# Differenciálegyenletek

- elsőrendű közönséges differenciálegyenlet
- kezdeti érték probléma
- szétválasztható differenciálegyenletek
- Lineáris differenciálegyenlet

Mint minden függvényekre vonatkozó egyenlet esetében jellemzően két alapvető kérdés van:
1) van-e megoldása vagy megoldásai az egyenletnek,
2) hogyan számíthatjuk ki a megoldást, vagy megoldásokat.

# Elsőrendű differenciálegyenlet

*Elsőrendű differenciálegyenlet*nek nevezzük az

$$y' = f(x, y)$$

egyenletet, ahol $f\colon I \times J \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kétváltozós folytonos függvény, $I, J$ nyílt intervallumok. Az $y\colon I^* \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény *megoldása* az előbbi differenciálegyenletnek, ha $I^* \subset I$, $y(I^*) \subset J$ és minden $x \in I$ esetén

$$y'(x) = f(x, y(x)).$$

- Az elsőrendű differenciálegyenlet, illetve a megoldás fogalmát geometriailag az ún. iránymezővel szemléltethetjük: ha minden $(x, y) \in I \times J$ pontban tekintjük azt az irányt, amelynek iránytangense éppen $f(x, y)$, akkor az $y(x)$ függvény akkor lesz megoldás, ha a függvénygörbe mentén ezek az irányok éppen a függvénygörbe érintői.

- Esetünkben a differenciálegyenlet az egyváltozós $y(x)$ függvényre vonatkozik. Ilyenkor közönséges differenciálegyenletről beszélünk. Amennyiben az ismeretlen függvény többváltozós, akkor parciális differenciálegyenletről van szó.

- Magasabb rendű differenciálegyenletről, akkor volna szó, ha az egyenletben az ismeretlen függvény magasabb rendű deriváltjai is szerepelnének.

- Egy elsőrendű differenciálegyenletnek általában végtelen sok megoldása van, ezeket azonban sokszor nem a szokásos explicit $y(x)$ alakban kapjuk, hanem egyenlet formájában. Pl. az $yy' + x = 0$ differenciálegyenlet megoldásai $x^2 + y^2 = C$ alakúak, ahol $C$ tetszőleges nemnegatív valós szám. Ebből a kapcsolatból $y$ majdnem egyértelműen, azaz előjeltől eltekintve egyértelműen határozható meg $x$ függvényeként. Ekkor tulajdonképpen a megoldás az $y = \sqrt{C - x^2}$ és az $y = -\sqrt{C - x^2}$ függvények egyesítése. A megoldás lényegében tehát egy kör, a $\sqrt{C}$ sugarú kör. $C$ különböző értékei esetén más-más köröket kapunk, melyek mind a differenciálegyenlet megoldásait jelentik. A megoldásgörbéket szokták integrálgörbéknek is nevezni.

**Példa.** Tegyük fel, hogy valamely $y(x)$ mennyiség változásának sebessége (pl. a GNP változásának sebessége) az $x$ időpillanatban arányos a mennyiség $x$ időpontbeli mennyiségével:

$$y' = ay.$$

Hogyan változik $y$ az idő függvényében? Feltesszük, hogy $a$ konstans, az időtől nem függő adott érték. (Ez azt jelenti, pl. hogy a GNP évről évre azonos százalékkal nő avagy csökken). Könnyen látható, hogy a differenciálegyenletünket megoldják az $y(x) = Ce^{ax}$ függvények, ahol $C$ tetszőleges pozitív konstans. (Később láthatjuk, hogy más megoldás nincs is.) Ez azt jelenti, hogy a mennyiség exponenciálisan nő, vagy csökken az idő függvényében. Az ilyen függvénnyel leírható folyamatokat evolúciós folyamatoknak nevezik.

*Kezdeti érték problémá*ról beszélünk, ha a differenciálegyenletünk mellett adott egy $(x_0, y_0)$ értékpár, s a differenciálegyenletnek olyan $y(x)$ megoldását keressük, melyre $y(x_0) = y_0$. Ez azt jelenti, hogy a differenciálegyenlet végtelen sok meggoldása közül azt kell kiválasztanunk, amely egy adott $x_0$-nál a megadott $y_0$ értéket veszi fel.

Állítás. **(Alaptétel)** *Ha differenciálegyenletben szereplő $f$ függvénynek létezik a $\partial_2 f$ parciális deriváltfüggvénye, amely folytonos az egész $I \times J$ halmazon, akkor tetszőleges $(x_0, y_0) \in I \times J$ kezdeti érték problémához egyértelműen létezik olyan $y\colon I^* \to \mathbb{R}$ maximális megoldása az*

$$y' = f(x, y)$$

*differenciálegyenletnek, mely teljesíti a kezdeti érték feltételt:* $y(x_0) = y_0$.

A legegyszerűbb differenciálegyenlet

$$y' = f(x)$$

alakú. Ekkor tulajdonképp olyan $y(x)$ függvényt keresünk, amelynek deriváltja $f(x)$. Nyilvánvalóan $y$ $f$-nek primitív függvénye, másszóval határozatlan integrálja, a megoldás ezért

$$y(x) = \int f(x)\,dx + C$$

tehát az egyenletnek végtelen sok megoldása van.

