Függvények határértéke és folytonossága

Egy $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt *korlátos*nak nevezünk, ha a függvényértékek halmaza korlátos. Ha $f(x) \leq f(x_0)$ teljesül minden $x \in D$ esetén, akkor x_0-at a függvény maximumhelyének mondjuk, $f(x_0)$-at pedig az (abszolút) maximumértékének. $f(x) \leq f(x_0)$ esetén minimumhelyről és minimumértékről beszélünk. x_0-at f *helyi minimumhely*ének (maximumhelyének) mondjuk, ha van x_0-nak olyan G környezete, hogy minden $x \in G \cap D$ esetén $f(x) \geq f(x_0)$ (illetve $f(x) \leq f(x_0)$).

A f függvényt monoton növekedőnek (csökkenőnek) nevezzük, ha bármely $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in D$ esetén $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$). Szigorú monotonitásról beszélünk, ha az utóbbi egyenlőtlenségekben a szigorú egyenlőtlenség jele ($<$) áll.

Határérték

Definíció. *Tekintsük az $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény értelmezési tartományának egy x_0 torlódási pontját. Az f függvény x_0-beli határértékének nevezünk egy a számot, ha bármely x_0-hoz konvergáló $x_n \in D$, $x_n \neq x_0$ sorozat esetében az $f(x_n)$ sorozat konvergál a-hoz.*

Állítás. *Legyen x_0 az $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény értelmezési tartományának egy x_0 torlódási pontja. Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy f x_0-beli határértéke a legyen, az, hogy a-nak bármely nyílt $G(a,\varepsilon)$ környezetéhez létezzen x_0-nak olyan nyílt $G(x_0,\delta)$ környezete, hogy ha $x \in G(x_0,\delta) \cap D$, $x \neq x_0$, akkor $f(x) \in G(a,\varepsilon)$.*

Bizonyítás. A mondott feltétel elégséges: Legyen $x_n \in D$, $x_n \neq x_0$ olyan sorozat, hogy $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Azt kell belátnunk, hogy $f(x_n) \to a$. Tekintsük a-nak egy tetszőleges $G(a,\varepsilon)$ nyílt környezetét, a feltétel miatt van olyan $\delta > 0$ sugarú környezete x_0-nak, hogy ha $x \in G(x_0,\delta) \cap D$, $x \neq x_0$. akkor $f(x) \in G(a,\varepsilon)$. $x_n \to x_0$ miatt ezen $\delta > 0$-hoz van olyan $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy bármely $n > n_0$-ra $x_n \in G(x_0,\delta)$. Ekkor $f(x_n) \in G(a,\varepsilon)$ minden $n > n_0$ esetén, azaz $f(x_n) \to a$.

A feltétel szükséges: Indirekt módon bizonyítunk. Tegyük fel, hogy van egy olyan $\varepsilon > 0$ sugarú $G(a,\varepsilon)$ nyílt környezete a-nak, melyhez x_0-nak egyetlen $G(x_0,\delta)$ nyílt környezete sem jó. Ekkor bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén van olyan $x_n \in G(x_0,\frac{1}{n}) \cap D$, $(x_n \neq x_0)$, hogy $f(x_n) \notin G(a,\varepsilon)$. Ez azt jelenti, hogy bár $x_n \to x_0$, de $f(x_n)$ nem konvergál a-hoz. Ez ellentmond annak, hogy f x_0-beli határértéke a. $\square$

Határérték és műveletek

Állítás. *Legyen* $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ *és* $\lim_{x \to x_0} g(x) = b$. *Ekkor*

- $\lim_{x \to x_0}(f(x) + g(x)) = a + b$

- $\lim_{x \to x_0}(f(x)\ g(x)) = a\,b$

- *ha* $g(x) \neq 0$ *és* $b \neq 0$, *akkor* $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$.

- *ha* $f(x) \leq g(x)$ *minden* $x \in D$*-re, akkor* $\lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x)$

- *ha* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a$ *és* $f(x) \le h(x) \le g(x)$ *minden* $x \in D$*-re, akkor* $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = a$.

