítást végezzük el:

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \leq$$

$$\leq |a_n|\,|b_n - b| + |b|\,|a_n - a|$$

Az a_n sorozat korlátos, hiszen konvergens, tehát $|a_n| \leq K$ valamely $K \in \mathbb{R}$-ra. $a_n \to a$ miatt létezik olyan n_1, hogy ha $n > n_1$, akkor $|a_n - a| < \varepsilon/2|b|$. Másrészt, $b_n \to b$ miatt létezik olyan n_2, hogy ha $n > n_2$, akkor $|b_n - b| < \varepsilon/2K$. Ha $n > \max\{n_1, n_2\}$, akkor a fenti becslést is figyelembe véve $|a_n b_n - ab| < \varepsilon$ adódik.

$\square$

A konvergencia monotonitása

Állítás. *Ha* $a_n \to a$*,* $b_n \to b$ *és* $a_n \le b_n$ *minden* $n \in \mathbb{N}$*-re, akkor* $a \le b$*.*

Bizonyítás. Tegyük fel indirekten, hogy $a > b$. Legyen $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$. $a_n \to a$ miatt van olyan n_1, hogy ha $n > n_1$, akkor $a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Hasonlóan $b_n \to b$ miatt van olyan n_2, hogy ha $n > n_2$, akkor $b_n \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$. Ezért, ha $n > \max\{n_1, n_2\}$ teljesül, akkor

$$b_n < b + \varepsilon = \frac{a+b}{2} = a - \varepsilon < a_n.$$

Ez ellentmond állításunk feltételének. □

Megjegyzés. Ha a feltételben szigorú egyenlőtlenség teljesül, a következményben mégsem állítható, hogy $a < b$. Ezt mutatja az $a_n = 0$, $b_n = \frac{1}{n}$ sorozatok példája.

Állítás. *(Rendőrelv) Ha $a_n \to a$, $b_n \to a$, és $a_n \leq c_n \leq b_n$ minden $n \in \mathbb{N}$-re, akkor $c_n \to a$.*

Bizonyítás. Tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén $a_n \to a$ miatt van olyan n_1, hogy ha $n > n_1$, akkor $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Hasonlóan $b_n \to a$ miatt van olyan n_2, hogy ha $n > n_2$, akkor $b_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Ezért minden $n > \max\{n_1, n_2\}$ esetén $a_n \leq c_n \leq b_n$ miatt $c_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ is teljesül. $\square$

Valós számsorozat tágabb értelemben vett határértéke

Definíció. *Azt mondjuk, hogy az* a_n *sorozat* tart a végtelenhez, *ha bármely* K *valós számhoz van olyan* $n_0 \in \mathbb{N}$, *hogy ha* $n > n_0$, *akkor* $a_n > K$. *Jele:* $a_n \to \infty$, *vagy* $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. *Hasonlatosan, az* a_n *sorozat* tart a mínusz végtelenhez, *ha bármely* K *valós számhoz van olyan* $n_0 \in \mathbb{N}$, *hogy ha* $n > n_0$, *akkor* $a_n < K$. *Jele:* $a_n \to -\infty$, *vagy* $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

- A műveletekkel kapcsolatosan majdnem ugyanazon tulajdonságok érvényesek, mint a szűkebben értelmezett konvergencia esetében, pl.:

  Ha $a_n \to \infty$, $b_n \to \infty$, akkor $a_n + b_n \to \infty$.

  Ha $a_n \to -\infty$, $b_n \to -\infty$, akkor $a_n + b_n \to -\infty$.

  Ha $a_n \to \infty$, $b_n \to \infty$, akkor $a_n b_n \to \infty$.

  Ha $a_n \to \infty$, $b_n \to b > 0$, akkor $a_n b_n \to \infty$.

- Ha $|a_n| \to \infty$, és $a_n \neq 0$, akkor $\dfrac{1}{a_n} \to 0$. Ugyanis, adott $\varepsilon > 0$ esetén $K = \dfrac{1}{\varepsilon}$-hoz van olyan $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy ha $n > n_0$, akkor

$|a_n| > K = \frac{1}{\varepsilon}$, azaz $|\frac{1}{a_n}| < \varepsilon$. Fordítva viszont $a_n \to 0$-ból következik $|\frac{1}{a_n}| \to \infty$, hasonló érveléssel.

Nevezetes határértékek

Állítás. *Legyen*

$$a_n = \frac{p_r n^r + p_{r-1} n^{r-1} + \ldots + p_1 n + p_0}{q_s n^s + q_{s-1} n^{s-1} + \ldots + q_1 n + q_0}.$$

Ha $r = s$, *akkor* $a_n \to \dfrac{p_r}{q_r}$.

Ha $r < s$, *akkor* $a_n \to 0$.

Ha $r > s$, *akkor* $\dfrac{p_r}{q_s} > 0$ *esetén* $a_n \to \infty$, *míg* $\dfrac{p_r}{q_s} < 0$ *esetén* $a_n \to -\infty$.