Ha kezdeti érték probléma is adott, azaz azt kívánjuk, hogy $y(x_0) = y_0$ is teljesüljön, akkor az egyetlen megoldás:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

Ezt a megoldást úgy is megkaphatjuk, hogy a $C$-t választjuk meg alkalmasan.

# Szétválasztható differenciálegyenletek

Egy differenciálegyenletet szétválasztható (változójú) differenciálegyenletnek nevezünk, ha

$$y' = g(x)h(y)$$

alakra hozható. (Szokták szeparábilisnek is mondani.)

$$\frac{1}{h(y(x))} y'(x) = g(x)$$

Mindkét oldal határozatlan integrálját képezve:

$$\int \frac{1}{h(y(x))} y'(x)\, dx = \int g(x)\, dx + C$$

A helyettesítéses integrálás szabálya alapján a baloldalt átalakíthatjuk:

$$\int \frac{1}{h(y)}\, dy(y(x)) = \int g(x)\, dx + C$$

**Példa.**

1) Oldjuk meg: $y' = 2xy^2$.

Átrendezve mindkét oldalt integráljuk:

$$\int \frac{1}{y^2}\,dy = \int 2x\,dx + C$$

$$-\frac{1}{y} = x^2 + C$$

$$y(x) = -\frac{1}{x^2 + C}$$

Ha az $y(0) = 1$ kezdeti érték feltételt is tekintjük, akkor $C = -1$ adódik, s az $y(x) = -\dfrac{1}{x^2 - 1}$ partikuláris megoldást kapjuk.

2) Tegyük fel, hogy a népesség növekedésének üteme egy szigeten arányos a népesség aktuális létszámával, s továbbá a sziget maximális befogadóképességét jelentő $A$ értéktől való eltéréssel:

$$y' = ay(A - y)$$

A differenciálegyenletben most $a$ és $A$ adott értékek, s az egyenlet szétválasztható változójú:

$$\frac{1}{y(A-y)} y' = a$$

A fenti érvelés alapján:

$$\int \frac{1}{y(A-y)}\, dy = \int a\, dx$$

Kiszámítva az itt szereplő integrálokat, a következőhöz jutunk:

$$\frac{1}{A} \ln \frac{y}{A-y} = ax + C$$

Ebből kifejezhetjük az $y$ függvény:

$$y = \frac{A}{1 + e^{-A(C+ax)}}$$

E függvény görbéjét, amely a fentiek alapján a korlátos növekedési folyamatokra jellemző, logisztikus görbének nevezik.

# Lineáris differenciálegyenlet

*Elsőrendű lineáris differenciálegyenlet*nek nevezzük az

$$y' + p(x)y = q(x)$$

alakú egyenleteket. Az egyenletet *homogén*, ha $q(x) = 0$ minden $x$-re. Általában *inhomogén*nak mondjuk.

Könnyen belátható:

egy homogén lineáris differenciálegyenlet esetén bármely két megoldás összege is megoldás.

Másrészt, ha egy inhomogén differenciálegyenlethez tekintjük a jobboldal lenullázásával keletkező homogén egyenletet, akkor az inhomogén két megoldásának különbsége megoldása lesz az homogénnak, s az inhomogén egy megoldásának és a homogén egy tetszőleges megoldásának összege az inhomogén egy megoldását adja.

inhom. ált. megold. $=$ inhom. part. megold. $+$ hom. ált. megold.

A) A homogén lineáris differenciálegyenlet mindig szétválasztható változójú:

$$y' = -p(x)y$$

Ezért

$$\int \frac{1}{y}\,dy = -\int p(x)\,dx$$

azaz

$$\ln|y| = -\int p(x)\,dx + \ln|C|$$

s így a homogén egyenlet általános megoldása:

$$y(x) = Ce^{-\int p(x)\,dx}$$

B) Az inhomogén egyenletet az ún. *állandók variálásának módszeré*vel oldhatjuk meg. Egy partikuláris megoldást keresünk

$$y(x) = C(x)e^{-\int p(x)\,dx}$$

alakban. Behelyettesítve az inhomogén egyenletbe $C(x)$-re egyszerű differenciálegyenletet kapunk:

$$C'(x) = q(x)e^{\int p(x)\,dx}$$

ahonnan $C(x)$ határozatlan integrálással adódik. Így összességében az inhomogén egyenlet általános megoldását az

$$y(x) = e^{-\int p(x)\,dx}\left\{\int q(x)e^{\int p(x)\,dx}\,dx + C\right\}$$

alakban kapjuk.

**Példa.** Oldjuk meg az $xy' - y = x^3 + 1$ !

1.lépésben az $xy' - y = 0$ homogén egyenletet oldjuk meg:

$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x}, \Rightarrow \int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{1}{x}\,dx \Rightarrow \ln|y| = \ln|x| + C,$ tehát $y = Cx$

2. lépésben az inhomogén egy megoldását $C(x)x$ alakban keressük: Ekkor $y' = C'x + C$

$$x^2C' + xC - Cx = x^3 + 1$$

azaz

$$C' = x + \frac{1}{x^2}, \quad \text{tehát} \quad C(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x}$$

Így az egyenletünk általános megoldása:

$$y(x) = \frac{x^3}{2} - 1 + Cx.$$