Bizonyítás. Az összeg esetében, tekintsünk egy tetszőleges $x_n \in D$, $x_n \neq x_0$, x_0-hoz konvergáló sorozatot: $x_n \to x_0$. Ilyenkor az $f(x_n)$ sorozat konvergál a-hoz, a $g(x_n)$ sorozat konvergál b-hez, ezért a sorozatok konvergenciájának megfelelő tulajdonsága miatt $f(x_n) + g(x_n)$ konvergál $a + b$-hez.

A többi állítás is ezen séma alapján igazolható. $\square$

Állítás. *Legyenek adottak az* $f\colon D_1 \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *és* $g\colon D_2 \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvények úgy, hogy* $f(D_1) \subset D_2$*. Ha* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, $a \notin f(D_1)$, *és* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$, *akkor* $\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x)) = b$.

Bizonyítás.

$$x_n \to x_0 \Longrightarrow f(x_n) \to a \Longrightarrow g(f(x_n)) \to b.$$

$\square$

Folytonosság

Definíció. *Az* $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvényt* folytonos*nak nevezzük az értelmezési tartományának* x_0 *torlódási pontjában, ha*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

- A definíciót közvetlenül, a határtérték fogalma nélkül is megadhattuk volna:

  f folytonos $x_0 \in D$-ben,

  ha bármely $x_n \in D$, $x_n \to x_0$ esetén
  $f(x_n) \to f(x_0)$.

Ha ugyanis x_0 nem torlódási pontja D-nek, akkor $f(x_n) \to f(x_0)$ mindig teljesül, hiszen ilyenkor $x_n \to x_0$ csak úgy lehet, ha $x_n = x_0$ minden n-re legfeljebb véges sok kivételével.

- Környezetek segítségével a folytonosság így fogalmazható meg:
  $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pontosan akkor folytonos x_0-ban, ha $f(x_0)$ bármely nyílt
  $G(f(x_0), \varepsilon)$ környezetéhez van x_0-nak olyan $G(x_0, \delta)$ nyílt környezete, hogy minden
  $x \in G(x_0, \delta)$-ra $f(x) \in G(f(x_0), \varepsilon)$. Az abszolút érték jelével ezt gyakran formálisan így fejezik ki:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \quad :$$

$$\forall x \in D \ : |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

- A folytonosság fogalma ugyanígy definiálható akár komplex változós, akár komplex értékű függvények esetében is.

- Folytonosság és műveletek

  A határérték és a műveletek kapcsolatát kifejező állítások következményeként azonnal adódik, hogy

  - ha f és g folytonos x_0-ban, akkor $f+g$ is folytonos x_0-ban.
  - ha f és g folytonos x_0-ban, akkor $f\,g$ is folytonos x_0-ban.
  - ha f és g folytonos x_0-ban, $g(x_0) \neq 0$, akkor $\dfrac{f}{g}$ is folytonos x_0-ban.
  - ha f folytonos x_0-ban és g folytonos $f(x_0)$-ban, akkor a $g \circ f$ összetett függvény is folytonos x_0-ban.

Egy f függvényt *folytonos*nak mondunk, ha értelmezési tartományának minden pontjában folytonos.

Állítás. *Ha* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *függvény folytonos, akkor korlátos is, és felveszi abszolút maximumát és minimumát.*

Bizonyítás. Indirekten tegyük fel, hogy f nem korlátos, pl. felülről nem korlátos. Akkor minden $n \in \mathbb{N}$-hez van olyan $x_n \in [a,b]$, hogy $f(x_n) > n$. Világos, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \to \infty$. Mivel $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ korlátos végtelen halmaz, ezért Bolzano-Weierstraß tétele miatt van torlódási pontja, legyen ez x_0. Mivel $[a,b]$ zárt, $x_0 \in [a,b]$. Az x_n sorozatból kiválasztható olyan részsorozat, amely x_0-hoz konvergál, jelölje ezt $\tilde{x}_k = x_{n_k}$, $k \in \mathbb{N}$. Ilyenkor tehát $\tilde{x}_k \to x_0$, de $f(\tilde{x}_k) \to \infty$. Ez ellentmond f x_0-beli folytonosságának.