Bizonyítás. Példákon keresztül:

$r = s \qquad\qquad a_n = \frac{n^2+3n+1}{2n^2-5n}$

Osszuk el a számlálót és a nevezőt is n^2-el:

$$a_n = \frac{1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 - \frac{5}{n}}$$

A számlálóban és a nevezőben szereplő $\dfrac{1}{n^i}$ tagok mindegyike 0-hoz tart, s kihasználva a műveletek és a határátmenet sorrendjének felcserélhetőségét, valóban $a_n \to \dfrac{1}{2}$.

$r < s \qquad\qquad a_n = \frac{3n+1}{2n^2-5n}$

Most n^2-el osztjuk a számlálót, s nevezőt is:

$$a_n = \frac{\frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 - \frac{5}{n}}$$

Ugyanazon érveléssel a számláló nullához tart, a nevező 2-hez, összességében $a_n \to 0$.

$r > s \qquad\qquad a_n = \frac{n^5+3n+1}{2n^2-5n}$

n^2-el egyszerűsítve, s kiemelve n^3-et:

$$a_n = n^3 \frac{1 + \frac{3}{n^4} + \frac{1}{n^5}}{2 - \frac{5}{n}}$$

$n^3 \to \infty$, míg a tört $\dfrac{1}{2}$ hez tart, ezért szorzatuk végtelenhez tart

$\square$

Állítás. *Legyen* $a_n = q^n$, *ahol* $q \in \mathbb{R}$ *konstans.*

Ha $q > 1$, *akkor* $a_n \to \infty$.

Ha $q = 1$, *akkor* $a_n \to 1$.

Ha $-1 < q < 1$, *akkor* $a_n \to 0$.

Bizonyítás. Ha $q > 1$, akkor $q = 1 + h$ alakban írható, ahol $h > 0$. A Bernoulli egyenlőtlenség miatt $a_n = q^n = (1+h)^n \geq 1 + nh$, ezért ha adott K esetén $n > n_0 = [\frac{K-1}{h}] + 1$, akkor

$$a_n \geq 1 + nh > 1 + \frac{K-1}{h} h = K.$$

Ha $-1 < q < 1$, $q \neq 0$, akkor $|\frac{1}{a}| > 1$, ezért $|\frac{1}{a_n}| = |\frac{1}{q}|^n \to \infty$. Egy előző állításunk miatt $a_n \to 0$. $\square$

Állítás. *Az* $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ *sorozat konvergens.*

Bizonyítás.

A) a_n szigorúan monoton nő:

Alkalmazzuk a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget az

$$1 + \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}, \ldots, 1 + \frac{1}{n}, 1$$

számokra:

$$\sqrt[n+1]{(1 + \frac{1}{n}) \ldots (1 + \frac{1}{n}) \cdot 1} \leq \frac{1 + \frac{1}{n} + \ldots 1 + \frac{1}{n} + 1}{n + 1}$$

$n+1$-dik hatványra emelve:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

azaz

$$a_n \le a_{n+1}$$

B) a_n korlátos: Alkalmazzuk most a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget az

$$1+\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}, \dots, 1+\frac{1}{n}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$$

számokra:

$$\sqrt[n+2]{(1+\frac{1}{n})\dots(1+\frac{1}{n})\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} \le$$

$$\leq \frac{1+\frac{1}{n}+\ldots 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{n+2}$$

$n+1$-dik hatványra emelve:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{4} \leq 1$$

azaz

$$a_n \leq 4$$

$\square$

- Az $a_n = (1+\dfrac{1}{n})^n$ sorozat határértékét e-vel jelöljük:

  $e = \lim_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n$.

- Belátható, hogy ez a szám másik sorozattal is előállítható:

$$e = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}).$$

- Bebizonyítható, és az alkalmazásokban gyakran szükséges, hogy ha egy b_n sorozat olyan, hogy $|b_n| \to \infty$, akkor

$$\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{b_n})^{b_n} = e.$$

- 1 mFt kamatoztatása 100 % kamattal 1 év alatt:

Egy éves tőkésítésnél: 2 mFt

Féléves tőkésítésnél: $(1 + \frac{1}{2})^2$ =2,25 mFt

Negyedévesnél: $(1 + \frac{1}{4})^4 \approx$ 2,44 mFt

Havi tőkésítésnél: $(1 + \frac{1}{12})^{12} \approx$2,61 mFt év/$n$-es tőkésítésnél: $(1 + \frac{1}{n})^n = a_n$

Bernoulli egyenlőtlenség:

Állítás. *Bármely* $n \in \mathbb{N}$ *és* $h \geq -1$ *esetén teljesül a*

$$(1+h)^n \geq 1+nh$$

egyenlőtlenség.

Bizonyítás. A bizonyítást n szerinti teljes indukcióval végezzük. $n = 1$ esetén nyilván teljesül az állítás. Tegyük fel, hogy igaz valamely n-re: $(1+h)^n \geq 1+nh$. $1+h \geq 0$, ezért vele szorozva az egyenlőtlenséget, kapjuk, hogy

$$(1+h)^{n+1} \geq (1+nh)(1+h) = 1+(n+1)h+nh^2 \geq$$

$$\geq 1+(n+1)h.$$

Tehát $n+1$ esetén is teljesül az állítás. $\square$