Differenciálhányados és deriváltfüggvény

Definíció. *Az* $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvényt értelmezési tartományának egy* x_0 *pontjában* differenciálhatónak *mondjuk, ha a*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

határérték létezik. E határértéket $f'(x_0)$*-lal (vagy régiesebben* $\frac{df}{dx}(x_0)$*-al) jelöljük, és* f x_0*-beli differenciálhányadosának vagy deriváltjának nevezzük.*

f *deriváltfüggvénye az az* f'*-al jelölt függvény, mely* f *differenciálhatósági pontjaiban van értelmezve, s melynek* x*-beli értéke* f x*-beli differenciálhányadosát adja meg.*

- Ahol egy függvény differenciálható, ott folytonos is. Ugyanis, ha f differenciálható x_0-ban, akkor bármely $x_n \to x_0$ esetén

$$d_n = \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} - f'(x_0) \to 0$$

ezért,

$$f(x_n) - f(x_0) = (x_n - x_0)(f'(x_0) + d_n) \to 0$$

- Nem differenciálható, pl. 0-ban az $|x|$ függvény, hiszen ha $x < 0$, akkor az $\dfrac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}$ hányados -1, míg $x > 0$ esetén $+1$. Ebben az esetben a hányadosnak van 0-ban baloldali és jobboldali határértéke is, de nem egyenlők. Láthatjuk, hogy lehetne értelmezni a baloldali, illetve jobboldali differenciálhányados fogalmát is, mint ahogy a függvény határértéke és folytonossága esetén tettük.

Az $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, $\quad f(0) = 0$ függvény esetén 0-ban nem differenciálható f, sőt sem baloldali, sem jobboldali differenciálhányadosa nem létezik.

Az $f = \sqrt{x}$ függvény sem differenciálható 0-ban, mivel a $\dfrac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}$ hányados végtelenhez tart, nem konvergál $x \to 0$ esetén.

Állítás. *Tegyük fel, hogy f és g differenciálható x_0-ban. Ekkor*

- *$f+g$ is differenciálható x_0-ban, és*

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

- *$f \cdot g$ is differenciálható x_0-ban, és*

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0)$$

- *ha $g(x_0) \neq 0$, akkor $\dfrac{f}{g}$ is differenciálható x_0-ban, és*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\, g(x_0) - f(x_0)\, g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

A szorzatfüggvény deriváltjára vonatkozó képletet Leibniz szabálynak nevezik.

Bizonyítás. Az összegre vonatkozó állítás az $f+g$-hez tartozó hányadosfüggvény felbontásából következik:

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=$$

$$=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

Szorzat esetében a következőképp bonthatjuk fel határértékkel rendelkező függvények összegére:

$$\frac{f(x)\,g(x)-f(x_0)\,g(x_0)}{x-x_0}=$$

$$= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\, g(x) + f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0)$$

$\square$

Állítás. *Legyen f és g olyan, hogy $g \circ f$ értelmezett, és f differenciálható x_0-ban, g differenciálható $f(x_0)$-ban. Ekkor $g \circ f$ differenciálható x_0-ban, és*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0)$$

Ha f invertálható és folytonos x_0 egy környezetében és x_0-ban differenciálható, $f'(x_0) \neq 0$, akkor az inverz f^{-1} függvény is differenciálható $y_0 = f(x_0)$-ban, és

$$(f^{-1})'(y_0)) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

Az összetett függvény deriválási szabályát 'láncszabálynak' is nevezik.

A monotonitás és a differenciálhatóság kapcsolata

Állítás.

- *Ha* f *differenciálható* x_0*-ban, és* f *monoton növekvő* x_0 *egy környezetében, akkor* $f'(x_0) \geq 0$*.*

- *Ha* f *differenciálható* x_0*-ban, és* f *monoton csökkenő* x_0 *egy környezetében, akkor* $f'(x_0) \leq 0$*.*

- *Ha* f *differenciálható* D *egy* x_0 *belső pontjában, és* f*-nek ott helyi szélsőértéke van, akkor* $f'(x_0) = 0$*.*

Bizonyítás. Ha f monoton nő, akkor a $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ függvény minden $x \neq x_0$-ra nemnegatív , ezért határértéke, az x_0-beli differenciálhányados is nemnegatív szám. Hasonlóan érvelhetünk monoton csökkenő függvény esetében is.