A függvényértékek $\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$ halmaza tehát korlátos, tekintsük pontos alsó, illetve pontos felső korlátját, K_1 és K_2. Belátjuk, hogy létezik $x_1 \in [a,b]$ (és $x_2 \in [a,b]$), hogy $f(x_1) = K_1$ (és $f(x_2) = K_2$). Mivel K_1 pontos alsó korlát, bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén van olyan $x_n \in [a,b]$, hogy $K_1 \leq f(x_n) < K_1 + \frac{1}{n}$. x_n-ből ismét kiválasztható egy $\tilde{x}_k \to x_0 \in [a,b]$ konvergens részsorozat. Ekkor viszont $f(\tilde{x}_k) \to K_1$ és $f(\tilde{x}_k) \to f(x_0)$ is teljesül, ezért $K_1 = f(x_0)$. $\square$

Állítás. *Ha $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény folytonos x_0-ban és $f(x_0) \neq 0$, akkor a függvény jeltartó x_0-ban, azaz van x_0-nak olyan $G(x_0, \delta)$ nyílt környezete, hogy az e környezetből választott x-ekre $f(x)$ állandó előjelű.*

Állítás. *Ha* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *folytonos függvény és* $f(a) < f(b)$*, akkor bármely* y_0*-hoz, melyre* $f(a) \le y_0 \le f(b)$*, van olyan* $x_0 \in [a,b]$*, hogy* $f(x_0) = y_0$*.*

Bizonyítás. Feltehetjük, hogy
$f(a) < y_0 < f(b)$.
Legyen $A = \{x \in [a,b] \mid f(x_) < y_0\}$. A felülről korlátos, nem üres, ezért van pontos felső korlátja: $x_0 = \sup A$. Ha $f(x_0) > y_0$, akkor $f(x) - y_0$ jeltartó tulajdonsága miatt x_0 egy környezetében is $f(x) - y_0 > 0$ teljesülne, de ekkor x_0 nem lehet felső korlát, csak ha $x_0 = a$. De ekkor $f(a) > y_0$ következne, ami ellentmondás. Ha $f(x_0) < y_0$ lenne, akkor $f(x) < y_0$ teljesülne szinén x_0 egy környezetében, s így nem lehet x_0 felső korlát, csak ha $x_0 = b$. De ekkor $f(b) < y_0$ következne, ami lehetetlen. Tehát csak $f(x_0) = y_0$ lehetséges. $\square$

Állítás. *Ha* $f\colon [a,b] \to [c,d]$ *folytonos bijektív függvény, akkor szigorúan monoton és az inverz* $f^{-1}\colon [c,d] \to [a,b]$ *függvény is folytonos.*

Elemi függvények folytonossága

Elemi függvénynek nevezzük a konstans 1, az x, az exponenciális a^x, $(a > 0)$, a $\sin x$ függvényekből a műveletekkel (összeadás, kivonás, szorzás, osztás), az inverzképzéssel és az összetett függvény képzésével adódó függvényeket. Mindezek a lépések folytonos függvényekből kiindulva folytonos függvényt eredményeznek. 1, x, a^x, $\sin x$ folytonosságát belátva kapjuk majd, hogy az elemi függvények mind folytonosak, speciálisan pl. az összes polinomfüggvény, a logaritmusfüggvény, a gyökvonás függvénye, a trigonometrikus függvény és inverzeik, stb. mind folytonosak.

