Határozott integrál

- definíció folytonos függvények esetén
- definíció korlátos függvények esetén
- Newton -Leibniz szabály
- integrálási szabályok
- alkalmazások
- improprius integrál

Legyen az f függvény $[a, b]$-n értelmezett folytonos függvény. Tekintsük az $[a, b]$ intervallum egy 2^n egyenlő részre történő beosztását. Ilyenkor az osztópontok:

$$x_i = a + i\frac{b-a}{2^n}, \quad i = 0, 1, \ldots, 2^n.$$

Az egyes részintervallumok hossza $\frac{b-a}{2^n}$. Jelölje m_i az i-dik részintervallumban a függvényértékek minimumát (ezt felveszi a függvény, hiszen folytonos):

$$m_i = \min\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

Ehhez a beosztáshoz képezzük az ún. (alsó) közelítő összeget:

$$s_n = \sum_{i=1}^{2^n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

s_n szemléletes jelentése (pozitív függvény esetében) nem más, mint az adott beosztáshoz tartozó beírható téglalapok területösszege.

Állítás. *Az s_n sorozat konvergens.*

Bizonyítás. Először azt mutatjuk meg, hogy s_n felülről korlátos. Ugyanis, jelölje M a f függvény egy felső korlátját. Nyilván $m_i \leq M$. Ezért

$$s_n = \sum_{i=1}^{2^n} m_i(x_i - x_{i-1}) \leq M \sum_{i=1}^{2^n} (x_i - x_{i-1}) = M(b-a)$$

Másodjára belátjuk, hogy s_n monoton nő. Ha egy intervallumon egy folytonos függvény minimuma m, akkor az intervallum felezésével adódó két részintervallum mindegyikén a függvény minimuma legalább m. Emiatt az s_{n+1} előállításában szereplő két-két tag s_n egy-egy tagjával alulról becsülhető:

$$s_{n+1} = \ldots + m'_{2i-1}\frac{b-a}{2^{n+1}} + m'_{2i}\frac{b-a}{2^{n+1}} + \ldots \geq \ldots + m_i\frac{b-a}{2^n} + \ldots = s_n$$

Tehát s_n monoton növekvő és felülről korlátos, ezért konvergens. $\square$

Definíció. *Az s_n alsó közelítő összegek sorozatának határértéket az f függvény $[a,b]$ intervallumra vonatkozó* határozott integrál*jának nevezzük. Jelölése:*

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{vagy} \quad \int_a^b f.$$

Nem folytonos, de korlátos függvény esetében a határozott integrál így nem értelmezhető. Ekkor minimumok és maximumok helyett az alsó, illetve a felső közelítő összegek képzésében a pontos alsó korlát és a pontos felső korlát fogalmát használjuk:

$$m_i = \inf \{ f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i] \}$$

$$M_i = \sup \{ f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i] \}$$

s ezekkel képezzük az s és S alsó, illetve felső közelítő összegeket. Tekintsük az $[a, b]$ intervallum összes lehetséges beosztásához (nemcsak az egyenlő részekre való felosztásokhoz) tartozó alsó és felső közelítő összegeket:

$$s = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

$$S = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

Akkor mondjuk f-et $[a, b]$-n integrálhatónak, ha az alsó közelítő összegek pontos felső korlátja megegyezik a felső közelítő összegek pontos alsó korlátjával, azaz csak egy olyan szám van, amely nagyobb vagy egyenlő bármely alsó közelítő összegnél, és kisebb vagy egyenlő bármely felső közelítő összegnél. Ezt a számot nevezzük f $[a, b]$-re vonatkozó határozott integráljának. Ezt az integrálfogalmat **Riemann-integrál**nak is nevezik.

Ez utóbbi értelemben természetesen nem minden függvény integrálható, de a tipikusak, pl. a folytonosak, a monotonak bizonyíthatóan igen.

Nem integrálható függvényre példa az a $[0,1]$-en értelmezett függvény, amely minden racionális x szám esetén 0-át vesz fel értékként, s 1-et minden irracionális x szám esetén. Ennél a függvénynél nyilván minden alsó közelítő összeg 0, s minden felső közelítő összeg 1.

A határozott integrál értelmezéséből könnyen adódnak az alábbi tulajdonságok:

1) ha f és g $[a,b]$-n folytonos, akkor

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$$

2) ha f folytonos és $\lambda \in \mathbb{R}$ konstans, akkor

$$\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$$

3) ha f folytonos és $c \in (a,b)$, akkor

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

4) ha $m \leq f(x) \leq M$ minden $x \in [a,b]$-re, akkor

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$$

- Megállapodás szerint $\int_a^a f = 0$ és $\int_b^a f = -\int_a^b f$.

