# Határozatlan integrál

A deriválás egy mindenütt differenciálható függvényhez hozzárendeli a deriváltfüggvényét. A határozatlan integrál keresése a deriválásnak az ellentettje. Most megadott $f$ egyváltozós valós függvényhez keresünk olyan $F$ ugyanott értelmezett és mindenütt differenciálható függvényt, amelynek a deriváltfüggvénye éppen $f$: $F' = f$. Az ilyen $F$ függvényt $f$ *primitív függvényének* nevezzük, s $f$ primitív függvényeinek halmazát $f$ *határozatlan integráljának* mondjuk. Jele: $F = \int f$ vagy $F(x) = \int f(x)dx$. Ilyenkor $f$-et integrandusnak is mondjuk. A 'határozatlan' jelző arra utal, hogy $f$-nek — ha egyáltalán van, — nemcsak egy primitív függvénye van. Ugyanis, ha $F$ primitív függvénye $f$-nek, akkor $F(x) + C$ is az, (ahol $C$ egy valós konstans függvényt jelöl,) hiszen a konstans függvény deriváltja nulla. $f$-nek más primitív függvénye viszont már nincs is, hiszen ha $F' = G' = f$, akkor $G - F = C$ (konstans) következik. Összefoglalva, ha egy $f$ függvénynek van egy $F$ primitív függvénye, akkor végtelen sok is van, de azok $F$-től csak egy konstansban térnek el.

A függvények deriválása során számos elemi függvénynek megismertük a deriváltfüggvényét. Ennek alapján azonnal adódik néhány függvény határozatlan integrálja.

## Alapintegrálok

Az alapintegrálok felsorolásában $C$ tetszőleges konstans valós számot jelöl.

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \text{ ha } \quad \alpha \neq -1.$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int a^{x} dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + C, \text{ speciálisan } \quad \int e^{x} dx = e^{x} + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^{2} x} dx = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arc}\ \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + C$$

# Integrálási szabályok

A deriválás tulajdonságaiból könnyen adódnak az alábbi integrálási szabályok:

$$\int (f+g) = \int f + \int g$$

$$\int \lambda f = \lambda \int f$$

részletesebben kiírva:

$$\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int \lambda f(x)\,dx = \lambda \int f(x)\,dx$$

ahol $\lambda \in \mathbb{R}$ konstans.

A szorzatfüggvény deriválási szabályából kapjuk az ún. *parciális integrálás* szabályát:

Állítás.

$$\int f'g = fg - \int fg'$$

*részletesebben kiírva:*

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$$

Bizonyítás. A jobboldalon szereplő függvény deriváltját képezzük:

$$(fg - \int fg')' = (fg)' - fg' = f'g + fg' - fg' = f'g.$$

$\square$

**Példa.** 1) Az $x \cos x$ függvény határozatlan integráljának megkereséséhez célszerű $\cos x$-et deriváltfüggvénynek tekinteni, mert a parciális integrálás során a másik (az $x$ függvény) fokszáma csökken. Tehát $f(x) = x$, $g'(x) = \cos x$ választással $g(x) = \sin x$, így

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int 1 \cdot \sin x dx = x \sin x + \cos x + C$$

2)

$$\int e^x x \, dx = e^x x - \int e^x \cdot 1 \, dx =$$

$$= e^x x - e^x + C = e^x (x - 1) + C$$

3) Az $\ln x$ függvény határozatlan integráljának megkeresésére is alkalmazhatjuk a parciális integrálás módszerét. $f(x) = \ln x$, $g'(x) = 1$ választással

$$\ln x dx = \int \ln x \cdot 1 dx = x \ln x - \int \frac{1}{x} x dx = x \ln x - x + C$$

4) Néha a parciális integrálás többszöri alkalmazása vezet eredményre. Például

$$\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx =$$

$$= e^x \sin x - (e^x \cos x + \int e^x \sin x dx) =$$

$$= e^x (\sin x - \cos x) - \int e^x \sin x dx$$

alapján

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C$$

Az összetett függvényderiválási szabályának megfelelője a *helyettesítéssel való integrálás.*

Állítás.

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))\, g'(t)dt\ (g^{-1}(x))$$

*(A jobboldali integrálfüggvény* $t$ *változójába* $g^{-1}(x)$ *van helyettesítve.)*

Bizonyítás. A jobboldalon szereplő függvény deriváltját képezzük az összetett függvény deriválási szabálya és az inverz függvény deriválási szabálya alapján:

$$\left(\int f(g(t))\, g'(t)dt\ (g^{-1}(x))\right)' =$$

$$= f(g(g^{-1}(x)))\, g'\ (g^{-1}(x)) \cdot \frac{1}{g'(g^{-1}(x))} = f(x)$$

$\square$

A helyettesítéssel való integrálás módszere a következő lépésekből áll:

1) kiválasztjuk az $x$ helyére helyettesítendő $g(t)$ függvényt, meghatározzuk a $g'(t)$ deriváltfüggvényt,

2) $\int f(x)dx$-ben $x$ helyébe $g(t)$-t, $dx$ helyébe $g'(t)dt$-t írunk és kiszámítjuk a most adódó határozatlan integrált (ennek $t$ a változója),

3) végül $t$ helyére visszahelyettesítjük a $g^{-1}(x)$ függvényt, s ezzel megkapjuk az $x$ függvényeként adódó keresett határozatlan integrált.