Állítás. *a)* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto c$ *függvény folytonos (*c *konstans)*

b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ *függvény folytonos*

c) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto a^x$ *függvény folytonos (*$a > 0$ *konstans)*

d) $f\colon\ R \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin x$ *függvény folytonos*

Bizonyítás. c)-hez előbb belátjuk azt, hogy ha $a > 0$, $b_n \to 0$, akkor $a^{b_n} \to 1$. Ugyanis, ha speciálisan $b_n = \dfrac{1}{n}$, $a > 1$, akkor $a^{\frac{1}{n}} = 1 + h_n$, $h_n \geq 0$ felbontással

$$a = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = (1 + h_n)^n \geq 1 + n\,h_n$$

teljesül a Bernoulli egyenlőtlenség miatt. Ebből

$$\frac{a-1}{n} \geq h_n$$

következik, amiből $h_n \to 0$, $a^{\frac{1}{n}} \to 1$ adódik. $0 < a < 1$ esetében $\frac{1}{a}$-ra alkalmazva a most bizonyítottat, azonnal adódik az $a^{\frac{1}{n}} \to 1$ konvergencia. Tetszőleges $b_n > 0, b_n \to 0$ sorozat esetében feltehetjük, hogy $b_n < 1$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$-hez van olyan $k_n \in \mathbb{N}$, hogy

$$\frac{1}{k_n+1} \leq b_n < \frac{1}{k_n}$$

Könnyen látható, hogy $b_n \to 0$ miatt $k_n \to \infty$. Az egyenlőtlenségből $a > 1$ miatt

$$a^{\frac{1}{k_n+1}} \leq a^{b_n} < a^{\frac{1}{k_n}}$$

A baloldalon és a jobboldalon szereplő sorozatok részsorozatai az $a^{\frac{1}{n}}$ sorozatnak, ezért 1-hez konvergálnak, s így a közrefogott a^{b_n} sorozat is. Vegyes előjelű b_n sorozat esetében bontsuk fel egy pozítív tagú c_n és egy negatív tagú d_n részsorozatra az eredetit. A pozitív tagúra, illetve negatív tagú (-1)-szeresére alkalmazva a most bizonyítottat: $a^{c_n} \to 1$ és $a^{-d_n} \to 1$. A másodikból $\dfrac{1}{a^{d_n}} \to 1$, s reciprokát véve $a^{d_n} \to 1$. E szerint a^{b_n} mindkét részsorozata 1-hez tart, ezért $a^{b_n} \to 1$.

Az a^x függvény x_0-beli folytonosságának bizonyításához tekintsünk egy $x_n \to x_0$ sorozatot. Ilyenkor $x_n - x_0 \to 0$, ezért $a^{x_n - x_0} \to 1$. Tetszőlegesen választott $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $|a^{x_n - x_0} - 1| < \dfrac{\varepsilon}{a^{x_0}}$, ha $n > n_0$. Ilyen n-ekre

$$|a^{x_n} - a^{x_0}| = a^{x_0}\,|a^{x_n - x_0} - 1| < a^{x_0}\,\frac{\varepsilon}{a^{x_0}} = \varepsilon$$

teljesül, ami $a^{x_n} \longrightarrow a^{x_0}$ konvergenciát jelenti.

c) A $\sin x$ függvény x_0-beli folytonosságának igazolásához az $\varepsilon - \delta$-s bizonyítási módot alkalmazzuk. Ismert trigonometriai képletet alkalmazva, a geometriailag nyilvánvaló $|\sin x| < |x|$ egyenlőtlenség miatt

$$|\sin x - \sin x_0| = 2\left|\sin \frac{x - x_0}{2}\right| \left|\cos \frac{x + x_0}{2}\right| \leq |x - x_0|.$$

Ez azt jelenti, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz a $\delta = \varepsilon$ választás jó: ha $|x - x_0| < \delta = \varepsilon$, akkor $|\sin x - \sin x_0| < \varepsilon$. $\square$

Néhány függvény határértéke

1. $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$

2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a.$

3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1.$

A határérték fogalom kiterjesztése

A végtelen, mint határérték

Definíció. *Az* $f \colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvény értelmezési tartományának* x_0 *torlódási pontjában a* határértéke végtelen, *ha bármely* $x_n \to x_0$, $x_n \in D$, $x_n \neq x_0$ *sorozat esetén* $f(x_n) \to \infty$. *Jele:* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

- Itt is megadható a környezetekkel történő definíció analógiája: f x_0-beli határértéke végtelen, ha bármely $K \in \mathbb{R}$ számhoz van olyan $G(x_0, \delta)$ nyílt környezete x_0-nak, hogy minden ebből vett, de x_0-tól különböző x-re $f(x) > K$.