- A 4) tulajdonság miatt

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f \leq M,$$

így folytonos f esetén m-nek a függvény minimumát, M-nek pedig a maximumát választva következik, hogy van olyan $\xi \in (a,b)$, hogy

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f$$

Ez utóbbi értéket az f függvény $[a,b]$ intervallumra vonatkozó integrálközepének is nevezik.

Newton-Leibniz tétel

A most bizonyítandó formula azt fejezi ki, hogy a határozott integrál könnyen kifejezhető f egy primitív függvényének ismeretében: a primitív függvénynek a végpontokban felvett értékeinek a különbsége. Ez lényegesen megkönnyíti a határozott integrálok kiszámítását.

Előbb azt látjuk be, hogy ha a határozott integrál esetében a felső határt változónak tekintjük, akkor tulajdonképpen f egy primitív függvényét kapjuk.

Legyen

$$T(x) = \int_a^x f \qquad (x \in [a,b])$$

Elnevezése: területmérő függvény vagy integrálfüggvény.

Állítás. *Ha f folytonos $[a,b]$-n, akkor a $T\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ területmérő függvény mindenütt differenciálható, és $T' = f$, azaz T primitív függvénye (határozatlan integrálja) f-nek.*

Bizonyítás. $x_0 \in [a,b]$-ben vizsgáljuk a differenciálhatóságot. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $x > x_0$. A határozott integrál tulajdonságait kihasználva

$$\frac{T(x) - T(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0}\left(\int_a^x f - \int_a^{x_0} f\right) =$$

$$= \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x f = f(\xi)$$

ahol $\xi \in (x_0, x)$. Ezért

$$\lim_{x \to x_0} = \frac{T(x) - T(x_0)}{x - x_0} = f(x_0),$$

azaz $T'(x_0) = f(x_0)$. $\square$

Állítás. *(Newton-Leibniz szabály) Ha F primitív függvénye az f $[a, b]$-n folytonos függvénynek, akkor*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Bizonyítás. Az előbb láttuk, hogy a $T(x) = \int_a^x f$ területmérő függvény is primitív függvénye f-nek, ezért $F(x) = T(x) + C$, ahol $C \in \mathbb{R}$ konstans. Így $T(a) = 0$ miatt

$$\int_a^b f = T(b) - T(a) = F(b) - F(a).$$

$\square$

A jobboldali kifejezésre gyakran a tömörített $[F(x)]_a^b$ jelölést alkalmazzuk.

Példa. Számítsuk ki a $\int_0^{\pi/2} \sin x \, dx$ határozott integrált!

Mivel $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$,

$$\int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{\pi/2} = -\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0 = 1.$$

Ezzel megkaptuk a szinusz "félhullám' alatti területet.

Integrálási szabályok

A parciális integrálás és a helyettesítéses integrálás szabályát határozott integrálokra is kiterjeszthetjük.

Állítás. *Ha* f *és* g $[a,b]$*-n differenciálható függvények és léteznek az* $\int f'g$ *és* $\int fg'$ *határozatlan integrálok, akkor*

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

Bizonyítás. A Newton-Leibniz szabály alapján

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = \left[\int f'(x)g(x)\,dx\right]_a^b =$$

$$= \left[f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx\right]_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

$\square$

Állítás. *Ha f $[a,b]$-n folytonos, van primitív függvénye és $g\colon [\alpha,\beta] \to [a,b]$ bijektív differenciálható függvény, $g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$, akkor*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt.$$

Bizonyítás.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[\int f(x)\,dx\right]_a^b = \left[\int f(g(t))g'(t)\,dt\,(g^{-1}(x))\right]_a^b =$$

$$= \left[\int f(g(t))g'(t)\,dt\right]_\alpha^\beta = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt.$$

$\square$

Példa. Számítsuk ki az $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$ határozott integrált!

Az $x = g(t) = \ln t$, $t = e^x$ helyettesítést választjuk. Most $g'(t) = \frac{1}{t}$, s $g(1) = 0$, $g(e) = 1$, ezért

$$\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \int_1^e \frac{t}{1+t^2}\frac{1}{t}\,dt = \int_1^e \frac{1}{1+t^2}\,dt = [\operatorname{arc}\operatorname{tg} t]_1^e = \operatorname{arc}\operatorname{tg} e - \frac{\pi}{4}.$$

Alkalmazások

A) Tegyük fel most, hogy két függvény görbéje zár közre egy síktartományt, úgy, hogy $f(a) = g(a)$ és $f(b) = g(b)$, továbbá $f(x) \geq g(x)$ minden $x \in [a, b]$-re. Ilyenkor a két függvény görbe közötti síktartomány területe nyilván

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx.$$

Példaképp számítsuk ki a kör területét! A felső félkört az $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ függvény írja le, míg az alsót az $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$ függvény. A

$$T = \int_{-R}^{R} 2\sqrt{R^2 - x^2}\,dx$$

határozott integrált kell kiszámítani.