Ha f-nek x_0-ban pl. helyi minimuma van, akkor $x < x_0$ esetén a $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ függvény nempozitív, míg $x > x_0$ esetén nemnegatív, ezért az x_0-beli határértéke, mely feltételünk szerint létezik, csak 0 lehet. $\square$

Állítás. **Rolle tétel:** *Ha az $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény differenciálható az (a,b) nyílt intervallum minden pontjában, és*
$f(a) = f(b)$, akkor van olyan $\xi \in (a,b)$, hogy $f'(\xi) = 0$.

Bizonyítás. Ha f konstans, akkor nyilván minden $\xi \in (a, b)$ esetén teljesül $f'(\xi) = 0$.

Ha f nem konstans, akkor a folytonosság miatt felveszi abszolút minimumát és abszolút maximumát. Legalább az egyik szélsőértékhely nem az intervallum végpontjában, jelölje ezt ξ. Itt $f'(\xi) = 0$. $\square$

Állítás. **Lagrange tétel:** *Ha az $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény differenciálható az (a, b) nyílt intervallum minden pontjában, akkor van olyan $\xi \in (a, b)$, hogy*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

Állítás. *Legyen* f *differenciálható az* (a, b) *intervallumon. Ekkor*

- *ha* $f' \geq 0$ *minden* $x \in (a, b)$*-re, akkor* f *monoton növekvő,*
- *ha* $f' \leq 0$ *minden* $x \in (a, b)$*-re, akkor* f *monoton csökkenő,*
- *ha* $f' = 0$ *minden* $x \in (a, b)$*-re, akkor* f *konstans.*

Bizonyítás. Indirekten bizonyítunk: ha f nem monoton növekvő, akkor van olyan $x_1 < x_2$ (a, b)-ben, hogy $f(x_1) > f(x_2)$. Lagrange középérték tétele miatt van olyan $\xi \in (x_1, x_2)$, hogy $f'(\xi) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < 0$. Ez ellentmond feltételünknek.

A második állítást kapjuk, ha $-f$-re alkalmazzuk az elsőt, míg a harmadik az első kettőből azonnal következik. $\square$

Elemi függvények differenciálhatósága

Állítás.

- $(x^n)' = n\,x^{n-1}$, *ahol* $n \in \mathbb{N}$ *természetes szám.*

- $(\sin x)' = \cos x$

- $(a^x)' = \mathit{ln}\, a\, a^x$, *ahol* $a > 0$.

Bizonyítás. Közismert azonosságot, illetve x^n folytonosságát kihasználva láthatjuk, hogy $x_k \to x_0$ esetén

$$\frac{x_k^n - x_0^n}{x_k - x_0} = \frac{(x_k - x_0)(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \ldots + x_0^{n-1})}{x_k - x_0} =$$

$$= x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \ldots + x_0^{n-1} \to n\, x_0^{n-1}$$

Trigonometriai azonosságot, és a $\cos x$ folytonosságát alkalmazva adódik, hogy $x_n \to x_0$ esetén

$$\frac{\sin x_n - \sin x_0}{x_n - x_0} = \frac{2 \sin \frac{x_n - x_0}{2} \cos \frac{x_n + x_0}{2}}{x_n - x_0} \to \cos x_0$$

hiszen $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Az exponenciális esetben emeljünk ki a^{x_0}-at:

$$\frac{a^{x_n} - a^{x_0}}{x_n - x_0} = a^{x_0} \frac{a^{x_n - x_0} - 1}{x_n - x_0} \to a^{x_0} \ln a$$

hiszen már láttuk, hogy $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a$. $\square$

- Ezek után könnyen adódik a többi trigonometrikus függvény deriváltja:

$$(\cos x)' = (\sin(\frac{\pi}{2} - x))' = -\cos(\frac{\pi}{2} - x) = -\sin x$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{1}{\operatorname{tg} x}\right)' = \frac{-\frac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

- Láthatjuk, hogy különösen egyszerű az e^x deriváltfüggvényének képzése: $(e^x)' = e^x$. A természetes alapú logaritmus függvény deriváltja:

$$(\ln x)' = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$

- Tetszőleges α kitevőjű hatványfüggvény deriváltja ugyanúgy számítható, mint a természetes szám kitevőjűé:

$$(x^\alpha)' = \left(e^{\alpha \ln x}\right)' = e^{\alpha \ln x}\,\alpha\,\frac{1}{x} = \alpha\, x^{\alpha-1}$$

L'Hospital szabály

Állítás. *Tegyük fel, hogy az* (x_0, b) *nyílt intervallumon értelmezett, s ott differenciálható* f *és* g *függvényekre* $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = 0$ *és* $\lim\limits_{x \to x_0+0} g(x) = 0$, *továbbá* $g'(x) \neq 0$ *teljesül. Ha a*

$$\lim_{x \to x_0+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

határérték létezik, akkor a

$$\lim_{x \to x_0+0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

határérték is létezik, s e két határérték egyenlő.

