Számsorok

Definíció. *Az* $a_1 + a_2 + \ldots + a_k + \ldots = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *végtelen sok tagú összeget számsornak (vagy numerikus sornak) nevezzük.*

harmónikus sor

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k} + \ldots$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{k^2} + \ldots$$

mértani sor

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k = q + q^2 + q^3 + \dots$$

Leibniz sor

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots < \infty.$$

Definíció. *A* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *számsort* konvergens*nek mondjuk, ha a részletösszegek* $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ *sorozatának létezik határértéke, ezt a határértéket a számsor összegének nevezzük.*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Egyébként a sort divergens*nek mondjuk.*

Példa. Az ún. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k$ mértani sor konvergens, ha $|q| < 1$. Ugyanis

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} q^k = q\frac{q^{n-1} - 1}{q - 1}$$

a mértani sorozatok ismert összegzési képlete alapján, s így

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{q}{1-q}.$$

Divergens a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$$

ún. harmónikus sor, ugyanis

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{8}\right) + \ldots + \frac{1}{n}$$

alapján s_n felülről nem korlátos, hiszen a zárójelezett tagok összege minden esetben nagyobb, mint $1/2$.

Egy további feltétellel — a váltakozó előjelűség feltételével, — viszont már elegendő a sor konvergenciájához.

Állítás. *(Leibniz tétel). Ha a_n monoton csökkenő és nullához tartó sorozat, akkor a $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$ számsor konvergens.*

Bizonyítás. Látható, hogy az s_{2n} részletösszegek sorozata monoton nő, felülről korlátos, ezért konvergens, és az s_{2n+1} részletösszegek sorozata monoton csökken, alulról korlátos, de a két határérték megegyezik, hiszen
$s_{n+1} - s_n = a_{n+1} \to 0$. $\square$

Megjegyzés. egy $\sum a_k$ sor *abszolút konvergens*, ha a $\sum |a_k|$ sor konvergens. *Feltételesen konvergens* egy sor, ha konvergens, de nem abszolút konvergens.

Az abszolút konvergens sorok viselkednek igazán jól: bennük a tagok sorrendje tetszőlegesen felcserélhető, az összeg nem változik.

Pozitív tagú sorok konvergenciakritériumai

Most olyan számsorokkal foglalkozunk, amelyek tagjai pozítív számok. Olyan elegendő feltételeket adunk meg, amelyekből következik a sor konvergenciája vagy divergenciája. Bár ezek a feltételek általában nem szükségesek a konvergenciához, szokás őket kritériumoknak nevezni.

Állítás. *(Majoráns kritérium)*

Ha $0 < a_k \leq b_k$ *teljesül minden* $k \in \mathbb{N}$*-re, és* $\sum b_k$ *sor konvergens, akkor* $\sum a_k$ *is.*

Ha viszont $0 < a_k \leq b_k$ *és* $\sum a_k$ *divergens, akkor a* $\sum b_k$ *sor is divergens.*

Bizonyítás. Pozitív tagú sor részletösszegei monoton növekvő sorozatot alkotnak, másrészt a megfelelő részletösszegekre: $s_n^a \leq s_n^b$. Ezért ha $\lim s_n^b$ véges határérték, akkor $\lim s_n^a$ is az. De ha $\lim s_n^a = \infty$, akkor $\lim s_n^b = \infty$ is teljesül. $\square$

Állítás. *(Hányadoskritérium)*

Egy pozitív tagú $\sum a_k$ *sor esetén*

ha minden $k \in \mathbb{N}$*-re* $\dfrac{a_{k+1}}{a_k} \leq q < 1$*, akkor* $\sum a_k$ *konvergens,*

ha minden $k \in \mathbb{N}$*-re* $\dfrac{a_{k+1}}{a_k} \geq 1$*, akkor* $\sum a_k$ *divergens.*

Bizonyítás. Az első esetben láthatjuk, hogy $a_k \leq a_1 q^{k-1}$ teljesül minden $k \in \mathbb{N}$-re. Ezért a $\sum a_1 q^{k-1}$ mértani sor majorálja a $\sum a_k$ sort, ezért az konvergens.