- Hasonlatosan értelmezhető a mínusz végtelenhez való tartás is.

- E kibővített értelmű határértékről is egyszerű tulajdonságok fogalmazhatók meg. Pl.:
  - ha $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ és $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$, akkor $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \infty$ és $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\,g(x)) = \infty$
  - ha $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ és $\lim_{x\to x_0} g(x) > 0$, akkor $\lim_{x\to x_0}(f(x)\,g(x)) = \infty$.

- Például $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = \infty$

Végtelenben vett határérték

Definíció. *Legyen adott az olyan* $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvény, melynek értelmezési tartománya felülről nem korlátos. Azt mondjuk, hogy az* f *függvény* határértéke a végtelenben *az* a *szám, ha bármely* $x_n \in D, x_n \to \infty$ *sorozat esetén* $f(x_n) \to a$*. Jele:* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$*. Alulról nem korlátos értelmezési tartomány esetében értelmezhetjük a mínusz végtelenben a függvény határértékét:* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a$*, ha bármely* $x_n \in D, x_n \to -\infty$ *esetén* $f(x_n) \to a$*.*

- E definíciókat környezetek segítségével is megadhattuk volna, pl.:
  $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$, ha $\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\ K \in \mathbb{R}$, hogy $\forall\ x \in D$, $x > K$-ra $|f(x) - a| < \varepsilon$.

- A függvény határértéke a végtelenben (vagy a mínusz végtelenben) lehet akár végtelen, akár mínusz végtelen is:

  pl. $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ akkor teljesül, ha minden $x_n \to \infty$ esetén $f(x_n) \to \infty$.

- Példa: $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$,

  $\lim_{x \to \infty} \log_2 x = \infty$.

Bal-, és jobboldali határértékek

Definíció. *Legyen* $D = [a, b]$, *s* $a < x_0 < b$. *Az* $f\colon D \to \mathbb{R}$ *függvény* x_0*-beli* jobboldali határértéke végtelen, *ha*
bármely $x_n \in D$, $x_n > x_0$, $x_n \to x_0$ *sorozat esetén* $f(x_n) \to \infty$. *A jobboldali határérték jele:* $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x)$*, a baloldalié:* $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$.

Az $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvény* balról folytonos x_0*-ban, ha bármely* $\varepsilon > 0$*-hoz van olyan* $\delta > 0$*, hogy ha* $x \in (x_0 - \delta, x_0)$*, akkor* $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Példa: $\lim\limits_{x \to 0+0} \dfrac{1}{x} = \infty$,

$$\lim_{x\to\pi/2-0} \operatorname{tg} x = \infty,$$

az $f(x) = [x]$ egész-rész függvény 1-ben jobbról folytonos, de balról nem.

Megjegyzés. Ha az f függvénynek x_0-ban létezik baloldali és jobboldali (véges) határértéke, de ott nem folytonos, akkor x_0-at elsőfajú szakadási pontnak nevezzük. Ha ott jobboldali és balodali határértékük megegyezik, akkor megszüntethető szakadásnak mondjuk. Pl. $\dfrac{\sin x}{x}$ 0-ban megszüntethető szakadással rendelkezik. Az egyéb nem folytonossági helyeket másodfajú szakadási helynek mondjuk, pl. $\dfrac{1}{x}$ 0-ban, vagy $\sin\dfrac{1}{x}$ 0-ban.