Bizonyítás. Feltehetjük, hogy f és g is x_0-ban is értelmezett, s ott 0 értéket vesznek fel. Rögzített x-re tekintsük a $h(t) = f(t) - \frac{f(x)}{g(x)} g(t)$ függvényt minden $t \in [x_0, x]$-re. $h(x_0) = 0$ és $h(x) = 0$, alkalmazhatjuk Rolle tételét: van olyan $\xi \in (x_0, x)$, hogy $h'(\xi) = 0$, azaz

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Ha $x_n \to x_0$, akkor az x_n-hez a fentiek szerint hozzátartozó ξ_n sorozatra is $\xi_n \to x_0$ teljesül. Ezért

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} \to A.$$

$\square$

Állítás. *Tegyük fel, hogy az* (x_0, b) *nyílt intervallumon értelmezett, s ott differenciálható* f *és* g *függvényekre* $\lim_{x\to x_0+0} f(x) = \infty$ *és* $\lim_{x\to x_0+0} g(x) = \infty$. *Ha a*

$$\lim_{x\to x_0+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

határérték létezik, akkor a

$$\lim_{x\to x_0+0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

határérték is létezik, s e két határérték egyenlő.

- Mindkét fenti állítás akkor is igaz, ha a határérték kiterjesztett értelemben létezik, azaz ha $A = \infty$, vagy $A = -\infty$. A bizonyítást megfelelően kell módosítani.

- Az állítások akkor is érvényesek, ha x_0 helyett a végtelenben (vagy mínusz végtelenben) vett határértékeit vizsgáljuk a függvényeknek. (Ugyanis egy $x = \frac{1}{t}$ helyettesítéssel a függvényeknek az értelmezési tartományát "ki-befordíthatjuk".) Természetesen ilyenkor a szóban forgó függvényeknek egy (a, ∞), illetve $(-\infty, a)$ intervallumon kell értelmezettnek lenni.

- A bizonyított állítások — feltételek teljesülése esetén — ún. $\frac{0}{0}$, illetve $\frac{\infty}{\infty}$ típusú határértékek meghatározására ad módot. Ezekre az esetekre visszevezethetők a $0 \cdot \infty$, a 0^0, a ∞^0, a 1^∞, a $\infty - \infty$ típusú határértékek, pl. a negyedik esetben az

$$(f(x))^{g(x)} = e^{\frac{\ln f(x)}{\frac{1}{g(x)}}}$$

átalakítás segítségével.

Konvexitás és a deriváltak kapcsolata

Míg a függvény első deriváltjának előjele a függvény monotonitásával van szoros kapcsolatban, addig a második derivált a függvény konvexitásával.

Definíció. *Egy* $[a, b]$ *intervallumon értelmezett* f *függvényt* (alulról) konvexnek *mondunk, ha bármely* $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ *esetén minden* $\lambda \in [0, 1]$*-re*

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

teljesül. f konkáv $[a, b]$*-n, ha* $(-f)$ *konvex.*

A konvexitás szemléletesen nyilvánvalóan azt jelenti, hogy az $[x_1, x_2]$ intervallum feletti függvénygörbe az x_1-hez és x_2-höz tartozó görbepontokat öszekötő húr alatt halad.

Az $[a, b]$-n differenciálható függvények esetében a konvexitás a deriváltfüggvény monotonitásával függ össze, ezért kétszeri differenciálhatóság esetén a második derivált előjelével.

Állítás. *Legyen* $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *egy differenciálható függvény.*

f *pontosan akkor konvex, ha* f' *monoton nő.*

f *pontosan akkor konkáv, ha* f' *monoton csökken.*

Következmény. *Egy kétszer differenciálható* $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *függvény pontosan akkor konvex, ha* $f'' \geq 0$*, illetve pontosan akkor konkáv, ha* $f'' \leq 0$*.*

Taylor polinom

Definíció. *Az n-szer differenciálható $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény $x_0 \in (a,b)$-beli n-*edrendű Taylor polinom*jának nevezzük az*

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

n-edfokú polinomot, ahol $f^{(0)} = f$.