A második esetben $a_1 \geq a_k$ teljesül minden $k \in \mathbb{N}$ esetén, ezért a divergens $\sum_{k=1}^{\infty} a_1$ sor minorálja a $\sum a_k$ sort. $\square$

Állítás. *(Gyökkritérium)*

Egy pozitív tagú $\sum a_k$ *sor esetén*

ha minden $k \in \mathbb{N}$*-re* $\sqrt[k]{a_k} \leq q < 1$*, akkor* $\sum a_k$ *konvergens,*

ha minden $k \in \mathbb{N}$*-re* $a_k \geq 1$*, akkor* $\sum a_k$ *divergens.*

Bizonyítás. A majoráns krtériumot használjuk: a feltétel alapján $a_k \leq q^k$, és a $\sum q^k$ konvergens, ezért $\sum a_k$ is az.

Ha $a_k \geq 1$, akkor nyilván a $\sum a_k$ sor tagjai a divergens $\sum 1$ sor tagjainál nagyobbak (vagy egyenlők). $\square$

Megjegyzés. Ha az előző kritériumokban szereplő feltételek egyike sem teljesül, pl. $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = 1$ (növekedve), akkor akár a konvergencia akár a divergencia bekövetkezhet.

Hatványsorok

Előbb a függvénysort értelmezzük, melynek speciális esete a hatványsor.

Legyenek $f_1, f_2, \ldots, f_k, \ldots$ függvények mind ugyanazon az $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon értelmezettek. Az

$$f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_k(x) + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

végtelen tagú összeget *függvénysor*nak nevezzük. A függvénysor x-ban konvergens, ha a $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ számsor konvergens. Azon pontok halmazát, amelyekben a függvénysor konvergens, a függvénysor konvergenciatartományának nevezzük.

A függvénysorokkal kapcsolatban is számos fontos érdekes kérdés merül fel; hol konvergensek, az összegfüggvény tulajdonságaira (folytonosság, differenciálhatóság, integrálhatóság) hogyan következtethetünk a sor tagjainak tulajdonságaiból.

A $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ függvénysort *hatványsor*nak nevezzük.

(Most az index 0-tól, indul, hogy konstans tag is lehessen.) A hatványsort úgy tekinthetjük, mint végtelen sok tagú polinomot. A hatványsor konvergenciatartományával kapcsolatban a következőket mondhatjuk:

Állítás. *Tekintsük a* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *hatványsort, és együtthatóikból képezzük az*

$$b_k = \sqrt[k]{|a_k|} \quad k \in \mathbb{N}$$

számsorozatot.

Ha (b_k) *nem korlátos, akkor a hatványsor csak* $x = 0$*-ban konvergens.*

Ha (b_k) korlátos és a legnagyobb torlódási pontja $a \neq 0$, akkor a hatványsor abszolút konvergens minden $|x| < \frac{1}{a}$ esetén.

Ha (b_k) korlátos, és csak $a = 0$ a torlódási pontja, akkor minden $x \in \mathbb{R}$ esetén abszolút konvergens a hatványsor.

Bizonyítás. Ha (b_k) nem korlátos, akkor bármely $x \neq 0$ esetén végtelen sok k-ra $\sqrt[k]{|a_k|} > \frac{1}{|x|}$, azaz $|a_k x^k| > 1$. Ez azt jelenti, hogy a sor általános tagja nem tart nullához, tehát a sor $x \neq 0$ esetén nem konvergens.

Második esetben bármely $|x| < \frac{1}{a}$ esetén legyen x_0 olyan, hogy $|x| < x_0 < \frac{1}{a}$. Ekkor véges sok k kivételével

$$\sqrt[k]{|a_k|} < \frac{1}{x_0} < \frac{1}{|x|}, \text{ azaz } |a_k x^k| < \left(\frac{x}{x_0}\right)^k < 1.$$

Így a majoráns kritérium alapján a $\sum a_k x^k$ sor abszolút konvergens.

Harmadjára bármely $x \neq 0$ esetén véges sok k kivételével

$$\sqrt[k]{|a_k|} < \frac{1}{2|x|}, \text{ azaz } |a_k x^k| < \frac{1}{2^k},$$

ezért a $\sum a_k x^k$ hatványsor abszolút konvergens. $\square$

Példa.

- A geometriai sor
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^k + \ldots$$
bármely $|x| < 1$-re konvergens. $(-x)$-re alkalmazva
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^k x^k + \ldots$$

- Az $1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots + \dfrac{x^k}{k!} + \ldots$
sor minden $x \in \mathbb{R}$ esetén konvergens, s az e^x függvényt adja.

- Az $x - \dfrac{x^3}{3!} \pm \ldots + (-1)^{2k+1} \dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \pm \ldots$ sor minden $x \in \mathbb{R}$ esetén konvergens, s a $\sin x$ függvényt adja.