

Szigorlati tételsor a matematikus hallgatók algebra és számelmélet szigorlatához (M2703)

1. Természetes számok, műveletek, rendezés, teljes indukció. Az egész számok gyűrűje, rendezés. A racionális számok teste, rendezés. Komplex számok, kanonikus és trigonometrikus alak, gyökvonás, egységgyökök.
2. A számelmélet elemei. Egész számok kongruenciája, lineáris kongruenciák és lineáris diofantikus egyenletek megoldása.
3. Számelméleti függvények: osztók száma, összege, Euler-féle és Moebius-féle függvény és alkalmazásai. Euler-Fermat tétel. Additív és multiplikatív függvények viselkedése, átlaguk az osztók számán illusztrálva.
4. Prímszámok, a prímszámok sorozatának végtelensége. Dirichlet tétele speciális esetekben. Prímszámok reciprokaiknak összege, az x -nél kisebb prímszámok számára vonatkozó becslések. A prímszám-tétel ismertetése.
5. Algebrai számtestek, egész bázis, norma, egységek ideálosztályszám. Egyértelmű prímfaktorizáció kérdése algebrai számtestek egészeinek gyűrűjében.
6. Diofantikus egyenletek. Elemi algebrai, geometriai módszerek illusztrálása. A geometriai és additív számelmélet alapelemei. Minkowski tétele és alkalmazásai, lineáris diofantikus egyenlőtlenérendszer megoldhatósága, természetes számok négyzetösszegként való előállítása. Nevezetes additív számelméleti problémák.
7. Diofantikus approximáció, Dirichlet tétele. Lánctörtek. Algebrai számok racionális számokkal való approximálhatósága, alkalmazások (transzcendens számok konstrukciója).
8. Egy és több határozatlanú polinomgyűrűk, racionális függvénytestek, parciális törtek, szimmetrikus polinomok alaptétele.
9. Az algebra alaptétele és következményei. Harmad- és negyedfokú egyenletek. Egyenletek közös gyökeinek, egyenletek többszörös gyökeinek meghatározása.
10. Véges dimenziós vektorterek, bázis, dimenzió, alterek, lineáris sokaságok. A mátrixok algebraja, invertálhatóság, rangszám-tétel. Determinánsok elemi tulajdonságai, kifejtési tétel, szorzástétel.
11. Lineáris egyenletrendszerek megoldhatóságának feltétele, a megoldáshalmaz jellemzése. Az általános megoldás megkeresése, Cramer szabály, az elimináció módszere.
12. Véges dimenziós vektorterek lineáris leképezése, műveletek tulajdonságai, reprezentációjuk mátrixokkal. Sajátérték, sajátvektor, invariáns altér meghatározása. Mátrixok Jordán féle normál alakja.
13. Euklideszi és unitér terek. Lineáris, bilineáris és kvadratikus formák, kanonikus alakjuk. Ortogonalitás, ortonormált bázis, Euklideszi és unitér terek lineáris leképezései. Szimmetrikus (önadjungált), ortogonális (unitér) és normális transzformációk.
14. Másodrendű görbék, osztályozásuk.
15. A csoport fogalma, izomorfia, permutációcsoportok, Cayley tétele, rész-csoportok, mellékosztály, Lagrange tétele.
16. Normálosztó, homomorfia tétel, a ciklikus csoportok jellemzése.
17. Direkt szorzat, a véges Abel-csoportok alaptétele.
18. Gyűrűk, ideál, homomorfia tétel. Integritástartomány, euklideszi és főideálgyűrű.
19. Egyértelmű prímfaktorizáció az egész számok gyűrűjében, a racionális, valós és komplex együtthatós polinomok gyűrűjében. Az egyértelmű prímfaktorizáció tétele gyűrűkben. Dedekind gyűrű.
20. Test karakterisztikája, algebrai és transzcendens testbővítések, polinom felbontási teste. Normális bővítések.
21. A Galois-elmélet főtétele és alkalmazásai az algebrai egyenletek és a geometriai szerkesztések elméletében. Feloldható csoportok.