A Taylor polinom hasznosságára az ad reményt, hogy az f függvény és Taylor polinomjának legfeljebb n-edrendű deriváltjai x_0-ban megegyeznek: $f^{(k)}(x_0) = T_n^{(k)}(x_0)$ $k = 0, 1, \ldots, n$.

A közelítés "jóságát" a Taylor polinomnak az f függvénytől való eltérése, az

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x)$$

ún. maradéktag tulajdonságai jelzik. Ennek vizsgálatához hasznos a maradéktag speciális előállítása.

Állítás. *Ha f $(n+1)$-szer differenciálható x_0 egy környezetében, akkor az n-edrendű Taylor polinom maradéktagja*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

alakban adható meg, ahol ξ x_0 és x közötti, x-től is függő érték.

- Azt a speciális esetet, amikor $x_0 = 0$, *MacLaurin polinom*nak is nevezik.

- Néhány függvény esetében könnyen felírható a függvény Taylor polinomja, pl.:
  - e^x függvény esetében az $x_0 = 0$-beli Taylor (MacLaurin) polinom

$$T_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

  - a $\sin x$ függvény $x_0 = 0$-beli Taylor (MacLaurin) polinomja

$$T_{2k+1}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

  - az $\ln x$ függvény $x_0 = 1$-beli Taylor polinomja

$$T_n(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n}$$

- A Taylor polinom a függvényértékek közelítő kiszámítására használható. A függvényértéktől való eltérés — a hiba — a maradéktag vizsgálatával becsülhető, pl. a $\sin x$ függvény esetében a harmadrendű $T_3(x) = T_4(x)$ MacLaurin polinom $0,01$ pontossággal adja meg $\sin x$ értékét az $|x| < 1$ intervallumban, hiszen

$$|R_4(x)| = \left|\frac{\sin^{(5)}(\xi)}{5!}\,x\right| < \frac{1}{100}|x|$$

A függvény szélsőértéke létezésének feltételei

Állítás. *Legyen f $(n+1)$-szer folytonosan differenciálható x_0-ban, és tegyük fel, hogy*

$$f'(x_0) = 0, \ldots, f^{(n)}(x_0) = 0, f^{(n+1)}(x_0) \neq 0.$$

Ha $n+1$ páros szám, akkor $f^{(n+1)}(x_0) > 0$ esetén f-nek x_0-ban helyi minimuma van, míg $f^{(n+1)}(x_0) < 0$ esetén helyi maximuma van.

Ha $n+1$ páratlan szám, akkor f-nek x_0-ban nincs helyi szélsőértéke.

Bizonyítás. A Taylor polinom maradéktagjának előállítás alapján, figyelembe véve, hogy a feltételek fennállása esetén

$T_n(x) = f(x_0)$, kapjuk, hogy

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Ha $f^{(n+1)}(x_0) > 0$, akkor a folytonos differenciálhatóság miatt van x_0-nak olyan környezete, hogy onnan választott összes ξ-re $f^{(n+1)}(\xi) > 0$. Ezért ha $n+1$ páros szám, akkor $f(x) - f(x_0) \geq 0$, tehát f-nek x_0-ban helyi minimuma van. Hasonlóan$f^{(n+1)}(x_0) < 0$ esetén páros $n+1$ mellett f-nek helyi maximuma van.

Ha $n+1$ páratlan, és pl. $f^{(n+1)}(x_0) > 0$, akkor $x > x_0$ esetén $f(x) - f(x_0) > 0$, míg $x < x_0$ esetén $f(x) - f(x_0) < 0$, azaz f-nek nincs x_0-ban szélsőértéke. $\square$

- Fontos megjegyezni, hogy a helyi szélsőérték létezésének e tételben mondott feltételei nem mind szükségesek. Ezt mutatja az $e^{-\frac{1}{x^2}}$ függvény példája, melynek ugyan szélsőértéke van 0-ban, de ott magasabb rendű deriváltjai mind 0-ák.

- Gyakori (és szerencsés) esetben már a második derivált vizsgálata is elegendő: Ha $f'(x_0) = 0$, és $f''(x_0) > 0$, akkor f-nek x_0-ban helyi minimuma van, míg $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) < 0$ esetén helyi maximuma.