**Példa:** $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$. Alkalmazzuk az

$e^x = t$ helyettesítést: $x = g(t) = \ln t$, $g'(t) = \frac{1}{t}$.

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \int \frac{t}{1+t^2}\frac{1}{t}\,dt =$$

$$\int \frac{1}{1+t^2}\,dt = \operatorname{arc\,tg} t + C = \operatorname{arc\,tg}(1+e^x) + C$$

**Példa.** Meghatározandó $\int \sqrt{1-x^2}dx$. Alkalmazzuk az $x = g(t) =$ $\sin t$ helyettesítést. Most $g^{-1}(x) = \operatorname{arc\,sin} x$, és $g'(t) = \cos t$. Így

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt = \int \cos^2 t dt =$$

$$= \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} = \frac{1}{2}(t + \sin t \cos t) =$$

$$= \frac{1}{2}(\text{arc } \sin x + x\sqrt{1-x^2})$$

A helyettesítéses integrálás egyszerűbb eseteit gyakran alkalmazhatjuk:

1) Ha $f$-nek $F$ primitív függvénye, akkor

$$\int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C$$

2)

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$$

3)

$$\int f^{\alpha}(x)\, f'(x)dx = \frac{1}{\alpha+1} f^{\alpha+1}(x) + C \quad \text{ha} \quad \alpha \neq -1.$$

4)

$$\int f'(x)e^{f(x)}\,dx = e^{f(x)} + C$$

5)

$$\int f'(x)\cos f(x)\,dx = \sin f(x) + C$$

**Példa.**

$$\int \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

$$\int \operatorname{tg} x dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int 2x\sqrt[3]{1+x^2}dx = \int 2x(1+x^2)^{\frac{1}{3}}dx = (1+x^2)^{\frac{4}{3}} \cdot \frac{3}{4} + C$$

# Racionális törtfüggvények integrálása

Racionális törtfüggvények: két polinom hányadosa:

$$f(x) = \frac{a_k x^k + \dots a_1 x + a_0}{b_n x^n + \dots b_1 x + b_0}.$$

Az ilyen függvények határozatlan integráljai mindig meghatározhatók az elemi törtekre bontás segítségével.

$$\int \frac{1}{x-a} dx = \ln|x-a| + C$$

$$\int \frac{1}{(x-a)^\alpha} dx = \frac{1/(1-\alpha)}{(x-a)^{\alpha-1}} + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arc}\operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$$

Az $\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx$ alakú határozatlan integrál kiszámításához 3 esetet tárgyalunk:

- $D = b^2 - 4ac = 0$. Ilyenkor

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx = \int \frac{1}{a(x-x_0)^2}dx =$$

$$= -\frac{1}{a(x-x_0)} + C$$

- $D = b^2 - 4ac > 0$. Ekkor a nevezőben szereplő polinomnak két különböző gyöke van. Az integrandus

$$\frac{1}{a(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{1}{a}\left[\frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2}\right]$$

ún. elemi törtekre bontható, ahol az

$$A + B = 0$$

$$-Ax_2 - Bx_1 = -1$$

összefüggéseknek kell teljesülni. Innen
$A = \frac{1}{x_2 - x_1}$ és $B = \frac{1}{x_1 - x_2}$ következik.

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx = \frac{1}{a}\int\left(\frac{1/(x_2-x_1)}{x-x_1} + \frac{1/(x_1-x_2)}{x-x_2}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{a}\left[\frac{1}{x_2-x_1}\ln|x-x_1| + \frac{1}{x_1-x_2}\ln|x-x_2|\right] + C$$

- $D = b^2 - 4ac < 0$. Most nincs gyöke a nevezőnek. Átalakítással az $\int \frac{1}{1+x^2}dx$ alapintegrálra vezetjük vissza a keresendőt.

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx = \int \frac{1}{a(x+\frac{b}{2a})^2 - \frac{D}{4a}}dx =$$

$$= -\frac{4a}{D}\int \frac{1}{(\frac{2a}{\sqrt{-D}}x + \frac{b}{\sqrt{-D}})^2 + 1}dx =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{-D}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2a}{\sqrt{-D}}x + \frac{b}{\sqrt{-D}}\right) + C.$$

A második esetben bemutatott elemi törtekre bontás bonyolultabb esetekben is lehetséges, amennyiben a nevezőben szereplő polinom gyökeit ismerjük.

**Példa.** Meghatározandó az $\int \frac{3x^2-1}{(x-1)(x^2+1)}dx$ határozatlan integrál.

Az integrandust most $\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$ alakban kívánjuk fölbontani. Ekkor szükségképpen

$$3x^2-1 = A(x^2+1)+(Bx+C)(x-1),$$

azaz

$$A+B=3$$

$$C-B=0$$

$$A-C=-1$$

ahonnan $A = 1$, $B = 2$, $C = 2$ adódik. Így

$$\int \frac{3x^2 - 1}{(x-1)(x^2+1)} dx =$$

$$= \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{2x}{x^2+1} dx + \int \frac{1}{x^2+1} dx =$$

$$= \ln|x-1| + \ln(x^2+1) + 2\operatorname{arc\,tg} x.$$