Az $x = g(t) = R\sin t$ helyettesítést alkalmazzuk; most $g'(t) = R\cos t$ és $g(-\pi/2) = -R$, $g(\pi/2) = R$. Így

$$T = \int_{-R}^{R} 2\sqrt{R^2 - x^2}\,dx = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} R^2 \cos^2 t dt =$$

$$= R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos 2t)\,dt = R^2 \left[t + \frac{\cos 2t}{2}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = R^2\pi.$$

B) Egy függvénygörbe ívhosszát is meghatározhatjuk integrállal. Tegyük fel, hogy $[a, b]$-n egy f folytonosan differenciálható függvény adott. Ilyenkor az $[a, b]$-hez tartozó függvénygörbe ívhossza

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

amennyiben a szóbanforgó integrál létezik.

Ugyanis a görbe ívhosszát közelíthetjük az $[a, b]$ egy beosztásához tartozó töröttvonallal, melynek hossza

$$\sum_{i=1}^{n} d(P_{i-1}P_i) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$$

Lagrange tétele szerint $f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ valamilyen $\xi_i \in (x_i, x_{i-1})$-kel, így

$$\sum_{i=1}^{n} d(P_{i-1}P_i) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}(x_i - x_{i-1})$$

C) Forgástestek felszínét és térfogatát is meghatározhatjuk integrállal. Ha az $y = f(x)$ folytonosan differenciálható függvénygörbe $[a, b]$ között részét megforgatjuk az x tengely körül, akkor a kapott forgásfelület felszíne:

$$F = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

illetve folytonos f esetén a forgástest térfogata

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx.$$

Az első szabály a csonkakúp palástjának felszínére vonatkozó összefüggés alkalmazásával igazolható, a második majd' nyilvánvaló.

Példa. Vezessük le a gömb felszínére és térfogatára vonatkozó képleteket!

Most $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, így $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}$.

$$F = 2\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}\, dx =$$

$$= 2\pi \int_{-R}^{R} R\, dx = 2\pi [Rx]_{-R}^{R} = 4\pi R^2.$$

$$V = \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)\, dx = \pi \left[R^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{-R}^{R} = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

Improprius integrálok

Az integrálfogalom egyfajta kiterjesztését teszik lehetővé az improprius integrálok; egyik esetben nem véges intervallumra, másik esetben pedig nem korlátos függvényekre.

A) Tegyük fel, hogy az $f(x)$ folytonos függvény értelmezve van minden $x \geq a$-ra. Tekintsük a

$$T(b) = \int_a^b f(x)\, dx$$

határozott integrált. Ha a T függvénynek van véges határértéke a végtelenben, akkor azt mondjuk, hogy f-nek az $[a, \infty)$ intervallumon létezik az *improprius integrálja*. Jelölése:

$$\int_a^\infty f(x)\, dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\, dx$$

Most, mint látjuk, ezt az integrált nem közelítő összegek segítségével definiáltuk, hanem korlátos intervallumon vett határozott integrálok határértékeként.

Egy balról végtelen $(\infty, a]$ intervallumon folytonos f függvény improprius integrálja az előbbihez hasonlóan értelmezhető:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{b \to -\infty} \int_{b}^{a} f(x)\,dx$$

Legyen most f az egész számegyenesen folytonos függvény. Ekkor ha valamilyen $a \in R$ mellett létezik az $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ és az $\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$ improprius integrál, akkor az f függvény egész számegyenesen vett improprius integrálja:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$$

Könnyen látható, hogy az így értelmezett integrál nem függ az a szám megválasztásától.

Példa. Számítsuk ki az

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

improprius integrált!

$a = 0$-nál bontjuk:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} [\operatorname{arc\,tg} x]_0^b = \frac{\pi}{2}$$

A szimmetriából adódóan a balodali rész is ugyanannyi, így

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

B) A függvény, melynek integrálját akarjuk értelmezni, legyen most olyan, hogy csupán $(a, b]$-n értelmezett (és folytonos), de nem feltétlenül korlátos. Ilyenkor az

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

improprius integrálon a következő határértéket értjük, ha létezik:

$$\lim_{y \to a+0} \int_y^b f(x)\,dx.$$

Hasonlóan értelmezendő az improprius integrál, ha az f függvény b-ben nincs értelmezve.

Példa. Számítsuk ki a $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ improprius integrált!

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{y\to 0} \int_y^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{y\to 0} \left[2\sqrt{x}\right]_y^1 = \lim_{y\to 0} (2 - 2\sqrt{y}) = 2.$$

Nem létezik viszont pl. a következő improprius integrál:

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{y\to 0} \int_y^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{y\to 0} [\ln x]_y^1 = \lim_{y\to 0} (-\ln y) = \infty.$$

Ilyenkor azt is mondjuk ez az integrál nem konvergens.